Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Васильев, Волновая факторизация эллиптических символов, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 653–667

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm987>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:06:10

УДК 517.95

ВОЛНОВАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИМВОЛОВ

В. Б. Васильев

Введено понятие волновой факторизации символа эллиптического псевдодифференциального оператора и показано применение волновой факторизации к исследованию псевдодифференциальных уравнений в конусах.

Библиография: 13 названий.

0. В теории краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, разработанной М. И. Вишиком, Г. И. Эскиным [1], [2], ключевую роль сыграла факторизация символа псевдодифференциального оператора по одной из переменных при фиксированных остальных. В зависимости от так называемого индекса факторизации приходилось рассматривать различные краевые задачи, отражающие особенности возникшей ситуации. Рассматривались также и алгебры краевых задач [3], [4], с помощью которых можно было охватить все ситуации. При изучении псевдодифференциального уравнения в конусе (угле) автором настоящей работы было обнаружено, что аналогичную роль будет играть “волновая” факторизация, связанная с выходом в комплексную область по всем переменным сразу. Такая факторизация позволяет использовать многомерный вариант метода Винера–Хопфа и получить для псевдодифференциального уравнения в угле такую же картину разрешимости, какая имела место в случае полупространства. Такой подход применим и к некоторым классам дифференциальных операторов и до сих пор не использовался [5]. Цель настоящей работы – убедиться в том, что запас эллиптических символов, допускающих волновую факторизацию, достаточно богат и продемонстрировать в одном случае “работу” волновой факторизации.

1. Пусть $A(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, – символ псевдодифференциального оператора A , удовлетворяющий условию

$$c_1 \leq |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \leq c_2, \quad (1_\alpha)$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ назовем *порядком* псевдодифференциального оператора A . Очевидно, что символ $A(\xi)$ эллиптический, т.е. $A(\xi) \neq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}$.

Обозначим через C_+^a конус в пространстве $\mathbb{R}^m$ вида

$$C_+^a = \{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi'| < a\xi_m, \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1}), a > 0\},$$

$$C_+^{*a} = \{\xi \in \mathbb{R}^m : a|\xi'| < \xi_m\}.$$

Радиальной трубчатой областью над конусом C_+^a называется [6] множество из $\mathbb{C}^m$ вида $\mathbb{R}^m + iC_+^a \equiv T(C_+^a)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01698.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Волновой факторизацией символа $A(\xi)$ относительно конуса C_+^a называется его представление в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ должны обладать свойствами:

- 1) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ определены всюду на $\mathbb{R}^m$, кроме, быть может, множества точек $\{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi'|^2 = a^2 \xi_m^2\}$;
- 2) $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в $T(\dot{C}_+^a)$, $T(\dot{C}_-^a)$ соответственно, удовлетворяющее оценкам

$$\begin{aligned} |A_{\neq}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| &\leq c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm \kappa}, \\ |A_{=}^{\pm 1}(\xi - i\tau)| &\leq c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - \kappa)} \quad \forall \tau \in \dot{C}_+^a, \end{aligned}$$

где $\dot{C}_-^a$ – конус, противоположный конусу $\dot{C}_+^a$: $\dot{C}_-^a = -\dot{C}_+^a$.

Число κ назовем индексом волновой факторизации, а саму волновую факторизацию для сокращения записи будем именовать w -факторизацией.

Для сравнения мы приведем определение факторизации “по Вишику–Эскину”, которая применялась для изучения псевдодифференциальных уравнений в полупространстве $\{\xi \in \mathbb{R}^m : \xi_m > 0\}$.

Пусть C_α^∞ , $\alpha \in \mathbb{R}$, – класс эллиптических символов $A(\xi)$, которые бесконечно дифференцируемы при $\xi \neq 0$ и представляют собой однородные функции порядка α , т. е.

$$A(t\xi) = t^\alpha A(\xi) \quad \forall t > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2]. Однородной факторизацией эллиптического символа $A(\xi) \in C_\alpha^\infty$ по переменной ξ_m называется представление $A(\xi', \xi_m)$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$, в виде

$$A(\xi', \xi_m) = A_+(\xi', \xi_m)A_-(\xi', \xi_m),$$

где $A_+(\xi', \xi_m)$ и $A_-(\xi', \xi_m)$ удовлетворяют следующим условиям:

- а) $A_+(\xi', \xi_m)$ при $\xi' \neq 0$ допускает аналитическое продолжение по ξ_m в верхнюю полуплоскость $\tau > 0$;
- б) $A_+(\xi', \xi_m + i\tau)$ непрерывна по совокупности переменных (ξ', ξ_m, τ) при $\tau \geq 0$, $|\xi'| + |\xi_m| + \tau > 0$;
- в) $A_+(\xi', \xi_m + i\tau)$ – однородная функция порядка λ :

$$A_+(t\xi', t(\xi_m + i\tau)) = t^\lambda A_+(\xi', \xi_m + i\tau) \quad \forall t > 0;$$

- г) $A_+(\xi', \xi_m + i\tau) \neq 0$ при $\tau \geq 0$, $|\xi'| + |\xi_m| + \tau > 0$.

Аналогично, функция $A_-(\xi', \xi_m)$ допускает при $\xi' \neq 0$ аналитическое продолжение по ξ_m в полуплоскость $\tau < 0$, непрерывна и отлична от нуля при $\tau \leq 0$, $|\xi'| + |\xi_m| + |\tau| > 0$ и однородна порядка $\alpha - \lambda$.

В [2] кроме этого требовалось выполнение условия

$$A_+(0; +1) = 1. \quad (2)$$

Оказалось, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1 [2]. Пусть $A(\xi) \in C_\alpha^\infty$ – эллиптический символ. Тогда $A(\xi)$ допускает единственную при условии нормировки (2) однородную факторизацию по переменной ξ_m .

Эта факторизация была построена в [2] конструктивно с помощью интеграла типа Коши.

Для волновой факторизации у нас нет аналога теоремы 1 (кстати, можно обратить внимание, что в определении w -факторизации отсутствует условие типа б) – требование непрерывности). Однако мы покажем, что по любому эллиптическому символу класса C_α^∞ можно построить другой эллиптический символ, который уже допускает w -факторизацию.

