Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Альпин, Н. А. Корешков, Об одновременной триангулируемости матриц, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 648–652

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm986>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:00:58

УДК 519.6

ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ ТРИАНГУЛИЗУЕМОСТИ МАТРИЦ

Ю. А. Альпин, Н. А. Корешков

Установлены два необходимых и достаточных критерия одновременной триангулируемости двух комплексных матриц. Оба они допускают конечную процедуру проверки. Для доказательства первого критерия привлекаются классические теоремы теории алгебр Ли, причем известные достаточные условия триангулируемости тоже получают в терминах этой теории естественную интерпретацию. Второй критерий обсуждается в границах ассоциативных алгебр. Решающим фактом здесь оказывается теорема Веддербарна о нильпотентности конечномерной нильалгебры.

Библиография: 13 названий.

Введение. Вопрос о том, могут ли две комплексные матрицы быть приведены к верхнему треугольному виду одним подобием – один из старых вопросов линейной алгебры. В принципе он решается следующей теоремой Маккоя [1], [2].

ТЕОРЕМА 1. *Матрицы A и B одновременно триангулируемы тогда и только тогда, когда для всякого многочлена $p(x, y)$ от некоммутирующих переменных x и y матрица $p(A, B)(AB - BA)$ нильпотентна.*

Однако, как отмечено в обзоре [3] современного состояния вопроса, доказательство Маккоя сложно и не содержит конечной процедуры проверки выполнения условия теоремы. Более элементарное доказательство Дрейзина, Данги и Грюнберга [4], [5] тоже не дает способа проверки.

В этой заметке доказаны два необходимых и достаточных критерия одновременной триангулируемости двух матриц. Оба они допускают конечную процедуру проверки. Для доказательства первого критерия привлекаются классические теоремы теории алгебр Ли, причем известные достаточные условия триангулируемости тоже получают в терминах этой теории естественную интерпретацию. Второй критерий обсуждается в границах ассоциативных алгебр. Решающим фактом здесь оказывается теорема Веддербарна о нильпотентности конечномерной нильалгебры.

1. Триангулируемость и алгебры Ли. Напомним некоторые определения из теории алгебр Ли. Пусть G – алгебра Ли над полем комплексных чисел. Если H, T – подпространства в G , то обозначим через $[H, T]$ подпространство, натянутое на коммутаторы $[h, t]$, $h \in H, t \in T$. Определим индуктивно две серии подпространств:

$$G^{(k)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}], \quad G_k = [G_{k-1}, G], \quad G^{(0)} = G_0 = G.$$

Алгебра G называется *разрешимой*, если

$$G \supset G^{(1)} \supset \dots \supset G^{(r)} = \{0\},$$

и *нильпотентной*, если

$$G \supset G_1 \supset \dots \supset G_s = \{0\}.$$

Поскольку $G^{(k)} \subseteq G_k$, то nilьпотентность алгебры G влечет ее разрешимость. На самом деле – заметим это для дальнейшего – для разрешимости G достаточно, чтобы коммутант $G_1 = [G, G]$ был nilьпотентной алгеброй Ли.

Теория алгебр Ли содержит следующий ответ на вопрос о совместной триангулируемости матриц. Теорема Ли утверждает, что алгебра Ли линейных операторов в конечномерном линейном пространстве разрешима тогда и только тогда, когда существует базис этого пространства, в котором матрицы всех операторов алгебры имеют верхний треугольный вид (см., например, [6]). Таким образом, матрицы A, B одновременно триангулируемы в точности тогда, когда порожденная ими алгебра Ли $L = L(A, B)$ разрешима.

Покажем, что теорема Маккая может быть получена как несложное следствие теоремы Ли.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A, B – комплексные матрицы порядка $n \geq 2$. Следующие утверждения равносильны:

- 1) матрицы A и B одновременно триангулируемы,
- 2) для всякого многочлена $p(x, y)$ от некоммутирующих переменных x, y матрица $p(A, B)(AB - BA)$ nilьпотентна,
- 3) алгебра Ли $L = L(A, B)$ разрешима,
- 4) коммутант $L_1 = [L, L]$ nilьпотентен как подалгебра L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\implies$ 2) очевидна. Докажем, что 2) влечет 4). Для этого заметим, что любая матрица $p(A, B)(AB - BA)q(A, B)$, где $p(x, y), q(x, y)$ многочлены, ассоциативно nilьпотентна, поскольку nilьпотентна матрица $q(A, B) \times p(A, B)(AB - BA)$. Линейная оболочка H элементов $p(A, B)(AB - BA)q(A, B)$ является алгеброй Ли, имеющей базис из nilьпотентных элементов. По теореме Энгеля [7] такая алгебра есть nilьпотентная алгебра Ли. Поскольку $[L, L] \subseteq H$, то и $[L, L]$ nilьпотентная алгебра. Таким образом, условие 4) выполняется. Импликация 4) $\implies$ 3) справедлива ввиду замечания, сделанного в начале пункта. Наконец, из 3) вытекает 1) по теореме Ли. Теорема доказана.

