Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Жужома, В. С. Медведев, Диффеоморфизмы
Морса–Смейла с тремя неподвижными точками, *Ма-
тем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 4, 541–558

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9888>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:30:58

Диффеоморфизмы Морса–Смейла с тремя неподвижными точками

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Для диффеоморфизмов Морса–Смейла с тремя неподвижными точками доказывается, что замыкания сепаратрис суть плоско вложенные сферы, если размерность многообразия не меньше шести, и могут быть дико вложенными сферами, если размерность многообразия равна четырем.

Библиография: 26 названий.

Введение

Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [1]–[3]) замкнутого n -мерного, $n \geq 3$, многообразия M^n , и σ – седловая периодическая точка диффеоморфизма f с k -мерным, $1 \leq k \leq n-1$, устойчивым $W^s(\sigma)$ или неустойчивым $W^u(\sigma)$ многообразием. Множество $\text{Sep}^\tau(\sigma) = W^\tau(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ называется *сепаратрисой* (τ – это либо s , либо u ; для краткости будем использовать обозначения $\tau = s$ и $\tau = u$). Если $\text{Sep}^\tau(\sigma)$ не пересекается с сепаратрисами других седловых периодических точек, то $\text{Sep}^\tau(\sigma)$ принадлежит неустойчивому (если $\tau = s$) или устойчивому (если $\tau = u$) многообразию некоторой узловой периодической точки, назовем N . Тогда топологическое замыкание сепаратрисы $\text{Sep}^\tau(\sigma)$ равно $W^\tau(\sigma) \cup \{N\}$ и является при $k = \dim \text{Sep}^\tau(\sigma) \geq 2$ топологически вложенной в M^n k -сферой [4]. Возможность дикого вложения такой k -сферы впервые была доказана в [5] для многообразия, являющегося 3-сферой $M^3 = S^3$, при $k = 2$ (аналогичные примеры были построены в [4], [6]–[10], где рассматривались также вопросы классификации). Более точно, в [5] был построен градиентно-подобный диффеоморфизм 3-сферы с одним седлом и тремя узлами (идею построения мы приводим в начале раздела 2). Из [11] вытекает, что не существует ориентируемых замкнутых 3-многообразий, допускающих диффеоморфизм Морса–Смейла с тремя периодическими точками. Поскольку на любом замкнутом многообразии диффеоморфизм Морса–Смейла имеет, по крайней мере, одну источниковую и одну стоковую периодические точки [3], то получается, что в случае $n = 3$ минимальное число периодических точек с указанным эффектом дикого вложения замыкания сепаратрисы равно четырем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-12056-офи-м, 12-01-00672).

В [12] было доказано существование замкнутых n -многообразий и проведено исследование замкнутых n -многообразий, допускающих функции Морса ровно с тремя критическими точками при $n \geq 4$. Как следствие получаем, что в случае $n \geq 4$ существуют диффеоморфизмы Морса–Смейла ровно с тремя периодическими точками. Каждый такой диффеоморфизм имеет ровно одно седло (лемма 3). Поэтому естественно рассмотреть вопрос о возможности дикого вложения топологического замыкания сепаратрисы у (единственного) седла. Настоящая статья посвящена изучению данного вопроса. Основной результат содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла замкнутого многообразия размерности $n \geq 4$ и неблуждающее множество диффеоморфизма состоит из трех неподвижных точек: стока ω , источника α и седла s_0 . Тогда

- M^n ориентируемое;
- сепаратрисы седла s_0 имеют одинаковую размерность (следовательно, размерность n многообразия M^n четная);
- замыкания неустойчивой $\text{Sep}^u(s_0)$ и устойчивой $\text{Sep}^s(s_0)$ сепаратрис являются топологически вложенными $(n/2)$ -мерными сферами

$$W^u(s_0) \cup \{\omega\} = S_\omega, \quad W^s(s_0) \cup \{\alpha\} = S_\alpha$$

соответственно.

Более того,

- если $n \geq 6$, то сферы S_ω и S_α локально плоские;
- если $n = 4$, то существует $f: M^4 \rightarrow M^4$ такой, что сферы S_ω и S_α дико вложены.

Структура статьи следующая. Все утверждения основной теоремы, кроме последнего, доказаны в разделе 1. Последнее утверждение, касающееся существования $f: M^4 \rightarrow M^4$ с дико вложенными замыканиями сепаратрис, доказано в разделе 2.

1. Замыкания сепаратрис при $n \geq 6$

Основные определения. Сперва напомним некоторые основные определения. Диффеоморфизм f гладкого многообразия M называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ состоит из конечного числа периодических точек (следовательно, $NW(f) = \text{Per}(f)$), все периодические точки являются гиперболическими и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек $x, y \in NW(f)$.

Индекс Кронекера–Пуанкаре есть число $\text{Ind}_p(f) = (-1)^{\dim W^u(p)} \Delta$, где Δ есть $+1$ или -1 в зависимости от того, сохраняет или меняет ориентацию отображение $f|_{W^u(p)}$. Обозначим через $\text{tr}(f_{*k})$ след (линейного) отображения $f_{*k}: H_k(M, \mathbb{R})$, которое индуцируется диффеоморфизмом f в k -мерной группе гомологий

$$H_k(M, \mathbb{R}) = H_k(M), \quad 0 \leq k \leq \dim M.$$

Если множество $\text{Fix}(f)$ неподвижных точек диффеоморфизма f состоит из гиперболических точек, то для такого диффеоморфизма имеет место следующая формула Лефшеца:

$$\sum_{k=0}^{\dim M} (-1)^k \text{tr}(f_{*k}) = \sum_{p \in \text{Fix}(f)} \text{Ind}_p(f).$$

Дадим определение дикого и локально плоского вложений подмногообразий в некоторое многообразие. Для натуральных $1 \leq m \leq n$ мы рассматриваем евклидово пространство $\mathbb{R}^m$, вложенное в $\mathbb{R}^n$ так, что последние $n - m$ координат точек из $\mathbb{R}^m$ равны 0. Пусть $e: M^m \rightarrow N^n$ – вложение замкнутого m -многообразия M^m во внутренность n -многообразия N^n . Тогда $e(M^m)$ *локально плоско в точке* $e(x)$, $x \in M^m$, если существует окрестность $U(e(x)) = U$ точки $e(x)$ и гомеоморфизм $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что

$$h(U \cap e(M^m)) = \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n.$$

В противном случае $e(M^m)$ *дику вложено в* $e(x)$. Аналогичные определения вводятся в случае компактного M^m с краем.

