Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, И. В. Третьякова, О постоянстве типа почти эрмитовых многообразий, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 668–676

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm988>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:38:38

УДК 517

О ПОСТОЯНСТВЕ ТИПА ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В. Ф. Кириченко, И. В. Третьякова

Введено наиболее естественное обобщение понятия постоянства типа, введенного А. Греем для приближенно келеровых многообразий, на произвольные почти эрмитовы многообразия. Доказано, что класс почти эрмитовых многообразий нулевого постоянного типа совпадает с классом эрмитовых многообразий. Доказано, что класс G_1 -многообразий ненулевого постоянного типа совпадает с классом шестимерных G_1 -многообразий с неинтегрируемой структурой. Наконец, доказано, что класс нормальных G_2 -многообразий ненулевого постоянного типа совпадает с классом четырехмерных G_2 -многообразий с неинтегрируемой структурой.

Библиография: 12 названий.

Понятие постоянства типа является одним из наиболее важных понятий эрмитовой геометрии. Это понятие было введено Альфредом Греем для приближенно келеровых многообразий. Оно позволило выделить ряд интересных свойств таких многообразий [1]. Позднее первым из авторов было получено исчерпывающее описание таких многообразий. Оказалось, что класс приближенно келеровых многообразий нулевого постоянного типа совпадает с классом келеровых многообразий, а класс приближенно келеровых многообразий ненулевого постоянного типа совпадает с классом шестимерных собственных (т.е. некелеровых) приближенно келеровых многообразий [2]. Впоследствии понятие постоянства типа было обобщено различными способами и на другие виды почти эрмитовых структур [3], [4]. В настоящей работе рассмотрено наиболее естественное, на наш взгляд, обобщение постоянства типа на произвольные почти эрмитовы многообразия, и получена исчерпывающая характеристика весьма широких классов почти эрмитовых многообразий постоянного типа.

Пусть M^n – n -мерное гладкое многообразие, $\mathbf{X}(M)$ – $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M , $\Lambda(M) = \bigoplus_{r=0}^n \Lambda_r(M)$ – алгебра Грассмана многообразия M , d – оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Напомним [5], [6], что *почти эрмитовой* (короче, *АН*-) структурой на многообразии M называется пара $\{g, J\}$, где $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика на M , J – почти комплексная структура, т.е. эндоморфизм касательного пучка многообразия M такой, что $J^2 = -\text{id}$. При этом должно выполняться тождество $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathbf{X}(M)$. Из этих условий следует, что тензор $\Omega(X, Y) = \langle X, JY \rangle$ кососимметричен; он называется *фундаментальной формой структуры*. Необходимыми условиями существования АН-структуры на многообразии является его четномерность и ориентируемость. В касательном пространстве в

каждой точке $2n$ -мерного почти эрмитова многообразия внутренним образом вводится структура n -мерного комплексного линейного пространства с эрмитовой метрикой $\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \langle X, Y \rangle + \sqrt{-1}\Omega(X, Y)$. Пусть ∇ – риманова связность метрики g . Напомним [7], что почти эрмитова структура $\{g, J\}$ называется:

- келеровой* ($\mathcal{K}$ -), если $\nabla J = 0$;
- приближенно келеровой* ($N\mathcal{K}$ -), если $\nabla_X(J)X = 0$;
- почти келеровой* (AK -), если $d\Omega = 0$;
- квазикелеровой* ($Q\mathcal{K}$ -), если $\nabla_X(J)Y + \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$;
- эрмитовой* ($\mathcal{H}$ -), если $\nabla_X(J)Y - \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$;
- G_1 -структурой, если $\nabla_X(J)X - \nabla_{JX}(J)JX = 0$;
- G_2 -структурой, если $\mathcal{Z}_{XYZ}\{\nabla_X(\Omega)(Y, Z) - \nabla_{JX}(\Omega)(JY, Z)\} = 0$,

где $\mathcal{Z}$ – оператор циклирования по соответствующим аргументам. В классификации Грея–Хервеллы эти классы обозначаются соответственно через $\mathcal{K}$, W_1 , W_2 , $W_1 \oplus W_2$, $W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$. Хорошо известно [7], что

$$N\mathcal{K} = G_1 \cap Q\mathcal{K}, \quad AK = G_2 \cap Q\mathcal{K}, \quad G_1 \cap G_2 = \mathcal{H}, \quad Q\mathcal{K} \cap \mathcal{H} = \mathcal{K}.$$