Заметим, что теорема Ли, как и теорема Маккая, не дает ответа на вопрос, как за конечное число шагов проверить, триангулируемы ли две матрицы одновременно. По-видимому, классики не интересовались этим вопросом. В конце пункта мы приведем способ проверки, но прежде рассмотрим с точки зрения теории алгебр Ли два известных достаточных условия триангулируемости.

Если матрицы A и B перестановочны, то их одновременная триангулируемость – известный факт линейной алгебры [8, задача 6.3.44;], [2]. Коммутант соответствующей алгебры Ли в этом случае тривиален: $L_1 = \{0\}$. Говорят, что матрицы A, B *квазиперестановочны*, если

$$[A, B] \neq 0, \quad [[AB - BA], A] = [[AB - BA], B] = 0.$$

ТЕОРЕМА 3 (малая теорема Маккоя [9], [3]). *Квазиперестановочные матрицы A и B могут быть приведены к верхнему треугольному виду одним и тем же подобием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие теоремы иными словами означает, что $L_1 \neq \{0\}$, но $L_2 = \{0\}$, причем матрицы $A, B, [A, B]$ линейно независимы. Таким образом, в этом случае $L = L(A, B)$ – трехмерная нильпотентная (и, следовательно, разрешимая) алгебра Ли. Применение теоремы Ли завершает доказательство.

Дрейзин [10], [3] предложил следующее обобщение свойства перестановочности. Положим $C_0 = \{A, B\}$ и определим индуктивно множества

$$C_k = \{[A, X], X \in C_{k-1}\} \cup \{[B, X], X \in C_{k-1}\}.$$

Если для некоторого k $C_k = \{0\}$, то говорят, что матрицы A и B обладают *свойством обобщенной квазиперестановочности*. Очевидно, если $C_k = \{0\}$, то $C_{k+1} = C_{k+2} = \dots = \{0\}$.

ТЕОРЕМА 4 (Дрейзин). *Если матрицы A и B обладают свойством обобщенной квазиперестановочности, то они могут быть приведены к верхнему треугольному виду одним подобием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой элемент алгебры $L = L(A, B)$ с помощью тождества Якоби и свойства антикоммутативности преобразуется в линейную комбинацию правонормированных мономов вида

$$[X_1, [X_2, \dots, [X_k, X_{k+1}], \dots]], \quad X_i \in \{A, B\}, \quad i = 1, \dots, k+1.$$

Всевозможные такие коммутаторы для фиксированного k составляют C_k . Нетрудно заметить следующую связь между коммутантами L_k и множествами C_k (угловые скобки означают взятие линейной оболочки):

$$\forall k \geq 0 \quad C_k \subset L_k, \quad L_k \subseteq \langle C_k \cup C_{k+1} \cup \dots \rangle.$$

Отсюда видно, что $C_k = \{0\} \iff L_k = \{0\}$ и, стало быть, обобщенная квазиперестановочность матриц A, B и нильпотентность порожденной ими алгебры Ли – эквивалентные свойства. Применяя, как и в предыдущем случае, теорему Ли, получаем утверждение теоремы Дрейзина.

Чтобы получить конструктивную форму критерия триангулируемости, используем условие Картана разрешимости алгебры Ли. Это условие гласит [11]: если след ассоциативного произведения любых двух элементов алгебры Ли линейных операторов конечномерного векторного пространства равен нулю, то алгебра разрешима.

ТЕОРЕМА 5. *Матрицы A и B порядка n могут быть приведены к верхнему треугольному виду одним и тем же подобием тогда и только тогда, когда равен нулю след ассоциативного произведения любых двух мономов вида*

$$[X_1, [X_2, \dots, [X_k, X_{k+1}], \dots]], \quad X_i \in \{A, B\}, \quad k \leq n^2 - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В части необходимости утверждение теоремы очевидно. Пусть теперь выполнено условие теоремы. Уточняя применительно к $L_1 = [L, L]$ связь между L_k и C_k , сформулированную в доказательстве теоремы 3, отметим, что $L_1 = \langle C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m \rangle$, где m – наименьшее число, для которого $\langle C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_m \rangle = \langle C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_m \cup C_{m+1} \rangle$. Очевидно, $m \leq n^2 - 1$. Нам дано, что условие Картана выполнено для любых элементов множества, натягивающего L_1 как линейное пространство. Но тогда оно выполнено в силу линейности функции следа для любых элементов L_1 . Следовательно, L_1 – разрешимая алгебра. Но тогда и L – разрешимая алгебра, к которой применима теорема Ли. Теорема доказана.