Предварительные результаты. В [4] доказано утверждение, которое мы формулируем для ссылок в виде леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, у которого сепаратриса $\text{Sep}^\tau(\sigma)$ некоторого седла σ не пересекается с сепаратрисами других седел, $k = \dim \text{Sep}^\tau(\sigma) \geq 2$. Тогда $\text{Sep}^\tau(\sigma)$ принадлежит неустойчивому (если $\tau = s$) или устойчивому (если $\tau = u$) многообразию некоторой стоковой периодической точки, скажем N , ее топологическое замыкание равно $W^\tau(\sigma) \cup \{N\}$ и она является топологически вложенной в M^n k -сферой.

Доказательство ориентируемости многообразия M^n будет вытекать из следующей леммы, которая имеет самостоятельный интерес.

ЛЕММА 2. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, у которого нет одномерных сепаратрис и все сепаратрисы не имеют гетероклинических пересечений. Тогда многообразие M^n ориентируемое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Не уменьшая общности, можно считать, что все периодические точки диффеоморфизма f являются неподвижными (в противном случае мы перейдем к некоторой итерации). Известно, что существует двулистное накрытие $\hat{\pi}: \hat{M}^n \rightarrow M^n$, где $\hat{M}^n$ – ориентируемое многообразие. Покажем, что существует поднятие $\hat{f}$ диффеоморфизма f относительно накрытия $\hat{\pi}$. Положим $\hat{f} = \text{id}$ во всех точках $\hat{\pi}^{-1}(\text{Fix } f)$. Возьмем произвольную точку

$$\hat{x} \in \hat{M}^n, \quad \hat{x} \notin \hat{\pi}^{-1}(\text{Fix } f).$$

Тогда $\hat{\pi}(\hat{x})$ принадлежит либо устойчивому многообразию $W^s(\omega)$ некоторого стока ω , либо устойчивой сепаратрисе $\text{Sep}^s(\sigma)$ некоторого седла σ . В первом случае, поскольку $W^s(\omega)$ односвязно и, следовательно, полный прообраз $\hat{\pi}^{-1}(W^s(\omega))$ состоит из попарно непересекающихся односвязных областей, существует единственная компонента $\widehat{W}^s$ полного прообраза $\hat{\pi}^{-1}(W^s(\omega))$, содержащая $\hat{x}$. Отметим, что существует также единственная точка $\hat{\omega} \in \hat{\pi}^{-1}(\omega)$, принадлежащая той же компоненте. Положим

$$\hat{f}(\hat{x}) = \hat{y} \in \hat{\pi}^{-1}(f(\hat{\pi}(\hat{x}))) \cap \widehat{W}^s.$$

Во втором случае, когда $\hat{\pi}(\hat{x}) \in \text{Sep}^s(\sigma)$, согласно лемме 1 замыкание сепаратрисы $\text{Sep}^s(\sigma)$ есть k -сфера S_0^k . По условию $k \geq 2$. Поэтому S_0^k односвязна и, следовательно, полный прообраз $\hat{\pi}^{-1}(S_0^k)$ состоит из попарно непересекающихся k -сфер, одна из которых, скажем $\hat{S}_0^k$, содержит $\hat{x}$. Положим

$$\hat{f}(\hat{x}) = \hat{y} \in \hat{\pi}^{-1}(f(\hat{\pi}(\hat{x}))) \cap \hat{S}_0^k.$$

Непосредственно проверяется, что построенное отображение $\hat{f}$ является диффеоморфизмом Морса–Смейла, удовлетворяющим равенству $\hat{\pi} \circ \hat{f} = f\hat{\pi}$.

Ясно, что $\hat{f}$ не имеет одномерных сепаратрис. В работе [13] показано, что из отсутствия одномерных сепаратрис вытекает, что диффеоморфизм Морса–Смейла имеет ровно один источник и ровно один сток. Так как f имеет хотя бы один источник и хотя бы один сток, то $\hat{f}$ должен иметь не менее двух источников и двух стоков. Полученное противоречие показывает, что многообразие M^n ориентируемое.

Следуя [14], будем говорить, что седло σ имеет тип (μ, ν) , если $\mu = \dim W^u(\sigma)$, $\nu = \dim W^s(\sigma)$. Число μ (соответственно ν) называется неустойчивым (соответственно устойчивым) индексом Морса.

ЛЕММА 3. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из трех неподвижных точек. Тогда

- $NW(f)$ состоит из стока, источника и седла, сепаратрисы которого имеют одинаковую размерность (следовательно, размерность n многообразия M^n четная);
- M^n ориентируемое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним неравенства Морса–Смейла [15]. Обозначим через M_j число периодических точек p диффеоморфизма f , у которых устойчивое многообразие имеет размерность $j = \dim W^s(p)$. Пусть $\beta_i(M^n) = \beta_i$ – i -е число Бетти многообразия M^n , т.е. $\beta_i(M^n) = \text{rank } H_i(M^n, \mathbb{Z})$. Тогда имеют место следующие соотношения [15]:

$$M_0 \geq \beta_0, \quad M_1 - M_0 \geq \beta_1 - \beta_0, \quad \dots, \quad M_{n-1} - M_{n-1} + \dots \geq \beta_{n-1} - \beta_{n-1} + \dots, \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i M_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i. \quad (2)$$

Поскольку для связного многообразия $\beta_0 = 1$, то из (1) вытекает, что f имеет по крайней мере один сток и по крайней мере один источник. Если предположить, что f имеет два стока ω_1, ω_2 и один источник α , то получим, что связное множество $M^n \setminus \{\alpha\}$ является объединением двух непересекающихся открытых множеств $W^s(\omega_1)$ и $W^s(\omega_2)$. Аналогично показывается, что f не может иметь два источника и сток. Таким образом, $NW(f)$ состоит из стока ω , источника α и седла σ . Пусть σ имеет тип $(n-k, k)$. Тогда $M_0 = M_n = M_k = 1$. Для диффеоморфизма f^{-1} имеем $M_0 = M_n = M_{n-k} = 1$. Остальные

$$M_j = 0, \quad j \neq 0, n, k, n-k.$$

Приравнявая левые части (2) для f и f^{-1} , получаем $(-1)^k = (-1)^{n-k}$ и, следовательно, число $n = 2m$ четное. Более того, $n \geq 4$.