2. Пусть

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + k^2, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Тогда $A(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{m-1}^2 + \xi_m^2 + k^2 \equiv |\xi|^2 + k^2$.

ЛЕММА 1. Символ $A(\xi)$ допускает w -факторизацию с индексом 1 вида

$$\begin{aligned} A(\xi) = & (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_{m-1}^2 - k^2}) \\ & \times (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_{m-1}^2 - k^2}), \end{aligned} \quad (3)$$

где под $\sqrt{a^2\xi_m^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_{m-1}^2 - k^2}$ понимается граничное значение аналитической в $T(\overset{*}{C}_+^a)$ функции $\sqrt{a^2z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2 - k^2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\sqrt{a^2 + 1}z_m + \sqrt{a^2z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2 - k^2}$$

как функцию m комплексных переменных $z_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Нетрудно убедиться в том, что функция $a^2z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2 - k^2$ не принимает неотрицательных значений при $z = (z_1, \dots, z_m) \in T(\overset{*}{C}_+^a) \cup T(\overset{*}{C}_-^a)$ (в [6, лемма на с. 350] это доказано в случае $a \equiv 1$, $k \equiv 0$; общий случай рассматривается дословным повторением приведенных там рассуждений). Отсюда следует, что каждая из двух ветвей функции $W(z) = \sqrt{a^2z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2 - k^2}$ однозначна и аналитична в $T(\overset{*}{C}_+^a) \cup T(\overset{*}{C}_-^a) \equiv T(\overset{*}{C}^a)$.

Следуя [6], введем класс $H_0(\overset{*}{C}^a)$ функций $f(z)$, аналитических в радиальной трубчатой области $T(\overset{*}{C}^a)$ ($\overset{*}{C}^a \equiv \overset{*}{C}_+^a \cup \overset{*}{C}_-^a$) над конусом $\overset{*}{C}^a$ и таких, что для любого подконуса $\overset{*}{C}_1^a$, компактного в $\overset{*}{C}^a$, они удовлетворяют оценке

$$|f(z)| \leq M(\overset{*}{C}_1^a)(1 + |z|)^\beta(1 + |y|^{-\alpha}), \quad z \in T(\overset{*}{C}_1^a), \quad (4)$$

при некоторых $\alpha, \beta \geq 0$, не зависящих от $\overset{*}{C}_1^a$, $z = x + iy$; $M(\overset{*}{C}_1^a)$ – постоянная, зависящая от подконуса $\overset{*}{C}_1^a$.

Нетрудно заметить, что функция $W(z)$ удовлетворяет оценке (4) с $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и универсальной постоянной M (не зависящей от подконуса $\dot{C}_1^a$). Таким образом, $W(z) \in H_0(\dot{C}_+^a)$ и, следовательно [6], имеет граничные значения в смысле распределений при $y \rightarrow 0$, $y \in \dot{C}_\pm^a$. Эти граничные значения являются локально интегрируемыми функциями и легко вычисляются. Поскольку граничные значения не зависят от того, по какому пути y стремится к нулю, можно рассмотреть пределы вида

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sqrt{a^2(x_m \pm i\varepsilon)^2 - x_1^2 - \dots - x_{m-1}^2 - k^2}.$$

Выберем одну из ветвей функции $W(z)$, ту, которая отображает $T(\dot{C}_+^a)$ на верхнюю полуплоскость. Граничные значения этой ветви будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2(x_m \pm i0)^2 - x_1^2 - \dots - x_{m-1}^2 - k^2} \\ &= \begin{cases} \pm \sqrt{a^2 x_m^2 - |x'|^2 - k^2}, & a^2 x_m^2 - |x'|^2 - k^2 > 0, & x_m > 0, \\ \mp \sqrt{a^2 x_m^2 - |x'|^2 - k^2}, & a^2 x_m^2 - |x'|^2 - k^2 > 0, & x_m < 0, \\ i \sqrt{|x'|^2 + k^2 - a^2 x_m^2}, & a^2 x_m^2 - |x'|^2 - k^2 < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

который получается, если аккуратно проследить за поведением модуля и аргумента функции $W(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m \pm i\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Далее отметим, что

$$\sqrt{a^2(x_m + i0)^2 - |x'|^2 - k^2} = -\overline{\sqrt{a^2(x_m - i0)^2 - |x'|^2 - k^2}},$$

где черта сверху обозначает комплексное сопряжение.

Возвращаясь к функции $\sqrt{a^2 + 1}z_m + W(z)$, заключаем, что она аналитична в $T(\dot{C}_+^a)$, и, аналогично, функция $\sqrt{a^2 + 1}z_m + \overline{W(z)}$ аналитична в $T(\dot{C}_-^a)$. Действительно, коль скоро $W(z) \in H_0(\dot{C}_+^a)$, то по теореме 2 из [6, с. 280] для нее существует спектральная функция $g(\xi)$, обращающаяся в нуль вне $\dot{C}_+^a$ и такая, что

$$W(z) = \int_{\dot{C}_+^a} g(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad z \in \dot{C}_+^a.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \overline{W(z)} &= \overline{\int_{\dot{C}_+^a} g(\xi) e^{iz\xi} d\xi} = \int_{\dot{C}_-^a} \overline{g(-\xi)} e^{i(\bar{z}_1 \xi_1 + \dots + \bar{z}_m \xi_m)} d\xi \\ &\stackrel{\text{обозн}}{=} G(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m), \quad z = (z_1, \dots, z_m) \in T(\dot{C}_+^a). \end{aligned}$$

Тогда, очевидно, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) \in T(\dot{C}_-^a)$ и поскольку для функции $G(z)$, $z \in T(\dot{C}_-^a)$, имеется спектральная функция $\overline{g(-\xi)}$, обращающаяся в нуль вне $\dot{C}_-^a$, то по той же теореме 2 из [6, с. 280] $G(z) \in H_0(\dot{C}_-^a)$.

Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \xi_m^2 + |\xi'|^2 + k^2 &= (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2(\xi_m + i0)^2 - |\xi'|^2 - k^2}) \\ &\times (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2(\xi_m - i0)^2 - |\xi'|^2 - k^2}), \end{aligned}$$

где каждый из сомножителей допускает аналитическое продолжение в $T(\overset{*}{C}_+^a)$, $T(\overset{*}{C}_-^a)$ класса $H_0(\overset{*}{C}_+^a)$, $H_0(\overset{*}{C}_-^a)$ соответственно.

С учетом связи между граничными значениями из $T(\overset{*}{C}_+^a)$ и $T(\overset{*}{C}_-^a)$ формула (3) (а вместе с ней и лемма 1) доказана.

Можно обобщить формулу (3), рассмотрев “степени” оператора Гельмгольца, т. е. операторы с символами

$$(\xi_m^2 + |\xi'|^2 + k^2)^{\alpha+i\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

В этом случае w -факторизация будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} (\xi_m^2 + |\xi'|^2 + k^2)^{\alpha+i\beta} &= (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2 - k^2})^{\alpha+i\beta} \\ &\times (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2 - k^2})^{\alpha+i\beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналитичность сомножителей в $T(\overset{*}{C}_+^a)$, $T(\overset{*}{C}_-^a)$ следует из того, что функция $\sqrt{a^2 + 1}z_m + W(z)$ не имеет нулей в $T(\overset{*}{C}_+^a)$, так как при $z \in T(\overset{*}{C}_+^a)$ имеем $\text{Im } z_m > 0$, $\text{Im } W(z) > 0$ и область значений этой функции односвязна.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если рассмотреть однородные символы класса C_α^∞ (α в данном случае – порядок однородности) и в определении w -факторизации в условии 2) потребовать однородности степени $\varkappa$ у $A_\neq$ и степени $\alpha - \varkappa$ у A_+ , то можно говорить об однородной w -факторизации.

ПРИМЕР. В формуле (5) положим $k = 0$ и получим однородную w -факторизацию $|\xi|^{\alpha+i\beta}$:

$$\begin{aligned} |\xi|^{\alpha+i\beta} &= (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2})^{(\alpha+i\beta)/2} \\ &\times (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2})^{(\alpha+i\beta)/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Наконец, если в формуле (6) положить $a \equiv 0$ (в этом случае конусы $\overset{*}{C}_\pm^a$ “вырождаются” в полупространства $\mathbb{R}_\pm^m = \{\xi \in \mathbb{R}^m : \pm\xi_m > 0\}$), получится однородная факторизация по переменной ξ_m в смысле определения 2:

$$|\xi|^{\alpha+i\beta} = (\xi_m + i|\xi'|)^{(\alpha+i\beta)/2} (\xi_m - i|\xi'|)^{(\alpha+i\beta)/2},$$

хорошо известная в теории Вишика–Эскина [2, с. 67].

3. Пусть теперь $\sigma(\xi)$ – эллиптический символ класса C^∞ при $\xi \neq 0$ и однородный степени α . По теореме 1 он допускает однородную факторизацию по переменной ξ_m :

$$\sigma(\xi', \xi_m) = \sigma_+(\xi', \xi_m)\sigma_-(\xi', \xi_m).$$

Зафиксируем $\xi' = (a_1, \dots, a_{m-1}) \equiv a'$ и рассмотрим

$$\sigma_+(a', \xi_m)\sigma_-(a', \xi_m). \quad (7)$$

В выражении (7) сделаем замену переменной $\xi_m \mapsto \sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2}$ для первого сомножителя и $\xi_m \mapsto \sqrt{a^2 + 1}\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2}$ для второго сомножителя, приводя, таким образом, (7) к виду

$$\sigma_+(a', \sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2})\sigma_-(a', \sqrt{a^2 + 1}\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2}). \quad (8)$$

Выражение (8) корректно, так как несмотря на то, что функции $\sqrt{a^2 + 1}\xi_m \pm \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2}$ принимают комплексные значения, эти значения расположены в верхней и нижней полуплоскостях, т. е. там, куда аналитически продолжаются (и, следовательно, где определены) функции σ_+ , σ_- .

Обозначим через

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(a', \xi) \\ = \sigma_+(a', \sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2})\sigma_-(a', \sqrt{a^2 + 1}\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2}) \end{aligned} \quad (9)$$

символ, зависящий от $(m-1)$ -мерного параметра a' . Формула (9) представляет собой w -факторизацию символа $\tilde{\sigma}(a', \xi)$. Действительно, аналитичность функций

$$\sigma_+(a', \sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2}), \quad \sigma_-(a', \sqrt{a^2 + 1}\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2})$$

в $T(\dot{C}_+^a), T(\dot{C}_-^a)$ соответственно следует из того, что композиция аналитических функций является аналитической функцией, из аналитичности функций σ_+, σ_- в $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ (где $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ – верхняя и нижняя комплексные полуплоскости) и из того, что функции (которые определены на разных множествах; см. доказательство леммы 1)

$$\sqrt{a^2 + 1}z_m + \sqrt{a^2z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2}, \quad \sqrt{a^2 + 1}z_m + \sqrt{a^2z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2}$$

аналитичны как отображения $T(\dot{C}_\pm^a) \rightarrow \mathbb{C}_\pm$ соответственно.

Наконец, оценки, выполнения которых требует условие 2) определения 1, вытекают из однородности и непрерывности σ_+, σ_- при любом $a' \neq 0$. Правда, получаемый при этой операции символ $\tilde{\sigma}(a', \xi)$ не принадлежит, вообще говоря, классу C_α^∞ , однако он удовлетворяет неравенству (1_α) , и, следовательно, псевдодифференциальный оператор с таким символом ограничено действует из пространства $H_s(\mathbb{R}^m)$ в пространство $H_{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$ (см. [2, лемма 4.4, с. 45]).

4. В пп. 4, 5 мы рассмотрим специальные типы символов – символы многомерных сингулярных интегральных операторов, при изучении которых также было использовано понятие w -факторизации [7].