Пусть $\mathcal{S} = \{g = \langle \cdot, \cdot \rangle, J\}$ – почти эрмитова структура на многообразии M^{2n} , $p \in M$. Тогда в касательном пространстве $T_p(M)$ можно построить ортонормированный репер $(p, e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n)$. Такой репер будем называть *вещественно адаптированным репером*. С другой стороны, в комплексификации модуля $\mathbf{X}(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}J)$ и $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} + \sqrt{-1}J)$ на собственные подмодули эндоморфизма J , отвечающие собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ соответственно. Следовательно, можно построить репер $(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$ комплексификации пространства $T_p(M)$, где $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a)$, состоящий из собственных векторов оператора J_p . Такой репер называется *A-репером*. Легко видеть, что матрицы компонент тензоров J_p и g_p в A -репере имеют вид соответственно

$$(J_j^i) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где I_n – единичная матрица порядка n . Хорошо известно [8], [9], что совокупность таких реперов определяет G -структуру на M со структурной группой $U(n)$, представленной матрицами вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix},$$

где $A \in U(n)$. Эта G -структура называется *присоединенной*. На протяжении всей работы будем подразумевать, что индексы $i, j, k, \dots$ пробегают значения от 1 до $2n$, индексы $a, b, c, d, \dots$ – значения от 1 до n , и положим $\hat{a} = a + n$, $\hat{\hat{a}} = a$. Поскольку J и g – тензоры типов $(1, 1)$ и $(2, 0)$ соответственно, их компоненты на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} 1) \quad dJ_j^i + J_k^i \omega_j^k - J_j^k \omega_k^i &= J_{j,k}^i \omega^k, \\ 2) \quad dg_{ij} + g_{kj} \omega_i^k + g_{ik} \omega_j^k &= g_{ij,k} \omega^k, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\{\omega^i\}$, $\{\omega_j^i\}$ – компоненты форм смещения и римановой связности ∇ соответственно, $J_{j,k}^i$, $g_{ij,k}$ – компоненты ковариантного дифференциала тензоров J и g в этой связности соответственно. Более того, в силу определения римановой связности $\nabla g = 0$ и, значит,

$$g_{ij,k} = 0. \quad (3)$$

С учетом (1) и (3) соотношения (2) на пространстве присоединенной G -структуры переписываются в форме

$$\begin{aligned} 1) \quad J_{b,k}^a &= 0; \quad 2) \quad J_{\hat{b},k}^{\hat{a}} = 0; \quad 3) \quad \omega_b^a = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}J_{\hat{b},k}^a\omega^k; \\ 4) \quad \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} &= \frac{1}{2}\sqrt{-1}J_{b,k}^{\hat{a}}\omega^k; \quad 5) \quad \omega_j^i + \omega_{\hat{j}}^{\hat{i}} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, заметим, что в силу вещественности соответствующих форм и тензоров $\bar{\omega}^i \equiv \omega^{\hat{i}}$, $\bar{\omega}_{\hat{j}} = \omega_j^{\hat{i}}$, $\bar{\nabla} J_{j,k}^i = \nabla J_{\hat{j},\hat{k}}^{\hat{i}}$, где $t \rightarrow \bar{t}$ – оператор комплексного сопряжения. Несложно подсчитать, что почти эрмитова структура является квазикелеровой тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$J_{\hat{b},c}^a = 0. \quad (5)$$

Аналогично, она является G_1 -структурой тогда и только тогда, когда

$$J^{[ab,c]} = J^{ab,c}, \quad (6)$$

и является G_2 -структурой тогда и только тогда, когда

$$J^{[ab,c]} = 0. \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем по индексам, заключенным в квадратные (соответственно круглые) скобки подразумевается альтернирование (соответственно симметризация).