Покажем, что $k \neq 1$. Предположим противное. Так как многообразия $W^s(\sigma)$, $W^u(\sigma)$ не имеют гетероклинических пересечений, то их топологические замыкания равны

$$W^s(\sigma) \cup \{\alpha\} \stackrel{\text{def}}{=} S_\alpha^1, \quad W^u(\sigma) \cup \{\omega\} \stackrel{\text{def}}{=} S_\omega^{n-1}$$

и являются топологически вложенными окружностью и $(n-1)$ -сферой соответственно [4]. Из $n \geq 4$ и того, что S_ω^{n-1} гладко вложена за исключением, быть

может, одной точки, вытекает, что S_ω^{n-1} имеет окрестность U_ω , гомеоморфную $S_\omega^{n-1} \times (-1; +1)$ [16], [17]. Более того, U_ω можно построить так, чтобы $f(U_\omega) \subset U_\omega$. Поскольку S_ω^{n-1} и S_α^1 пересекаются только в одной точке σ , то S_ω^{n-1} не разбивает M^n . Поэтому множество $M_1^n = M^n \setminus U_\omega$ является связным многообразием с двумя граничными компонентами, гомеоморфными S_ω^{n-1} . Приклеив к этим компонентам непересекающиеся n -мерные шары, получим замкнутое многообразие M_2^n . Из $f(U_\omega) \subset U_\omega$ следует, что можно продолжить f на M_2^n до диффеоморфизма с одним источником и двумя стоками. Выше было показано, что такого диффеоморфизма не существует. Полученное противоречие доказывает неравенство $k \neq 1$. Применяя этот результат к f^{-1} , получаем $k \neq n - 1$. Таким образом,

$$M_1 = M_{n-1} = 0.$$

Так как у диффеоморфизма Морса–Смейла сепаратрисы одного седла не пересекаются, то обе сепаратрисы (единственного) седла диффеоморфизма f не имеют гетероклинических пересечений. Отсюда и леммы 2 следует, что многообразие M^n ориентируемое.

Покажем, что $k = m$. Предположим противное, и для определенности предположим, что $k > m$ (в противном случае, перейдем к диффеоморфизму f^{-1}). Из (1) вытекает $\beta_1 = \dots = \beta_{n-k-1} = 0$, поскольку $M_1 = \dots = M_{n-k-1} = 0$. Из двойственности Пуанкаре для ориентируемых многообразий (см. например, [18; с. 145]) следует $\beta_1 = \dots = \beta_{k-1} = 0$. Тогда $\beta_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, n - 1$. Равенство (2) принимает вид $1 + (-1)^k + (-1)^n = 1 + (-1)^n$, чего не может быть.

Равенство $k = m$ можно доказать другим способом, который не использует ориентируемость M^n . Снова предположим противное, и для определенности предположим, что $k < m$. В этом случае коразмерность многообразия $W^s(\sigma)$ не менее двух. Поэтому достаточно близким к тождественному диффеоморфизмом $\kappa: M^n \rightarrow M^n$ можно перевести объединение $W^s(\sigma) \cup \alpha$ в $\kappa(W^s(\sigma) \cup \alpha)$ с

$$(\kappa(W^s(\sigma) \cup \alpha)) \cap (W^s(\sigma) \cup \alpha) = \emptyset.$$

При этом можно считать, что κ равен тождественному диффеоморфизму в некоторой окрестности стока ω . Диффеоморфизм $\kappa^{-1} \circ f \circ \kappa = \kappa'$ является диффеоморфизмом Морса–Смейла, у которого есть сток ω , и замыкание сепаратрисы седла не пересекается с $W^s(\sigma) \cup \alpha$. Тогда устойчивые многообразия стока ω диффеоморфизмов f и κ' покрывают все многообразие M^n . Так как устойчивое многообразие стока гомеоморфно открытому n -шару, то M^n является n -сферой S^n [19]. Перейдя, если необходимо к некоторой итерации, можно считать, что f и ограничение $f|_{W^u(\sigma)}$ сохраняют ориентацию. Поскольку для n -мерной сферы S^n имеем

$$H_0(S^n) = H_n(S^n) = 1, \quad H_k(S^n) = 0, \quad 1 \leq k \leq n - 1,$$

то формула Лефшеца для диффеоморфизма Морса–Смейла сферы S^n принимает следующий вид:

$$1 + (-1)^n = \sum_{p \in \text{Fix}(f)} \text{Ind}_p(f). \quad (3)$$

Ясно, что $\text{Ind}_\alpha(f) = (-1)^n$, $\text{Ind}_\omega(f) = 1$. Тогда из (3) получаем $\text{Ind}_\sigma(f) = 0 = (-1)^{\dim W^u(\sigma)}$, чего не может быть. Полученное противоречие доказывает равенство $k = m$.

Доказательство локальной плоскостности при $n \geq 6$. Для диффеоморфизма f , удовлетворяющего условиям основной теоремы, выше было доказано, что $n = 2k$, $k \geq 2$, и неблуждающее множество $NW(f)$ состоит из стока ω , источника α и седла s_0 с типом (k, k) . Из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть $f : M^{2k} \rightarrow M^{2k}$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из стока ω , источника α и седла s_0 типа (k, k) . Тогда замыкания неустойчивого $W^u(s_0)$ и устойчивого $W^s(s_0)$ многообразий являются топологически вложенными k -мерными сферами $W^u(s_0) \cup \{\omega\}$, $W^s(s_0) \cup \{\alpha\}$ соответственно.

Положим

$$S_\omega^k = W^u(s_0) \cup \{\omega\}, \quad S_\alpha^k = W^s(s_0) \cup \{\alpha\}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $f : M^{2k} \rightarrow M^{2k}$ – диффеоморфизм Морса–Смейла, неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из стока ω , источника α и седла s_0 . Если $k \geq 3$, то S_ω^k , S_α^k суть плоские k -сферы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e : M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ – вложение k -мерного многообразия (возможно, с краем) в $\mathbb{R}^n$. В [20] (см. также [21], [22]) доказано, что при $n \geq 5$, $k \neq n - 2$ вложение e не имеет изолированных точек дикого вложения. Поскольку неустойчивое и устойчивое многообразия являются гладко вложенными подмногообразиями, то k -сферы S_ω^k , S_α^k могут иметь точки дикого вложения только в узлах. Если взять окрестность узла, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$, то можно применить результаты из [20]. Отсюда следует, что S_ω^k , S_α^k являются локально плоскими топологически вложенными k -сферами.

2. Пример дикого вложения замыкания сепаратрис

Идея построения. Мы следуем идее построения аналогичных примеров в работах [9], [5]. Поэтому имеет смысл напомнить основные моменты этих конструкций. Рассмотрим на 3-сфере S^3 поток f_{NS}^t типа “север-юг”, который имеет один сток ω и один источник α , рис. 1 (а). Все другие траектории блуждающие.