Пусть $A(\xi)$ – однородный степени 0 эллиптический символ класса $C^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ (и, таким образом, удовлетворяющий условию (1₀)). При фиксированном ξ' его можно представить в виде сходящегося ряда

$$A(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\xi_m - i|\xi'|)^k (\xi_m + i|\xi'|)^{-k},$$

так как система функций $\{(\xi_m - i|\xi'|)^k (\xi_m + i|\xi'|)^{-k}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Предположим, что $A(\xi)$ допускает факторизацию по переменной ξ_m (в смысле определения 2):

$$A(\xi) = A_+(\xi)A_-(\xi),$$

в классе сходящихся рядов

$$A_+(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\xi_m - i|\xi'|)^k (\xi_m + i|\xi'|)^{-k}, \quad (10)$$

$$A_-(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{-1} b_k (\xi_m - i|\xi'|)^k (\xi_m + i|\xi'|)^{-k}. \quad (11)$$

Очевидно, что $A(\xi)$, $A_+(\xi)$, $A_-(\xi)$ – однородные степени 0 функции и, стало быть, индекс факторизации по переменной ξ_m равен 0. Наше предположение равносильно тому, что $A(0, \dots, 0, +1) = A(0, \dots, 0, -1)$ и приращение аргумента функции $A(\xi)$ вдоль какой-нибудь большой полуокружности единичной сферы S^{m-1} , соединяющей точки $(0, \dots, 0, -1)$ и $(0, \dots, 0, +1)$ (в случае $m = 2$ правой и левой полуокружностей), равно нулю. Действительно, в этом случае по теореме 1 факторизация по ξ_m существует, и A_+ , A_- как непрерывные функции разлагаются (при фиксированной ξ') в сходящиеся ряды Фурье по положительным и отрицательным степеням $(\xi_m - i|\xi'|)^k (\xi_m + i|\xi'|)^{-k}$ соответственно.

Перемножая (10) и (11), получим совокупность соотношений

$$\begin{aligned} c_0 &= a_1 b_{-1} + a_2 b_{-2} + \dots + a_n b_{-n} + \dots, \\ c_1 &= a_2 b_{-1} + a_3 b_{-2} + \dots + a_n b_{-(n-1)} + \dots, \\ c_{-1} &= a_1 b_{-2} + a_2 b_{-3} + \dots + a_n b_{-(n+1)} + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (12)$$

причем каждый числовой ряд бесконечной системы (12) является сходящимся.

Рассмотрим теперь совокупность $\mathcal{A}$ однородных степени 0 функций, представимых сходящимися рядами

$$\overset{\Pi}{A}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2})^k (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2})^{-k}.$$

Обозначим

$$A_{\neq}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2})^k (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2})^{-k}, \quad (13)$$

$$A_{=}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{-1} b_k (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2})^k (\sqrt{a^2 + 1}\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2})^{-k}. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\overset{\square}{A}(\xi) \in \mathcal{A}$. Если существует последовательности чисел $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=-\infty}^{-1}$ такие, что сходятся ряды (13) и (14) и выполняются соотношения (12), то $\overset{\square}{A}(\xi)$ допускает однородную w -факторизацию с индексом, равным нулю.

Казалось бы, теорему 2 применить практически невозможно, однако в случае конечных сумм это сделать относительно просто.

ПРИМЕР. Пусть $a \equiv 1$,

$$\overset{\square}{A}(\xi) = 3l^{-1}(\xi) + 7 + 2l(\xi),$$

где $l(\xi) = (\sqrt{2}\xi_m - \sqrt{\xi_m^2 - |\xi'|^2})(\sqrt{2}\xi_m + \sqrt{\xi_m^2 - |\xi'|^2})^{-1}$.

Символ $\overset{\square}{A}(\xi)$ эллиптический, так как $\overset{\square}{A}(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \neq 0$. Действительно, $\overset{\square}{A}(\xi) = 0$, только если $l(\xi) = -3, -1/2$, однако функция $l(\xi)$ не принимает этих значений. Проверим это, например, для -3 . Если $l(\xi) = -3$, то

$$\sqrt{2}\xi_m - \sqrt{\xi_m^2 - |\xi'|^2} = -3\sqrt{2}\xi_m - 3\sqrt{\xi_m^2 - |\xi'|^2}, \quad 28\xi_m^2 + 4|\xi'|^2 = 0.$$

Последнее возможно лишь тогда, когда $\xi_m = 0, |\xi'| = 0$, т.е. $\xi = 0$.

Аналогично проверяется значение $-1/2$.

Ищем $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ в виде

$$A_{\neq}(\xi) = a_0 + a_1 l(\xi), \quad A_{=}(\xi) = b_0 + b_{-1} l^{-1}(\xi).$$

Условия (12) дают систему

$$\begin{cases} a_0 b_0 + a_1 b_{-1} = 7, \\ a_1 b_0 = 2, \\ a_0 b_{-1} = 3, \end{cases}$$

откуда получаем $b_0 = 2a_1^{-1}, b_{-1} = 3a_0^{-1}$.

Подставляя это в первое уравнение, имеем

$$2a_0 a_1^{-1} + 3a_1 a_0^{-1} = 7.$$

Обозначая $a_0 a_1^{-1} = k$, получаем уравнение

$$2k + 3k^{-1} = 7,$$

которое имеет два корня $k_1 = 1/2, k_2 = 3$, в результате чего появляются два варианта w -факторизации

$$\overset{\square}{A}(\xi) = (1 + 2l(\xi))(1 + 3l^{-1}(\xi)), \quad \overset{\square}{A}(\xi) = (3 + l(\xi))(2 + l^{-1}(\xi))$$

(стоит обратить внимание, что w -факторизация получается с точностью до произвольной постоянной), однако первый вариант не подходит, потому что функция $1 + 2l(\xi)$ имеет нули в $T(\overset{\star}{C}_+^1)$, а функция $1 + 3l^{-1}(\xi)$ – в $T(\overset{\star}{C}_-^1)$. Рассмотрим, например, уравнение

$$1 + 2l(z) = 0, \quad z \in T(\overset{\star}{C}_+^1)$$

(в случае $a = 1, C_+^1 = C_+^1$). Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 2l(z) = 1 + 2 \frac{\sqrt{2}z_m - \sqrt{z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2}}{\sqrt{2}z_m + \sqrt{z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}z_m - \sqrt{z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2}}{\sqrt{2}z_m + \sqrt{z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}z_m - \operatorname{Re} \sqrt{z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2} - i \operatorname{Im} \sqrt{z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2}}{\sqrt{2}z_m + \sqrt{z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2}}. \end{aligned}$$