2. Триангулируемость и теорема Веддербарна. В этой части все алгебры ассоциативные. Обозначим $\mathcal{A}(A, B)$ подалгебру ассоциативной алгебры $M_n(\mathbb{C})$ комплексных матриц порядка n , порожденную матрицами A и B . Условие Маккоя в стандартных для теории алгебр терминах пересказывается так: левый идеал $I = \mathcal{A}(A, B) \times (AB - BA)$, порожденный матрицей $AB - BA$, должен быть нильидеалом. Желая выделить содержательный случай, считаем далее, что $AB - BA \neq 0$. Согласно теореме Веддербарна [12] нильидеал конечномерной алгебры является нильпотентным идеалом. Следовательно, если условие Маккоя выполнено, то имеем убывающую цепь

$$I \supset I^2 \supset \dots \supset I^s = \{0\}. \quad (1)$$

После этого замечания доказательство теоремы Маккоя становится совсем простым. Из (1) вытекает, что вложение

$$\mathbb{C}^n \supseteq I(\mathbb{C}^n)$$

является на самом деле строгим включением, ибо в предположении равенства получаем $\mathbb{C}^n = I^k(\mathbb{C}^n)$, $k = 1, 2, \dots$. Но это противоречит нильпотентности I . Подпространство $I(\mathbb{C}^n)$ инвариантно относительно операторов A и B ; следовательно, в подходящем базисе матрицы приобретут вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & G \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_1 & H \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

где A_1, B_1 – матрицы сужений операторов A, B , действующих в $I(\mathbb{C}^n)$, а A_2, B_2 – матрицы фактор-операторов, действующих в фактор-пространстве $\mathbb{C}^n / I(\mathbb{C}^n)$. Аналогичный смысл имеют диагональные блоки для любой из матриц алгебры, получившихся после перехода к новому базису. Поскольку образ оператора $AB - BA$ лежит в $I(\mathbb{C}^n)$, то его фактор-оператор есть нулевой оператор. Таким образом, $A_2 B_2 - B_2 A_2 = 0$, матрицы A_2, B_2 перестановочны и, следовательно, совместно триангулируемы. Для матриц A_1, B_1 порядка меньше, чем n , выполнено условие Маккоя и к ним можно применить предыдущие рассуждения. Продолжая редукцию по порядку, придем к доказательству теоремы.

Чтобы получить конструктивную форму теоремы Маккоя, используем простое следствие теоремы Веддербарна [13]. Для того чтобы подалгебра алгебры $M_n(\mathbb{C})$ была нильпотентна, необходимо и достаточно, чтобы существовал ее базис, составленный из матриц с нулевым следом.

Идеал $I = \mathcal{A}(A, B)$ – подалгебра алгебры $M_n(\mathbb{C})$. Ее базис заведомо можно выбрать из конечного множества матриц

$$\{A_1 \dots A_k (AB - BA), A_i \in \{A, B\}, i = 1, \dots, k, 0 \leq k \leq n^2 - 1\}. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 6. *Матрицы A и B одновременно триангулизуемы тогда и только тогда, когда след любой матрицы из конечного множества (2) равен нулю.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] McCoy N. H. On the characteristic roots of matrix polynomials // Bull. Amer. Math. Soc. 1936. V. 42. P. 592–600.
- [2] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [3] Икрамов Х. Д., Савельева Н. В., Чугунов В. Н. О рациональных критериях существования общих собственных векторов или инвариантных подпространств // Программирование. 1997. № 3. С. 43–57.
- [4] Drazin M. P., Dungey J. W., Gruenberg K. W. Some theorems on commutative matrices // J. London Math. Soc. 1951. V. 26. P. 221–228.
- [5] Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.
- [6] Бахтурин Ю. А. Основные структуры современной алгебры. М.: Наука, 1990.
- [7] Капланский И. Алгебры Ли и локально компактные группы. М.: Мир, 1974.
- [8] Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.
- [9] McCoy N. H. On quasi-commutative matrices // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. P. 327–340.
- [10] Drazin M. P. Some generalizations of matrix commutativity // Proc. London Math. Soc. 1951. V. 1. P. 222–231.
- [11] Постников М. М. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
- [12] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
- [13] Чеботарев Н. Г. Введение в теорию алгебр. М.: Гостехиздат, 1949.

Казанский государственный университет
E-mail: Yuri.Alpin@ksu.ras.ru

Поступило
04.11.1999