Рис. 1

Обозначим через $f_{NS} = f_{NS}^1$ сдвиг вдоль траекторий потока f_{NS}^t на время $t = 1$. Рассмотрим конфигурацию Артина–Фокса, состоящую из трех дуг, рис. 1 (b). Известно, что кривая l_{AF} Артона–Фокса получается сдвигами этой конфигурации.

Поэтому можно вложить кривую Артина–Фокса в S^3 так, чтобы l_{AF} была инвариантна относительно f_{NS} и соединяла точки ω и α , которые являются точками дикого вложения (на рис. 3(b) изображена трубчатая окрестность кривой l_{AF}). Представим трубчатую окрестность T кривой l_{AF} (более точно, открытой дуги $l_{AF} \setminus \{\omega, \alpha\}$) в виде бесконечного цилиндрического тела, в котором зададим поток с одним седлом и одним узлом. Этот поток можно получить вращением ячейки Черри в полосе вокруг центральной прямой, рис. 1(c). Нетрудно определить поток g_T^t в T так, чтобы сдвиг $g_T^1 = g$ вдоль траекторий на время $t = 1$ на границе T совпадал со сдвигом f_{NS} . Тогда можно определить диффеоморфизм $f: S^3 \rightarrow S^3$ следующим образом: вне T диффеоморфизм f совпадает с f_{NS} , а внутри T диффеоморфизм f равен g . В результате получается градиентно-подобный диффеоморфизм Морса–Смейла с одним седлом и тремя узлами такой, что замыкание двумерной сепаратрисы седла является дико вложенной (в одной точке) двумерной сферой. Отметим, что замыкание одной из одномерных сепаратрис также имеет дикое вложение в концевой точке.

Для распространения указанной конструкции представим 4-сферу S^4 как результат вращения $\mathcal{R}$ 3-сферы S^3 , причем вращение $\mathcal{R}$ имеет ровно две неподвижные точки, совпадающие с $\omega = S$ и $\alpha = N$. Тогда вращение кривой Артина–Фокса дает 2-сферу $\mathcal{R}(l_{AF})$, дико вложенную в двух точках S, N . Трубчатая окрестность $T_{\mathcal{R}}$ этой 2-сферы (более точно, открытого цилиндра $\mathcal{R}(l_{AF}) \setminus \{N, S\}$) удаляется и вместо нее вклеивается специальная окрестность U_0 седла типа $(2, 2)$. Аналогично трехмерному случаю определяется диффеоморфизм полученного 4-многообразия с одним стоком, одним источником и одним седлом, двумерные сепаратрисы которого совместно с узлами образуют две дико вложенные 2-сферы.

Специальная окрестность седла типа $(2, 2)$. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с каноническими координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) , поток f_s^t , который определяется системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2, \quad \dot{x}_3 = x_3, \quad \dot{x}_4 = x_4. \quad (4)$$

Начало координат $O = (0, 0, 0, 0)$ является седлом потока f_s^t с 2-мерным устойчивым многообразием $W^s(O) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_3 = 0 = x_4\}$ и 2-мерным неустойчивым многообразием $W^u(O) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 0 = x_2\}$.

Непосредственно проверяется, что функция $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2)$ является интегральной функцией системы (4). Равенство $F = 1$ задает 3-мерное многообразие, которое мы обозначим через H^3 , рис. 2(a).

Это многообразие разбивает $\mathbb{R}^4$ на два открытых инвариантных множества, одно из которых является окрестностью седла O . Обозначим его через U_0 . Эту окрестность будем называть *специальной*. Ясно, что $\partial U_0 = H^3$.

Множество точек, координаты которых при фиксированном $r > 0$ удовлетворяют равенствам $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, $x_3^2 + x_4^2 = 1/r^2$, гомеоморфно стандартному 2-тору $\mathbb{T}^2$, поскольку естественным образом представимо в виде прямого произведения двух окружностей

$$S_{1,2}^1(r) = \{(x_1, x_2, 0, 0) \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2\}, \quad S_{3,4}^1\left(\frac{1}{r}\right) = \left\{(0, 0, x_3, x_4) \mid x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{r^2}\right\}.$$

Этот 2-тор мы обозначим через T_r^2 . Однопараметрическое семейство $\{T_r^2\}_{r>0}$ образует слоение коразмерности один на H^3 . Отметим, что T_r^2 является общей границей

Рис. 2

двух полноториев

$$P_{1,2,r}^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2, x_3^2 + x_4^2 \leq \frac{1}{r^2} \right\},$$

$$P_{3,4,r}^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2, x_3^2 + x_4^2 \leq \frac{1}{r^2} \right\},$$

внутренности которых принадлежат окрестности U_0 , рис. 2(b).

Пусть тор T^2 является границей некоторого полнотория $P^3 = S^1 \times D^2$, т.е. $T^2 = \partial P^3 = S^1 \times \partial D^2$. На T^2 имеется единственная с точностью до изотопии простая замкнутая кривая $\{\cdot\} \times \partial D^2$, которая гомотопна нулю в P^3 (поскольку ограничивает диск $\{\cdot\} \times D^2$) и негомотопна нулю на T^2 . Любая из таких кривых называется *меридианом*. Простую замкнутую кривую $S^1 \times \{\cdot\}$ на T^2 , которая пересекается с нулевым меридианом ровно в одной точке, естественно назвать *параллелью*. Известно, что если границы двух копий P^3 отождествить с помощью диффеоморфизма $T^2 \rightarrow T^2$, который переводит меридианы в параллели и наоборот, то получается 3-сфера S^3 . Такое представление S^3 называется *стандартной диаграммой Хегора рода 1*.