Поскольку знаменатель последней дроби не имеет нулей в $T(C_+^1)$, ищем точки из $T(C_+^1)$, в которых

$$3\sqrt{2}z_m - \operatorname{Re} \sqrt{z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2} - i \operatorname{Im} \sqrt{z_m^2 - z_1^2 - \dots - z_{m-1}^2} = 0. \quad (15)$$

Положим $x_m = y_1 = \dots = y_{m-1} = 0$. Уравнение (15) примет вид

$$3\sqrt{2}iy_m - \operatorname{Re} \sqrt{-y_m^2 - x_1^2 - \dots - x_{m-1}^2} - i \operatorname{Im} \sqrt{-y_m^2 - x_1^2 - \dots - x_{m-1}^2} = 0. \quad (16)$$

Из (16) следует, что $3\sqrt{2}iy_m - i \sqrt{y_m^2 + x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2} = 0$, откуда получаем

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{17}} |x'|, \quad y_m > 0. \quad (17)$$

Таким образом, мы показали, что точки $z = (z_1, \dots, z_m)$, координаты которых удовлетворяют условию (17) (они, очевидно, принадлежат $T(C_+^1)$), являются решениями уравнения $1 + 2l(z) = 0$. Конечно, аналогично можно рассмотреть и более сложные примеры w -факторизаций функций вида

$$\overset{\square}{A}(\xi) = \sum_{k=-n}^n c_k l^k(\xi).$$

5. В этом пункте опять $A(\xi)$ – однородный степени 0 эллиптический символ класса $C^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$. Обозначим через F преобразование Фурье в смысле обобщенных функций [2], $\operatorname{supp} A(\xi)$ – носитель (обобщенный) функции $A(\xi)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\operatorname{supp} F^{-1}(\ln A(\xi)) \subset C_+^a \cup C_-^a$. Тогда $A(\xi)$ допускает однородную w -факторизацию с нулевым индексом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$K(x) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1}(\ln A(\xi)).$$

Хорошо известно, что $K(x)$ представляет собой сингулярное ядро Михлина–Кальдерона–Зигмунда класса $C^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ [8] – функцию, однородную степени $-m$. Запишем

$$K = \chi_+ K + \chi_- K, \quad (18)$$

где $\chi_\pm$ – характеристическая функция множества $C_\pm^a$.

$\chi_+ K$ можно рассматривать как обобщенную функцию медленного роста с носителем в C_+^a . Тогда ее преобразование Фурье–Лапласа принадлежит классу $H(\overset{*}{C}_+^a)$ функций f , аналитических в $\overset{*}{C}_+^a$ и допускающих оценку (см. [6, с. 280, теорема 2])

$$|f(z)| \leq M(C')(1 + |z|)^\beta (1 + |y|)^{-\alpha}, \quad z \in T(C'),$$

при некоторых $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, не зависящих от C' ; C' – подконус, компактный в $\overset{*}{C}_+^a$, $M(C')$ – постоянная, зависящая лишь от подконуса C' [6].

Убедимся теперь в том, что граничные значения преобразования Фурье–Лапласа функции $\chi_+ K$ ограничены. Действительно, эти граничные значения совпадают с преобразованием Фурье в смысле распределений функции $\chi_+ K$ (обобщенная функция в. р. $K(x)$ корректно определена, например, в [9]), что равносильно преобразованию Фурье в смысле главного значения [8]. Хорошо известно, что оператор Михлина–Кальдерона–Зигмунда с ядром $\chi_+ K$ будет ограниченным оператором, действующим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$ [8], и, следовательно, его символ – преобразование Фурье в смысле главного значения ядра – обязан быть ограниченным, так как оператор Михлина–Кальдерона–Зигмунда с ядром $\chi_+ K$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$ унитарно эквивалентен оператору умножения на символ.

Теперь ограниченность преобразования Фурье–Лапласа функции $\chi_+ K$ следует из ограниченности его граничных значений (см. [10, теорема на с. 179]). Очевидно, аналогичное утверждение справедливо в отношении функции $\chi_- K$.

Вернемся к равенству (18). Так как $\text{supp } K \subset C_+^a \cup C_-^a$, то представление K в виде (18) правомерно и, более того, однозначно (исключая тривиальный случай $K(x) = c\delta(x)$, при котором $A(\xi) = \text{const}$). Переходя в (18) к преобразованию Фурье и потенцируя, получим $A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi)$, где $A_{\neq}(\xi) = \exp F(\chi_+ K)$, $A_{=}(\xi) = \exp F(\chi_- K)$, и $A_{\neq}$, $A_{=}$ обладают всеми свойствами, наличия которых требует определение 1.

6. В этом пункте выясним вопрос о единственности w -факторизации.

ТЕОРЕМА 4. Если эллиптический символ $A(\xi)$ допускает w -факторизацию относительно конуса C_+^a , то она единственна с точностью до мультипликативной постоянной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеется w -факторизация $A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi)$ с индексом κ и еще одна w -факторизация $A(\xi) = B_{\neq}(\xi)B_{=}(\xi)$ с индексом γ . Запишем $A_{\neq}(\xi) \times B_{\neq}^{-1}(\xi) = A_{=}^{-1}(\xi)B_{=}(\xi)$. Тогда $A_{\neq}(z)B_{\neq}^{-1}(z)$ аналитична в $T(\overset{*}{C}_+^a)$ с оценкой

$$|A_{\neq}(z)B_{\neq}^{-1}(z)| \leq c(1 + |z|)^{\kappa - \gamma},$$

а $A_{\pm}^{-1}(z)B_{\pm}(z)$ аналитична в $T(\dot{C}_{\pm}^a)$ с оценкой

$$|A_{\pm}^{-1}(z)B_{\pm}(z)| \leq c(1 + |z|)^{\varkappa - \alpha + \alpha - \gamma} = c(1 + |z|)^{\varkappa - \gamma},$$

т. е. $A_{\neq} B_{\neq}^{-1} \in H(\dot{C}_{+}^a)$, $A_{\pm}^{-1} B_{\pm} \in H(\dot{C}_{\pm}^a)$.