С учетом (4) нетрудно подсчитать, что первая группа структурных уравнений римановой связности

$$d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j \quad (8)$$

на пространстве присоединенной G -структуры $A\mathcal{H}$ -многообразия запишется в следующей форме, называемой *первой группой структурных уравнений $A\mathcal{H}$ -многообразия*:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_i &= g_{ij}\omega^j, \quad B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J_{\hat{b},c}^a, \quad B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}J_{[\hat{b},\hat{c}]}^a, \\ B_{ab}{}^c &= \frac{\sqrt{-1}}{2}J_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}, \quad B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}J_{[\hat{b},\hat{c}]}^{\hat{a}}. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{\omega}_b^a &= -\omega_a^{\hat{b}}; \quad 2) \quad \overline{B^{ab}{}_c} = B_{ab}{}^{\hat{c}}; \quad 3) \quad \overline{B^{abc}} = B_{abc}; \\ 4) \quad B_c^{(ab)} &= 0; \quad 5) \quad B^{a(bc)} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Более того, с учетом (4) и (10) нетрудно получить, что

$$J_{\hat{b},\hat{c}}^a = 4\sqrt{-1}\tilde{B}^{cab}, \quad (12)$$

где $\tilde{B}^{cab} = \frac{1}{2}(B^{cab} - B^{abc} - B^{bca})$. Согласно (5)–(7) справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Почти эрмитова структура принадлежит классу:*

$\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $B^{abc} = 0$,
 G_1 тогда и только тогда, когда $B^{[abc]} = B^{abc}$,
 G_2 тогда и только тогда, когда $B^{[abc]} = 0$,
 QK тогда и только тогда, когда $B^{ab}{}_c = 0$,
 NK тогда и только тогда, когда $B^{ab}{}_c = 0$, $B^{[abc]} = B^{abc}$,
 AK тогда и только тогда, когда $B^{ab}{}_c = 0$, $B^{[abc]} = 0$,
 K тогда и только тогда, когда $B^{ab}{}_c = 0$, $B^{abc} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, принадлежность структуры классу G_2 равносильна соотношению $B^{abc} = \tilde{B}^{abc}$.

Напомним [6], что *тензором* (или *оператором*) *Нейенгейса* почти комплексной структуры J называется тензор N типа $(2, 1)$, определяемый формулой

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}(-[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]), \quad X, Y \in \mathbf{X}(M).$$

Его обращение в нуль равносильно интегрируемости структуры [6]. Легко видеть, что этот оператор антисимметричен и комплексно антилинеен, т.е.

$$N(X, Y) = -N(Y, X), \quad N(JX, Y) = N(X, JY) = -JN(X, Y)$$

$(X, Y \in \mathbf{X}(M))$. Прямой подсчет с учетом тождества $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ показывает, что

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}(\nabla_{JX}(J)Y - J\nabla_X(J)Y - \nabla_{JY}(J)X + J\nabla_Y(J)X). \quad (13)$$

С учетом (10) получаем отсюда, что на пространстве присоединенной G -структуры компоненты тензора N определяются тождествами

$$N^a_{\hat{b}\hat{c}} = B^{abc}, \quad N^{\hat{a}}_{bc} = B_{abc}. \quad (14)$$

Остальные компоненты этого тензора нулевые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Почти эрмитово многообразие $(M, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ назовем *многообразием постоянного типа* c , если

$$\forall X, Y \in \mathbf{X}(M) \ \& \ \langle \langle X, Y \rangle \rangle = 0 \implies \|N(X, Y)\|^2 = c\|X\|^2\|Y\|^2. \quad (15)$$

Покажем, что в случае приближенно келерова многообразия это определение совпадает с классическим определением А. Грея [1]. Дифференцируя соотношение $J^2 = -\text{id}$, получим, что

$$J\nabla_X(J)Y + \nabla_X(J)(JY) = 0, \quad X, Y \in \mathbf{X}(M), \quad (16)$$

откуда в случае NK -многообразий

$$N(X, Y) = -J\nabla_X(J)Y.$$

Поэтому в случае $N\mathcal{K}$ -многообразий условие (15) примет вид

$$\forall X, Y \in \mathbf{X}(M) \text{ \& } \langle X, Y \rangle = \langle X, JY \rangle = 0 \implies \|\nabla_X(J)Y\|^2 = c\|X\|^2\|Y\|^2,$$

что совпадает с определением А. Грея.