ЛЕММА 6. *Объединение $P_{1,2,r}^3 \cup P_{3,4,r}^3$ является представлением 3-сферы в виде стандартной диаграммы Хегора рода 1 (границы полноториев $P_{1,2,r}^3, P_{3,4,r}^3$ отождествляются с помощью тождественного отображения). Более того, 3-сфера*

$$S^3(r) = P_{1,2,r}^3 \cup P_{3,4,r}^3$$

ограничивает в $\mathbb{R}^4$ открытый 4-шар $B_0^4 \subset U_0$, содержащий седло $(0, 0, 0, 0)$, и разбивает специальную окрестность U_0 на три области: $U_0, U_{1,2}^4(r), U_{3,4}^4(r)$, где

$$U_{1,2}^4(r) = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 > r^2, x_3^2 + x_4^2 < \frac{1}{r^2}, (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2) < 1 \right\},$$

$$U_{3,4}^4(r) = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2, x_3^2 + x_4^2 > \frac{1}{r^2}, (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2) < 1 \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in T_r^2, \quad a_1^2 + a_2^2 = r^2, \quad a_3^2 + a_4^2 = \frac{1}{r^2}.$$

Нетрудно проверить, что кривая $\{(x_1, x_2, a_3, a_4) \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$ является меридианом на T_r^2 , если T_r^2 считать границей полнотория $P_{3,4,r}^3$, и является параллелью, если T_r^2 считать границей $P_{1,2,r}^3$. Аналогично, кривая $\{(a_1, a_2, x_3, x_4) \mid x_3^2 + x_4^2 = 1/r^2\}$ является параллелью на T_r^2 , если T_r^2 считать границей полнотория $P_{3,4,r}^3$, и является меридианом, если T_r^2 считать границей $P_{1,2,r}^3$. Отсюда следует, что объединение $S^3(r) = P_{1,2,r}^3 \cup P_{3,4,r}^3$ является представлением 3-сферы в виде стандартной диаграммы Хегора рода 1. Ясно, что $S^3(r)$ ограничивает в $\mathbb{R}^4$ 4-шар $B_0^4 \subset U_0$, содержащий седло $(0, 0, 0, 0)$. Остальные утверждения также непосредственно проверяются.

ЛЕММА 7. *Каждая траектория потока f_s^t , принадлежащая H^3 , пересекает каждый 2-тор T_r^2 ровно один раз, причем квази-трансверсально (это означает, что касательные пространства к T_r^2 и траекториям потока пересекаются только в нуле).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вида (4) следует, что любая траектория $l \subset H^3$ проектируется на плоскость $(x_1, x_2, 0, 0)$ в траекторию притягивающего узла. Поэтому проекция l пересекает ровно один раз $S_{1,2}^1(r)$, причем трансверсально. Аналогично показывается, что проекция l на плоскость $(0, 0, x_3, x_4)$ ровно один раз пересекает $S_{3,4}^1(1/r)$, причем трансверсально. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Лемма 7 позволяет ввести параметризацию семейства $\{T_r^2\}_{r=0}^{+\infty}$ с помощью более удобного нам параметра t – времени пересечения 2-торов T_r^2 с фиксированной траекторией. Пусть l^t – траектория, проходящая через точку $(1, 0, 1, 0)$ при $t = 0$. Непосредственно проверяется, что $(1, 0, 1, 0)$ принадлежит тору T_1^2 и l^t проходит по точкам $(e^{-t}, 0, e^t, 0)$ торов $T_{\exp(-t)}^2$, $t \in \mathbb{R}$. Как следствие получаем, что H^3 диффеоморфно $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ в силу отображения $\{t\} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \{t\} \times T_{\exp(-t)}^2$. Для простоты будем обозначать тор $T_{\exp(-t)}^2$ через $\mathbb{T}_t^2$ (можно считать, что мы сделали замену $t = -\ln r$). Соответствующие полнотории $P_{1,2,r}^3, P_{3,4,r}^3$ обозначим через $P_{1,2,t}^3, P_{3,4,t}^3$ соответственно. Для фиксированного $t = t_0$ полнотории $P_{1,2,t_0}^3$ и $P_{3,4,t_0}^3$ согласно лемме 6 разбивают U_0 на множества, которые мы обозначим через U_{12} (при $t \leq t_0$), U_{34} (при $t \geq t_0$). Тор $\mathbb{T}_{t_0}^2$ разбивает H^3 на множества

$$\mathbb{T}_{t \leq t_0}^2 = \bigcup_{t \leq t_0} \mathbb{T}_t^2, \quad \mathbb{T}_{t \geq t_0}^2 = \bigcup_{t \geq t_0} \mathbb{T}_t^2$$

такие, что

$$\partial U_{12}(t \leq t_0) = \mathbb{T}_{t \leq t_0}^2, \quad \partial U_{34}(t \geq t_0) = \mathbb{T}_{t \geq t_0}^2.$$

Введем на каждом $\mathbb{T}_t^2$ координаты (u, v) , $u, v \in [0; 1)$, положив

$$x_1 = e^{-t} \cos 2\pi u, \quad x_2 = e^{-t} \sin 2\pi u, \quad x_3 = e^t \cos 2\pi v, \quad x_4 = e^t \sin 2\pi v. \quad (5)$$

Тогда на $H^3 = \partial U_0$ получаем систему координат (t, u, v) , которую мы переобозначим через (t_2, u_2, v_2) .

Кривая $u = 0$ является нулевым меридианом на $\mathbb{T}_t^2$ для любого фиксированного t , если считать $\mathbb{T}_t^2$ границей $P_{1,2,t}^3$. Аналогично, кривая $v = 0$ является нулевым меридианом на $\mathbb{T}_t^2$, если считать $\mathbb{T}_t^2$ границей $P_{3,4,t}^3$. Мы будем называть кривую $u = 0$ на $\mathbb{T}_t^2$ нулевой параллелью, если считать $\mathbb{T}_t^2$ границей $P_{1,2,t}^3$. Аналогично, кривая $v = 0$ является нулевой параллелью на $\mathbb{T}_t^2$, если считать $\mathbb{T}_t^2$ границей $P_{3,4,t}^3$. Точка пересечения нулевого меридиана с нулевой параллелью называется отмеченной. На $\mathbb{T}_t^2$ отмеченная точка имеет координаты $(e^{-t}, 0, e^t, 0)$.

Специальная окрестность цилиндра Артина–Фокса. Рассмотрим копию пространства $\mathbb{R}^4$ с каноническими координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) . Пусть поток f_{NS}^t определяется системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2, \quad \dot{x}_3 = x_3, \quad \dot{x}_4 = x_4. \quad (6)$$

Начало координат $(0, 0, 0, 0)$ является отталкивающим узлом, который мы обозначим через N . Данную копию $\mathbb{R}^4$ удобно рассматривать как 4-сферу S^4 с удаленной точкой S , $\mathbb{R}^4 = S^4 \setminus \{S\}$. В понятном смысле S отождествляется с бесконечно удаленной идеальной 3-сферой в $\mathbb{R}^4$, так что любой луч, выходящий из начала координат, представляет собой дугу, соединяющую точки N , S . Ясно, что f_{NS}^t можно продолжить на всю 4-сферу S^4 так, чтобы точка S стала притягивающим узлом. Тогда поток f_{NS}^t представляет собой поток типа “север-юг”, а луч, выходящий из начала координат, является траекторией потока f_{NS}^t . Дiffeоморфизм

$$f_{NS} = f_{NS}^1 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (ex_1, ex_2, ex_3, ex_4)$$

является сдвигом на время $t = 1$ вдоль траекторий линейного потока f_{NS}^t . Ясно, что сферы

$$S_m^3 = \{(x_1, \dots, x_4) : x_2^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = e^{2m}\}, \quad S_m^2 = S_m^3 \cap \{x_4 = 0\}$$

инвариантны относительно f_{NS} .