Тогда по теореме из [6, с. 290] функция

$$f(z) = \begin{cases} A_{\neq}(z)B_{\neq}^{-1}(z), & z \in T(\dot{C}_{+}^a), \\ A_{\pm}^{-1}(z)B_{\pm}(z), & z \in T(\dot{C}_{\pm}^a), \end{cases}$$

принадлежит классу $H(C)$, где C – выпуклая оболочка $\dot{C}_{+}^a \cup \dot{C}_{\pm}^a$, которая, очевидно, совпадает с $\mathbb{R}^m$. Более того, эта функция $f(z)$ имеет степенной порядок на бесконечности и не имеет нулей в $T(\dot{C}_{+}^a) \cup T(\dot{C}_{\pm}^a)$. По теореме Лиувилля [6] $f(z)$ должна быть полиномом, однако любой полином будет иметь нули либо в $\mathbb{R}^m$, либо в $T(\dot{C}_{+}^a) \cup T(\dot{C}_{\pm}^a)$. Остается единственная возможность $f(z) = \text{const}$ и, следовательно,

$$A_{\neq}(\xi) = cB_{\neq}(\xi), \quad A_{\pm}(\xi) = c^{-1}B_{\pm}(\xi).$$

Понятно, что если задать “условие нормировки” типа (2), то w -факторизация символа $A(\xi)$ будет единственной.

7. В этом пункте мы покажем, как w -факторизация может быть применена к изучению псевдодифференциальных уравнений в конусе. Всюду ниже $m = 2$.

Рассмотрим псевдодифференциальное уравнение в C_{+}^a вида

$$PAu_{+} = f, \tag{19}$$

где $u_{+} \in H_s(C_{+}^a)$, т. е. $u_{+} \in H_s(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } u_{+} \subset \overline{C}_{+}^a$, f задана в C_{+}^a , P – оператор сужения на C_{+}^a , т. е.

$$(Pu)(x) = u(x), \quad x \in C_{+}^a, \quad (Pu)(x) = 0, \quad x \notin \overline{C}_{+}^a,$$

A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi) \in C_{\alpha}^{\infty}$.

Пусть $S(\mathbb{R}^2)$ – класс Шварца бесконечно дифференцируемых функций на плоскости $\mathbb{R}^2$, убывающих при $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|x|$ вместе со всеми своими производными. Для $f \in S(\mathbb{R}^2)$ определим оператор G_2 :

$$(G_2 f)(\xi) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2}{(\xi_1 - \eta_1)^2 - a^2(\xi_2 - \eta_2 + i\tau)^2}.$$

Обозначим через F оператор преобразования Фурье:

$$(Ff)(\xi_1, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \equiv \tilde{f}(\xi).$$

Обозначим через $\tilde{H}_s(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{H}_s(C_{+}^a)$, $\tilde{H}_s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C}_{+}^a)$ Фурье-образы пространств $H_s(\mathbb{R}^2)$, $H_s(C_{+}^a)$, $H_s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C}_{+}^a)$ соответственно.

Напомним, что пространство $H_s(\mathbb{R}^2)$, $s \in \mathbb{R}$, состоит [2] из обобщенных функций u , преобразование Фурье которых является локально интегрируемой по Лебегу функцией $\tilde{u}(\xi)$ такой, что

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi < +\infty.$$

Псевдодифференциальный оператор A с символом $A(\xi)$ (вообще говоря, это распределение из $S'(\mathbb{R}^2)$) на функциях $u \in S(\mathbb{R}^2)$ определяется формулой

$$(Au)(x) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1}(A(\xi) \cdot \tilde{u}(\xi)), \quad u \in S(\mathbb{R}^2),$$

где F^{-1} понимается в смысле распределений.

Напомним также [2], что $S(\mathbb{R}^2)$ плотно в $H_s(\mathbb{R}^2) \quad \forall s \in \mathbb{R}$ и что псевдодифференциальный оператор A с символом $A(\xi) \in C_\alpha^\infty$ – ограниченный оператор, действующий из пространства $H_s(\mathbb{R}^2)$ в пространство $H_{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $|s| < 1/2$. Тогда оператор G_2 – ограниченный проектор пространства $\tilde{H}_s(\mathbb{R}^2)$ на подпространство $\tilde{H}_s(C_+^a)$, и любая функция $\tilde{f} \in \tilde{H}_s(\mathbb{R}^2)$ однозначно представима в виде

$$\tilde{f} = \tilde{f}_+ + \tilde{f}_-,$$

где $\tilde{f}_+ \in \tilde{H}_s(C_+^a)$, $\tilde{f}_- \in \tilde{H}_s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$, причем $\tilde{f}_+ = G_2 \tilde{f}$, $\tilde{f}_- = (I - G_2) \tilde{f}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность оператора G_2 в пространстве $\tilde{H}_s(\mathbb{R}^2)$, очевидно, эквивалентна ограниченности оператора

$$(G_2^0 f)(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(y)(1 + |y|)^s dy}{(1 + |x|)^s ((x_1 - y_1)^2 - a^2(x_2 - y_2 + i\tau)^2)}$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ квадратично интегрируемых функций. Оператор G_2 можно записать в виде

$$(G_2 f)(x) = \frac{1}{2a} \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t_1, t_2) dt_1 dt_2}{(x_1 - t_1 - ai\tau)(x_2 - t_2 + ai\tau)},$$

сделав замену переменных

$$\xi_1 - a\xi_2 = x_1, \quad \xi_1 + a\xi_2 = x_2, \quad \eta_1 - a\eta_2 = t_1, \quad \eta_1 + a\eta_2 = t_2.$$

Далее, воспользовавшись формулами Сохоцкого [11], получаем представление

$$(G_2 f)(x) = \frac{\pi^2}{2a} f(x) + \frac{\pi i}{2a} (S_1 f)(x) - \frac{\pi i}{2a} (S_2 f)(x) + \frac{1}{2a} (S_{12} f)(x),$$

где $S_{12} = S_1 S_2$,

$$(S_1 f)(x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y_1, x_2) dy_1}{y_1 - x_1}, \quad (S_2 f)(x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_1, y_2) dy_2}{y_2 - x_2}.$$

Отметим, что $1 + |\xi| \sim 1 + |x|$, $1 + |\eta| \sim 1 + |y|$, т.е. отношение рассматриваемых величин ограничено сверху и снизу положительными постоянными. Наконец, воспользуемся

ограниченностью операторов S_1, S_2 в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ с весом $(1 + |x|)^s$ (см. [2, лемма 5.3]). Таким образом, G_2 – ограниченный оператор в пространстве $\tilde{H}_s(\mathbb{R}^2)$.