Пусть $(M, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – произвольное $A\mathcal{H}$ -многообразие постоянного типа c . Инволюционно поляризуя [9] тождество (15), получим эквивалентное тождество

$$\langle\langle N(X, Y), N(Z, W) \rangle\rangle = c\{\langle\langle Z, X \rangle\rangle\langle\langle W, Y \rangle\rangle - \langle\langle Z, Y \rangle\rangle\langle\langle W, X \rangle\rangle\}.$$

Записывая это тождество на пространстве присоединенной G -структуры, с учетом (1) и (14) получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Почти эрмитово многообразие является многообразием постоянного типа c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры*

$$B^{hcd}B_{hab} = 2c\delta_{ab}^{cd},$$

где $\delta_{ab}^{cd} = \delta_a^c\delta_b^d - \delta_b^c\delta_a^d$ – кронекеровская дельта второго порядка.

В качестве немедленного следствия получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Класс почти эрмитовых многообразий нулевого постоянного типа совпадает с классом эрмитовых многообразий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 вытекает, что $A\mathcal{H}$ -многообразие M имеет нулевой постоянный тип тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры $B^{hcd}B_{hab} = 0$. Свертывая это соотношение по индексам a и c , b и d , получим с учетом (11)

$$0 = B^{hab}B_{hab} = \sum_{h,a,b} |B^{hab}|^2,$$

откуда следует, что $B^{abc} = 0$, а в силу предложения 1 M – эрмитово многообразие.

С учетом того же предложения 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Класс квазикелеровых многообразий нулевого постоянного типа совпадает с классом келеровых многообразий.*

Ввиду этих результатов далее ограничимся рассмотрением собственных $A\mathcal{H}$ -многообразий, т.е. $A\mathcal{H}$ -многообразий с неинтегрируемой почти комплексной структурой J . Точку p такого многообразия будем называть *неособой*, если тензор Нейенхейса в этой точке отличен от нуля. Очевидно, совокупность всех неособых точек образует открытое подмногообразие этого многообразия, которое мы будем называть *неособым*.

Напомним [8], [10], что с каждым почти эрмитовым многообразием внутренним образом связана комплексная Q -алгебра с бинарной операцией $X * Y = T(X, Y)$, $X, Y \in \mathbf{X}(M)$, антилинейной по каждому аргументу, которая однозначно определяется тождествами

$$1) \quad \langle\langle X * Y, Z \rangle\rangle + \overline{\langle\langle Y, X * Z \rangle\rangle} = 0, \quad 2) \quad X * Y - Y * X = N(X, Y). \quad (17)$$

Композиционный тензор T этой Q -алгебры определен тождеством

$$T(X, Y) = \frac{1}{4}(\nabla_{JX}(J)Y + \nabla_X(J)(JY)). \quad (18)$$

Согласно [8],[10] почти эрмитово многообразие является G_1 -многообразием тогда и только тогда, когда его присоединенная Q -алгебра является K -алгеброй, т.е. антикоммутативна, и является G_2 -многообразием тогда и только тогда, когда его присоединенная Q -алгебра является A -алгеброй, т.е. справедливо тождество

$$\langle\langle X * Y, Z \rangle\rangle + \langle\langle Y * Z, X \rangle\rangle + \langle\langle Z * X, Y \rangle\rangle = 0. \quad (19)$$

Пусть, в частности, M — G_1 -многообразие. Тогда его присоединенная Q -алгебра является K -алгеброй и в силу (17₂)

$$N(X, Y) = 2X * Y, \quad X, Y \in \mathbf{X}(M).$$

В силу (15) многообразие имеет постоянный тип c тогда и только тогда, когда

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = 0 \implies \|X * Y\|^2 = \frac{c}{4}\|X\|^2\|Y\|^2, \quad X, Y \in \mathbf{X}(M).$$

Следовательно, это K -алгебра постоянного типа $c/4$ (см. [11]). В силу теоремы 6 в [11] это равносильно трехмерности данной K -алгебры в каждой неособой точке многообразия, т.е. шестимерности многообразия. Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Класс собственных G_1 -многообразий постоянного типа совпадает с классом шестимерных G_1 -многообразий с неинтегрируемой структурой.*

Перейдем к рассмотрению G_2 -многообразий постоянного типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Почти эрмитову структуру назовем *нормальной*, если размерность линейной оболочки образа ее оператора Нейенхейса не превосходит единицы или, что равносильно,

$$N = \beta \otimes \xi; \quad \xi \in \mathbf{X}(M), \quad \beta \in \Lambda_2(M).$$

Это понятие в определенной степени является эрмитовым аналогом понятия нормальности почти контактной метрической структуры [12].