Построим в $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 \geq 0, x_4 = 0\}$ кривую $l_{AF} = l$ Артина–Фокса следующим образом. Возьмем на S_0^2 три точки

$$Y_0^0\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), \quad Y_1^0(0; 0; 1; 0), \quad Y_2^0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0\right).$$

В кольце K_{01}^3 , ограниченном сферами S_0^3 и $f_{NS}(S_0^3) = S_1^3$, соединим дугой d_1 точки Y_0^0 , Y_1^0 , а точки $f_{NS}(Y_0^0) = Y_3^0$, Y_2^0 соединим дугой d_3 (ниже мы уточним расположение дуг, рис. 3(a)). Соединим точки $f_{NS}(Y_1^0)$, $f_{NS}(Y_2^0)$ дугой d_2 так, чтобы дуги d_1 , d_2 , d_3 образовали в кольце K_{01}^3 конфигурацию Артина–Фокса.

Рис. 3

Потребуем, чтобы все дуги d_1 , d_2 , d_3 в окрестности своих концевых точек лежали на лучах, выходящих из начала координат. Можно считать, что дуга $A =$

$d_1 \cup f_{NS}^{-1}(d_2) \cup d_3$ является простой дугой, концевые точки которой Y_0^0 и $f_{NS}(Y_0^0)$, отождествляются посредством f_{NS} . Поэтому объединение

$$l^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f_{NS}^k(A)$$

является простой кривой, соединяющей в S^4 точки S , N . Дуга

$$l = \{S, N\} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f_{NS}^k(A) = \{S, N\} \cup l^\circ$$

есть кривая Артина–Фокса [23].

Известно (см. например [19; с. 118]), что дополнение $S^3 \setminus l$ в каждой из точек N , S не имеет гомотопического типа окружности (это означает, что для любой достаточно малой окрестности U , скажем, точки N найдется меньшая окрестность U' такая, что образ $\pi_1(U' \setminus l)$ в $\pi_1(U \setminus l)$ при гомоморфизме вложения не является бесконечной циклической группой). Отметим, что здесь мы рассматриваем 3-сферу S^3 как пространство $\mathbb{R}^3$, пополненное точкой S , и как часть 4-сферы S^4 .

Вращение $\mathcal{R}$ полупространства $\mathbb{R}_+^3$ вокруг двумерной плоскости $x_4 = 0 = x_3$ определяется формулами

$$\bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{x}_2 = x_2, \quad \bar{x}_3 = x_3 \cos 2\pi v - x_4 \sin 2\pi v, \quad \bar{x}_4 = x_3 \sin 2\pi v + x_4 \cos 2\pi v, \quad (7)$$

где $v \in [0, 1]$. Тогда $\mathcal{R}(l)$ является топологически вложенной в S^4 2-сферой, поскольку точки S и N неподвижны относительно вращения $\mathcal{R}$, а остальная часть $l^\circ = l \setminus (\{S, N\})$ кривой Артина–Фокса принадлежит внутренности полупространства $\mathbb{R}_+^3$. Иногда объекты, полученные в результате вращения $\mathcal{R}$, мы будем снабжать индексом $\mathcal{R}$. Например, $\mathcal{R}(l) = l_{\mathcal{R}}$.

ЛЕММА 8. 2-Сфера $\mathcal{R}(l)$ дико вложена в S^4 в точках S и N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [24; теорема 3] группы $\pi_1(S^4 \setminus l_{\mathcal{R}})$, $\pi_1(S^3 \setminus l)$ изоморфны (более точно, любой замкнутый путь в $S^4 \setminus l_{\mathcal{R}}$ гомотопен пути в $S^3 \setminus l$, и наоборот). Так как дополнение $S^3 \setminus l$ в каждой из точек N , S не имеет гомотопического типа окружности, то $S^4 \setminus l_{\mathcal{R}}$ также не имеет гомотопического типа окружности в каждой из точек N , S . В силу [20; теорема 1 (в)] каждая из точек N , S не является локально плоской.

Введем на дуге A параметризацию с помощью произвольного диффеоморфизма $\theta_0: [0; 1] \rightarrow A$ такого, что

$$\theta(0) = Y_0^0, \quad \theta\left(\frac{1}{3}\right) = Y_1^0, \quad \theta\left(\frac{2}{3}\right) = Y_2^0, \quad \theta(1) = f_{NS}(Y_0^0).$$

Ясно, что θ_0 можно продолжить до гладкой параметризации $\theta: \mathbb{R} \rightarrow l^\circ$, положив

$$\theta(t) = f_{NS}^{[t]} \circ \theta_0(t \bmod 1),$$

где $[t]$ – целая часть числа $t \in \mathbb{R}$. Из построения следует, что кривая Артина–Фокса l инвариантна относительно f_{NS} , перпендикулярно пересекает все 3-сферы S_m^3 , $m \in \mathbb{Z}$, в точках $l^\circ(m)$, $l^\circ(m + 1/3)$, $l^\circ(m + 2/3)$, соответствующих параметру $t = m$,

$m + 1/3$, $m + 2/3$, и открытая дуга l° принадлежит внутренности полупространства $\mathbb{R}_+^3$. Отсюда вытекает существование трубчатой окрестности $T(A)$ дуги A такой, что $T(A)$ диффеоморфна прямому произведению $A \times D^2$ и пересекает S_0^3 по трем 2-дискам

$$D_{0,0} = \{0\} \times D^2, \quad D_{1/3,1} = \left\{\frac{1}{3}\right\} \times D^2, \quad D_{2/3,2} = \left\{\frac{2}{3}\right\} \times D^2,$$

где $Y_i^0 \in D_{i/3,i}$, $i = 1, 2, 3$, а 3-сферу S_1^3 трубчатая окрестность $T(A)$ пересекает по 2-диску $f_{NS}(D_{00}) = \{1\} \times D^2$. Не уменьшая общности, можно считать, что $T(A)$ не пересекается с плоскостью $x_3 = 0 = x_4$ (и следовательно, принадлежит внутренности полупространства $\mathbb{R}_+^3$). Тогда множество

$$T(l^\circ) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f_{NS}^k(T(A))$$