Обозначим через θ оператор умножения на характеристическую функцию множества C_+^a . Тот факт, что G_2 – проектор на подпространство $\tilde{H}_s(C_+^a)$, следует из свойства преобразования Фурье

$$F(\theta \cdot u) = 2aG_2Fu, \quad u \in S(\mathbb{R}^2). \quad (20)$$

Действительно, рассмотрим интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\xi} \chi_+(x) u(x) e^{-x_2\tau} dx, \quad (21)$$

где $\chi_+(x)$ – характеристическая функция конуса C_+^a . Так как функции $\chi_+(x)e^{-x_2\tau}$ и $u(x)$ абсолютно интегрируемы, к (21) применима теорема о свертке. Найдем преобразование Фурье функции $\chi_+(x)e^{-x_2\tau}$. Пусть $\tau > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\xi} \chi_+(x) e^{-x_2\tau} dx &= \int_{C_+^a} e^{ix_1\xi_1} e^{ix_2(\xi_2+i\tau)} dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{a|x_1|}^{+\infty} e^{ix_2(\xi_2+i\tau)} dx_2 \right) e^{ix_1\xi_1} dx_1 \\ &= -\frac{1}{i(\xi_2+i\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia|x_1|(\xi_2+i\tau)} e^{ix_1\xi_1} dx_1 = \frac{2a}{\xi_1^2 - a^2(\xi_2+i\tau)^2}. \end{aligned}$$

Применение теоремы о свертке к интегралу (21) с последующим предельным переходом при $\tau \rightarrow 0$ дает формулу (20).

Ясно, что если G_2 – проектор на подпространство $\tilde{H}_s(C_+^a)$, то $I - G_2$ – проектор на подпространство $\tilde{H}_s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$.

В силу ограниченности оператора G_2 в $\tilde{H}_s(\mathbb{R}^2)$

$$\tilde{f} = G_2\tilde{f} + (I - G_2)\tilde{f} \equiv \tilde{f}_+ + \tilde{f}_-, \quad (22)$$

причем $G_2\tilde{f} \in \tilde{H}_s(C_+^a)$, $(I - G_2)\tilde{f} \in \tilde{H}_s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$.

Убедимся в единственности представления (22). Для этого достаточно показать, что равенство

$$\tilde{f}_+ + \tilde{f}_- = 0, \quad (23)$$

где $\tilde{f}_+ \in \tilde{H}_s(C_+^a)$, $\tilde{f}_- \in \tilde{H}_s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$, возможно только в том случае, когда $\tilde{f}_+ = \tilde{f}_- = 0$.

С учетом свойств оператора G_2 имеем

$$G_2\tilde{f}_+ = \tilde{f}_+, \quad G_2\tilde{f}_- = 0 \quad \text{и} \quad (I - G_2)\tilde{f}_+ = 0, \quad (I - G_2)\tilde{f}_- = \tilde{f}_-.$$

Действуя на обе части равенства (23) операторами G_2 и $I - G_2$, получаем $\tilde{f}_+ = 0$, $\tilde{f}_- = 0$.

Вернемся к уравнению (19). Правую часть f будем рассматривать в пространстве $H'_{s-\alpha}(C_+^a)$ обобщенных функций $S'(C_+^a)$ с носителем в $\overline{C_+^a}$, допускающих продолжение lf на $\mathbb{R}^2$, принадлежащее $H_{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Норму в $H'_{s-\alpha}(C_+^a)$ зададим равенством [2]

$$\|f\|_{s-\alpha}^+ = \inf \|lf\|_{s-\alpha},$$

где нижняя грань берется по всем продолжениям f , принадлежащим $H_{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть символ $A(\xi) \in C_\alpha^\infty$ оператора A допускает w -факторизацию относительно конуса C_+^a с индексом κ . Если $|\kappa - s| < 1/2$, то уравнение (19) для любой правой части $f \in H'_{s-\alpha}(C_+^a)$ имеет единственное решение $u_+ \in H_s(C_+^a)$, преобразование Фурье которого записывается в виде

$$\tilde{u}_+ = A_{\neq}^{-1} G_2 A_{\neq}^{-1} \tilde{f},$$

где lf – произвольное продолжение f в $H_{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$.

Имеет место априорная оценка

$$\|u_+\|_s \leq c \|f\|_{s-\alpha}^+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть lf – произвольное продолжение $f \in H'_{s-\alpha}(C_+^a)$ на $H_{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Обозначим

$$u_- = lf - Au_+. \quad (24)$$

Применяя к (24) преобразование Фурье с учетом w -факторизации, получим

$$A_{\neq}(\xi) \tilde{u}_+(\xi) + A_{\neq}^{-1}(\xi) \tilde{u}_-(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi) \tilde{f}(\xi). \quad (25)$$

Так как символы $A_{\neq}^{\pm 1}(\xi)$, $A_{\neq}^{\pm 1}(\xi)$ удовлетворяют оценкам

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{\pm \kappa}, \quad |A_{\neq}^{\pm 1}(\xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{\pm \alpha \mp \kappa},$$

то псевдодифференциальные операторы $A_{\neq}$, $A_{\neq}^{-1}$ ограничено действуют: $A_{\neq}: H_s(C_+^a) \rightarrow H_{s-\kappa}(\mathbb{R}^2)$, $A_{\neq}^{-1}: H_{s-\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}) \rightarrow H_{s-\kappa}(\mathbb{R}^2)$ (см. [2, лемма 4.4]) и, следовательно, $A_{\neq}(\xi) \tilde{u}_+(\xi)$, $A_{\neq}^{-1}(\xi) \tilde{u}_-(\xi)$, $A_{\neq}^{-1}(\xi) \tilde{f}(\xi)$ принадлежат пространству $\tilde{H}_{s-\kappa}(\mathbb{R}^2)$. Отметим, что $u_- \in H_{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$, так как оператор A ограничено действует из пространства $H_s(\mathbb{R}^2)$ в $H_{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$, поскольку $A(\xi) \in C_\alpha^\infty$.