На пространстве присоединенной G -структуры вектор ξ задается системой функций $\{\xi^i\}$, значения которых на данном репере равны значениям компонент вектора ξ в этом репере (компонент вектора ξ). Аналогично, 2-форма β задается системой своих компонент $\{\beta_{ij}\}$, удовлетворяющих соотношениям $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$. Обозначим $\eta_i = \beta_{ij}\xi^j$ компоненты 1-формы η , двойственной вектору ξ относительно 2-формы β . Очевидно, $\eta(\xi) = \beta_{ij}\xi^j\xi^i = \beta(\xi, \xi) = 0$. Далее, в силу (14)

$$B^{abc} = \xi^a \beta^{bc}, \quad (20)$$

а значит,

$$B^{abc}\xi_a = \frac{1}{2}\|\xi\|^2\beta^{bc}. \quad (21)$$

Пусть, в частности, M – нормальное собственное G_2 -многообразие. Тогда справедливо тождество (19), которое, очевидно, можно переписать в форме $X \bullet Y = -X \diamond Y$, где “ $\bullet$ ” и “ $\diamond$ ” – операции альтернированного и сопряженного умножений в присоединенной Q -алгебре соответственно, определяемые формулами

$$X \bullet Y = X * Y - Y * X \quad \text{и} \quad \langle\langle X * Y, Z \rangle\rangle = \overline{\langle\langle X, Y \diamond Z \rangle\rangle}$$

(см. [10]). В силу этого тождества и (17₂) $N(X, Y) = -X \diamond Y$. С учетом этого тождества (19) можно переписать в форме

$$\langle\langle N(X, Y), Z \rangle\rangle + \langle\langle N(Y, Z), X \rangle\rangle + \langle\langle N(Z, X), Y \rangle\rangle = 0.$$

С учетом (14) это равносильно тому, что на пространстве присоединенной G -структуры

$$B^{abc} + B^{bca} + B^{cab} = 0$$

или ввиду (20)

$$\xi^a\beta^{bc} + \xi^b\beta^{ca} + \xi^c\beta^{ab} = 0. \quad (22)$$

С другой стороны, вектор $\frac{1}{2}(\xi + \sqrt{-1}J\xi)$ на пространстве присоединенной G -структуры, очевидно, имеет компоненты $\{\xi^a = 0, \xi^{\hat{a}} = \xi_a\}$. Поэтому, свертывая (22) с ξ_a , получим, что

$$\frac{1}{2}\|\xi\|^2\beta^{bc} + \xi^b\eta^c - \xi^c\eta^b = 0. \quad (23)$$

В силу неинтегрируемости оператора структуры неособое подмногообразие многообразия M непусто, и в силу (23) на нем справедливо тождество

$$\beta^{bc} = \frac{4}{\|\xi\|^2}\eta^{[b}\xi^{c]}, \quad \text{т.е.} \quad \beta = -\frac{4}{\|\xi\|^2}\xi^* \wedge \eta \quad (24)$$

(здесь $\xi^*(X) = \langle\xi, X\rangle$; $X \in \mathbf{X}(M)$). В частности, 2-форма β разложима и, более того,

$$\exists \gamma \in \Lambda_1(M) \text{ \& } \beta = \xi^* \wedge \gamma.$$

Обратно, если выполнено это условие, то, очевидно, справедливо тождество (22), т.е. M – G_2 -многообразие. Доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Почти эрмитово многообразие является нормальным G_2 -многообразием тогда и только тогда, когда*

$$N = (\xi^* \wedge \gamma) \otimes \xi,$$

где ξ и γ – подходящие вектор и ковектор соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Всякое 4-мерное G_2 -многообразие является нормальным G_2 -многообразием постоянного типа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, поскольку комплексная размерность касательного пространства в каждой точке такого многообразия равна двум, а оператор Нейенхейса, как уже упоминалось, комплексно антилинеен по каждому аргументу и кососимметричен, комплексная трилинейная форма $P(X, Y, Z) = \langle \langle X, N(Y, Z) \rangle \rangle$ имеет строение