есть трубчатая окрестность кривой l° , инвариантная относительно f_{NS} . Структура произведения на $T(A)$ переносится на $T(l^\circ)$ посредством итераций f_{NS} , так что $T(l^\circ)$ диффеоморфно посредством отождествления i_{AF} произведению $\mathbb{R} \times D^2$. Чтобы подчеркнуть, что произведение $\mathbb{R} \times D^2$ относится к $T(l^\circ)$, мы будем обозначать его через $(\mathbb{R} \times D^2)_{AF}$. Из структуры произведения вытекает, что параметризация θ естественным образом переносится на любую кривую $\mathbb{R} \times \{z\}_{AF} \subset (\mathbb{R} \times D^2)_{AF}$ для любой точки $z \in D^2$ и любая кривая такого вида инвариантна относительно f_{NS} . Отсюда и леммы 8 получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Дополнение $S^4 \setminus (T(l^\circ)_{\mathcal{R}} \cup \{N, S\})$ не имеет гомотопического типа окружности в каждой из точек N, S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кривая $(\mathbb{R} \times \{z\})_{AF} \cup \{N, S\}$ есть кривая Артина–Фокса, изотопная в $T(l^\circ) \cup \{N, S\}$ кривой l , причем изотопия неподвижна в точках N, S . Отсюда вытекает, что l является ретрактом множества $T(l^\circ) \cup \{N, S\}$ и, следовательно, $l_{\mathcal{R}}$ является ретрактом множества $T(l^\circ)_{\mathcal{R}} \cup \{N, S\}$.

Основная конструкция. Ясно, что под действием вращения $\mathcal{R}$, задаваемого формулами (7), трубчатая окрестность $(\mathbb{R} \times D^2)_{AF}$ образует окрестность $\mathcal{R}(\mathbb{R} \times D^2)_{AF}$ двумерного бесконечного цилиндра $\mathcal{R}(l^\circ) = l_{\mathcal{R}}^\circ$. Из наличия структуры произведения следует, что окрестность $\mathcal{R}(\mathbb{R} \times D^2)_{AF}$ диффеоморфна $\mathbb{R} \times D^2 \times S^1$ с границей, гомеоморфной $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1$. Поэтому на границе окрестности $\mathcal{R}(\mathbb{R} \times D^2)_{AF}$ имеются координаты (t, u, v) , где v определяется в соответствии с (7). Переобозначим их через (t_1, u_1, v_1) .

Обозначим $\mathcal{I}$ – объединение точек N и S с внутренностью множества $(\mathbb{R} \times D^2)_{AF}$:

$$\mathcal{I} = \text{int}(\mathbb{R} \times D^2)_{AF} \cup \{N, S\}.$$

Положим $M_1 = S^4 \setminus \mathcal{I}$. Отметим, что если удалить из S^4 только внутренность множества $(\mathbb{R} \times D^2)_{AF}$, то получится компактное множество с границей, гомеоморфной $S^2 \times S^1$. Удаление вдобавок точек N и S дает в итоге некомпактное гладкое 4-многообразие, причем некомпактность обусловлена тем, что из границы удалены две точки. Получаем, что граница ∂M_1 множества M_1 гомеоморфна $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1$, $\partial M_1 \simeq \mathbb{R} \times S^1 \times S^1$.

Возьмем $M_2 = \text{clos } U_0$. Поскольку U_0 является областью пространства $\mathbb{R}^4$, ограниченной подмногообразием H^3 коразмерности один, то M_2 есть некомпактное гладкое 4-многообразие. Напомним, что на границе $\partial M_2 = H^3 \simeq \mathbb{R} \times S^1 \times S^1$ многообразия M_2 имеются координаты (t_2, u_2, v_2) . Определим $\Xi: \partial M_2 \rightarrow \partial M_1$ следующим образом:

$$t_1 = t_2, \quad u_1 = u_2 - v_2, \quad v_1 = v_2. \quad (8)$$

Согласно [25] (см. также [26]) множество $M_*^4 = M_1 \cup_{\Xi} M_2$, полученное в результате склеивания множеств M_1, M_2 посредством отождествления их границ с помощью диффеоморфизма Ξ , является гладким некомпактным 4-многообразием. Выше было отмечено, что $M'_1 = S^4 \setminus \text{int}(\mathbb{R} \times D^2)_{\text{AF}}$ является компактным множеством таким, что $M_1 = M'_1 \setminus \{N, S\}$. Так как образ $\Xi(\partial M_2)$ склеивающего диффеоморфизма Ξ не содержит точек N и S , то $M_*^4 = M_1 \cup_{\Xi} M_2$ можно представить как результат склейки M'_1 с M_2 с последующим удалением двух точек N и S , $M_*^4 = (M'_1 \cup_{\Xi} M_2) \setminus \{N, S\}$. Далее мы будем доказывать, что множество $M'_1 \cup_{\Xi} M_2$ допускает структуру гладкого (замкнутого) 4-многообразия. Для этого для каждой из точек N, S мы предъявим последовательности четырехмерных колец $K_i \simeq S^3 \times [0, 1]$, сходящихся к N, S и окружающих в понятном смысле эти точки.

Сперва докажем лемму, в которой рассматривается условие, когда диаграмма Хегора рода 1 дает 3-сферу. В этой лемме граница полнотория P^3 обозначается через T^2 , и на T^2 естественным образом вводятся меридиан и параллель. Обозначим через μ, λ образующие группы гомологий $H_1(T^2, \mathbb{Z})$, где μ соответствует меридиану, а λ – параллели тора T^2 . Известно, что диффеоморфизм тора T^2 индуцирует автоморфизм группы $H_1(T^2, \mathbb{Z})$, который можно представить в виде

$$\mu \mapsto r\mu + p\lambda, \quad \lambda \mapsto s\mu + q\lambda, \quad qr - ps = \pm 1, \quad \text{где } r, s, p, q \in \mathbb{Z}.$$

ЛЕММА 9. Пусть 3-сфера S^3 представлена в виде стандартного разбиения Хегора $S^3 = P^3 \cup P_*$ рода 1 двух полноториев P^3, P_* . Удалим из S^3 полноторий P^3 , а затем снова склеим P^3 и P_* посредством диффеоморфизма $\psi: T^2 \rightarrow T^2$ (их границ, которые естественным образом отождествляются с T^2), который индуцирует либо автоморфизм $\mu \mapsto -\mu + \lambda, \lambda \mapsto -\lambda$, либо автоморфизм $\mu \mapsto \lambda, \lambda \mapsto -\mu - \lambda$. Тогда 3-многообразие $P^3 \cup_{\psi} P_*$ есть 3-сфера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что если P^3 и P_* склеиваются посредством $\psi: T^2 \rightarrow T^2$, который индуцирует автоморфизм вида

$$\mu \mapsto r\mu + p\lambda, \quad \lambda \mapsto s\mu + q\lambda, \quad qr - ps = \pm 1,$$