Покажем, что $A_{\neq}(\xi) \tilde{u}_+(\xi) \in \tilde{H}_{s-\kappa}(C_+^a)$, $A_{\neq}^{-1}(\xi) \tilde{u}_-(\xi) \in \tilde{H}_{s-\kappa}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$.

Из оценок $A_{\neq}^{\pm 1}(\xi + i\tau)$, $A_{\neq}^{\pm 1}(\xi - i\tau)$ при $\tau \in \dot{C}_+^a$ вытекает, что они входят в $H_0(\dot{C}_+^a)$ соответственно, и, следовательно, их спектральные функции $\omega_{\neq}^{\pm 1}(x)$, $\omega_{\neq}^{\pm 1}(x)$ (преобразование Фурье–Лапласа $A_{\neq}^{\pm 1}(\xi + i\tau)$, $A_{\neq}^{\pm 1}(\xi - i\tau)$ в смысле распределений) существуют и имеют носители в $C_{\pm}^a$ [6].

Возьмем аппроксимацию функций u_+ и u_- функциями $u_+^{(\varepsilon)}$, $u_-^{(\varepsilon)}$, бесконечно дифференцируемыми и финитными в $\overline{C_+^a}$ и $\mathbb{R}^2 \setminus C_+^a$ соответственно (плотность таких функций в шкале пространств $H_s(C_+^a)$ и $H_s(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$ можно доказать методами работы [2] путем незначительных технических усложнений). Тогда определены свертки $\omega_+ * u_+^{(\varepsilon)}$, $\omega_-^{-1} * u_-^{(\varepsilon)}$ обобщенных и основных функций $(\omega_+(y), u_+^{(\varepsilon)}(x - y))$, $(\omega_-^{-1}(y), u_-^{(\varepsilon)}(x - y))$, где $u_{\pm}^{(\varepsilon)}(x - y)$ рассматривается как функция y (x фиксировано), т.е. функционал действует по переменной y .

Теперь несложные операции с носителями этих свертки убеждают нас в том, что

$$\text{supp}(\omega_+ * u_+^{(\varepsilon)}) \subset \overline{C_+^a}, \quad \text{supp}(\omega_-^{-1} * u_-^{(\varepsilon)}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus C_+^a.$$

Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ показывает, что

$$\text{supp}(A_{\neq} u_+)(x) \subset \partial \overline{C_+^a}, \quad \text{supp}(A_{\neq}^{-1} u_-)(x) \subset \mathbb{R}^2 \setminus C_+^a,$$

а применение преобразования Фурье уже дает

$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}_+(\xi) \in \tilde{H}_{s-\kappa}(C_+^a), \quad A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{u}_-(\xi) \in \tilde{H}_{s-\kappa}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}).$$

Из (25) по теореме 5 (так как $|s - \kappa| < 1/2$) имеем $A_{\neq}(\xi)\tilde{u}_+(\xi) = G_2 A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{l}f(\xi)$ и, следовательно, $\tilde{u}_+(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)G_2 A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{l}f(\xi)$, причем найденное решение единственно. Априорная оценка получается ввиду ограниченности операторов $A_{\neq}^{-1}$, G_2 , $A_{=}^{-1}$ в соответствующих пространствах:

$$\begin{aligned} \|u_+\|_s &= \|\tilde{u}_+\|_s \leq c \|G_2 A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{l}f(\xi)\|_{s-\kappa} \\ &\leq c \|A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{l}f(\xi)\|_{s-\kappa} \leq c \|\tilde{l}f\|_{s-\alpha} = c \|lf\|_{s-\alpha} \leq c \|f\|_{s-\alpha}^+. \end{aligned}$$

Стоит отметить, что решение уравнения (19) не зависит от выбора продолжения lf — следствие аналитичности символов $A_{\neq}$, $A_{=}$ и проекционных свойств оператора G_2 .

8. Подобная факторизация уже встречалась в работе [12] при решении некоторой многомерной задачи линейного сопряжения, обобщающей известную краевую задачу Римана [11].

Выбор термина “волновая факторизация” обусловлен свойствами так называемых причинных функций и их связью с волновым уравнением [13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вишик М. И., Эскин Г. И. Уравнения в свертках в ограниченной области // УМН. 1965. Т. 20. № 3. С. 89–152.
- [2] Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [3] Boutet de Monvel L. Boundary problems for pseudo-differential equations // Acta Math. 1971. V. 126. № 1–2. P. 11–51.
- [4] Ремпель Ш., Шульце Б.-В. Теория индекса эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1986.
- [5] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38. № 2. С. 3–76.
- [6] Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
- [7] Васильев В. Б. Сингулярные интегралы на компактных многообразиях с особенностями // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 9. С. 1642–1643.
- [8] Mikhlin S. G., Prössdorf S. Singular Integral Operators. Berlin: Akademie-Verlag, 1986.
- [9] Мальгранж Б. Сингулярные интегральные операторы и единственность задачи Коши // Математика. Сб. переводов. 1962. Т. 6. № 5. С. 87–129.
- [10] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
- [11] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
- [12] Владимиров В. С. Задача линейного сопряжения для голоморфных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 4. С. 807–834.
- [13] Паламонов В. П. Обобщенные функции и гармонический анализ // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники. Т. 72. М.: ВИНТИ, 1991. С. 5–134.