$$P(X, Y, Z) = \xi^*(X)b(Y, Z), \quad X, Y, Z \in \mathbf{X}(M),$$

где ξ^* и b – подходящие комплексно-линейные формы. В силу невырожденности эрмитовой метрики $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ $\xi^*(X) = \langle \langle X, \xi \rangle \rangle$ для подходящего вектора ξ , а значит,

$$\langle \langle X, N(Y, Z) - \overline{b(Y, Z)\xi} \rangle \rangle = 0,$$

откуда с учетом невырожденности метрики следует, что $N = \xi \otimes \beta$, где $\beta(X, Y) = \overline{b(X, Y)}$. На пространстве присоединенной G -структуры это соотношение запишется в форме $B^{abc} = \xi^a \varepsilon^{bc}$, где $\varepsilon^{bc} = (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2)^{bc}$ – компоненты контравариантного тензора Кронекера порядка 2. Очевидно, $\varepsilon^{ab} \varepsilon_{cd} = \delta_{cd}^{ab}$, а значит,

$$B^{hab} B_{hcd} = \frac{1}{2} \|\xi\|^2 \delta_{cd}^{ab},$$

т.е. M – многообразие постоянного типа.

Обратно, пусть M – собственное нормальное G_2 -многообразие постоянного типа c . В силу теоремы 1 на пространстве присоединенной G -структуры $B^{hab} B_{hcd} = 2c \delta_{cd}^{ab}$. С другой стороны, в силу (20) $B^{hab} = \xi^h \beta^{ab}$, а значит,

$$\|\xi\|^2 \beta^{ab} \beta_{cd} = 4c \delta_{cd}^{ab}.$$

Свертывая по индексам b и d , получим, что в неособых точках многообразия

$$\beta^{ah} \beta_{bh} = \frac{4c(n-1)}{\|\xi\|^2} \delta_b^a. \quad (25)$$

Но в силу (24) $\beta^{bc} = \frac{4}{\|\xi\|^2} \eta^{[b} \xi^{c]}$, причем, как уже отмечалось, $\eta(\xi) = 0$. Следовательно,

$$\beta^{ah} \beta_{bh} = \frac{2}{\|\xi\|^2} \eta^a \eta_b + \frac{2\|\eta\|^2}{\|\xi\|^4} \xi^a \xi_b.$$

Отсюда следует, что ранг матрицы $(\beta^{ah} \beta_{bh})$ не превосходит двух. С другой стороны, согласно (25) ранг этой матрицы в неособой точке равен $n = \frac{1}{2} \dim M$. Следовательно, $\dim M \leq 4$. Поскольку в силу предложения 1 почти комплексная структура двумерного многообразия интегрируема (и даже келерова), заключаем отсюда, что $\dim M = 4$. Доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Класс собственных нормальных G_2 -многообразий постоянного типа совпадает с классом четырехмерных G_2 -многообразий с неинтегрируемой структурой.*

СЛЕДСТВИЕ. *Класс собственных нормальных почти келеровых многообразий постоянного типа совпадает с классом четырехмерных почти келеровых многообразий.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gray A. Nearly Kähler manifolds // J. Different. Geom. 1970. V. 4. № 3. P. 283–309.
- [2] Кириченко В. Ф. K -пространства постоянного типа // Сиб. матем. ж. 1976. Т. 17. № 2. С. 282–289.
- [3] Vanhecke L. Constant type for almost Hermitian manifolds // Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR. 1976–77. V. 20. № 3–4. P. 415–422.
- [4] Кириченко В. Ф. Почти эрмитовы многообразия постоянного типа // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259. № 6. С. 1293–1297.
- [5] Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономии. М.: ИЛ, 1960.
- [6] Kobayashi Ш., Nomizu К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.
- [7] Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. Pure Appl. 1980. V. 123. № 4. P. 35–58.
- [8] Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–71.
- [9] Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry. II // Geometriae Dedicata. 1994. V. 52. P. 53–85.
- [10] Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry. I // Geometriae Dedicata. 1994. V. 51. P. 75–104.
- [11] Кириченко В. Ф. K -алгебры и K -пространства постоянного типа с индефинитной метрикой // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 2. С. 265–278.
- [12] Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry // Lecture Notes in Math. 1976. V. 509. P. 1–146.

Московский педагогический государственный университет

Поступило
02.02.2000