то $P^3 \cup_{\psi} P_*$ есть линза $L(p, q)$. В случае указанных автоморфизмов получается линза $L(1, -1)$. Поскольку $L(p, q) = L(p, q \bmod p)$, то

$$L(1, -1) = L(1, -1 \bmod 1) = L(1, 0) = S^3.$$

Ясно, что $\mathcal{R}(S_m^2) = S_m^3 \subset \mathbb{R}^4 \setminus \{N, S\}$. Внешность сферы S_m^3 вместе с S_m^3 обозначим через

$$K(\geq m) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq e^{2m}\}.$$

Обозначим через $K(m_1, m_2)$ замкнутое кольцо, ограниченное сферами $S_{m_1}^3, S_{m_2}^3$. Наконец, внутренность сферы S_m^3 вместе с S_m^3 и выколотой точкой N обозначим через $K(\leq m)$.

В силу леммы 7 торы $\mathbb{T}_0^2, \mathbb{T}_1^2$ разбивают H^3 на три множества $\mathbb{T}_{t \geq 1}^2, \mathbb{T}_{0 \leq t \leq 1}^2, \mathbb{T}_{t \leq 0}^2$, одно из которых $\mathbb{T}_{0 \leq t \leq 1}^2$ компактно и гомеоморфно прямому произведению 2-тора T^2 на $[0; 1]$. Два других гомеоморфны прямому произведению T^2 на $[0; \infty)$. Обозначим ограничения диффеоморфизма Ξ на множества $\mathbb{T}_{t \geq 1}^2, \mathbb{T}_{0 \leq t \leq 1}^2, \mathbb{T}_{t \leq 0}^2$ через $\Xi_{t \geq 1}, \Xi_{0 \leq t \leq 1}, \Xi_{t \leq 0}$ соответственно.

Граница трубчатой окрестности $(\mathbb{R} \times D^2)_{\text{AF}}$ есть двумерный цилиндр, который двумя окружностями $(\{0\} \times \partial D^2)_{\text{AF}}$ и $(\{1\} \times \partial D^2)_{\text{AF}}$ разбивается на один компактный цилиндр

$$C_{0 \leq t \leq 1} = ([0; 1] \times S^1)_{\text{AF}}$$

и два некомпактных цилиндра

$$C_{t \geq 1} = ([1; +\infty) \times S^1)_{\text{AF}}, \quad C_{t \leq 0} = ((-\infty; 0] \times S^1)_{\text{AF}}.$$

Под действием вращения $\mathcal{R}$ эти цилиндры $C_{0 \leq t \leq 1}, C_{t \geq 1}, C_{t \leq 0}$ образуют множества

$$C_{0 \leq t \leq 1, \mathcal{R}} \simeq [0; 1] \times S^1 \times S^1, \quad C_{t \geq 1, \mathcal{R}} \simeq [1; +\infty) \times S^1 \times S^1, \quad C_{t \leq 0, \mathcal{R}} \simeq (-\infty; 0] \times S^1 \times S^1$$

соответственно. В силу (8) $\Xi_{t \geq 1}$ отображает $\mathbb{T}_{t \geq 1}^2$ на $C_{t \geq 1, \mathcal{R}}$, $\Xi_{0 \leq t \leq 1}$ отображает $C_{0 \leq t \leq 1, \mathcal{R}}$ на $\mathbb{T}_{0 \leq t \leq 1}^2$, а $\Xi_{t \leq 0}$ отображает $C_{t \leq 0, \mathcal{R}}$ на $\mathbb{T}_{t \leq 0}^2$.

Поскольку $\partial U_{12}(t \leq 0) = \mathbb{T}_{t \leq 0}^2$, $\partial U_{34}(t \geq 1) = \mathbb{T}_{t \geq 1}^2$, то $M_*^4 = M_1 \cup_{\Xi} M_2$ можно представить в виде объединения следующих трех (пересекающихся) множеств:

- 1) $U_{12}(t \leq 0) \cup_{\Xi_{t \leq 0}} [K(\leq 0) \setminus \mathcal{I}] \stackrel{\text{def}}{=} B_N$;
- 2) $U_{34}(t \geq 1) \cup_{\Xi_{t \geq 1}} [K(r \geq 1) \setminus \mathcal{I}] \stackrel{\text{def}}{=} B_S$;
- 3) $B^4(0 \leq t \leq 1) \cup_{\Xi_{0 \leq t \leq 1}} [K(-1, 1) \setminus \mathcal{I}] \stackrel{\text{def}}{=} B_*$.

Множество B_* компактно, в то время как B_N и B_S некомпактны. Из [25] (см. также [26; гл. 3]) следует, что B_* наделяется структурой гладкого многообразия, индуцированной Ξ и структурами на $B^4(0 \leq t \leq 1), K(-1, 1)$. Докажем, что каждое из B_N, B_S допускает одноточечную компактификацию и на полученном компактном множестве можно ввести структуру гладкого многообразия, которая является продолжением гладкой структуры многообразия B_* . Сперва рассмотрим B_N . В B_N имеется последовательность 3-многообразий $S_{*, -m}$, $m \in \mathbb{N}$, которые получаются после удаления из 3-сфер S_{-m}^3 множеств $S_{-m}^3 \cap \mathcal{I}$. При фиксированном m многообразие $S_{*, -m}$ есть 3-сфера S_{-m}^3 с удаленными тремя (непересекающимися) полноториями $D_{-m, 1} \times S^1, D_{-m+1/3, 2} \times S^1, D_{-m+2/3, 3} \times S^1$. В B_N к каждой компоненте границы (гомеоморфной двумерному тору) многообразия $S_{*, -m}$ приклеены с помощью диффеоморфизма $\Xi_{t \leq 0}$ соответствующие полнотории $P_{1, 2, -m}^3, P_{1, 2, -m+1/3}^3, P_{1, 2, -m+2/3}^3$.

Покажем, что

$$S_{*, -m} \bigcup_{\Xi_{t \leq 0}} (P_{1, 2, -m}^3 \cup P_{1, 2, -m+1/3}^3 \cup P_{1, 2, -m+2/3}^3) \stackrel{\text{def}}{=} S_{m, *}^3$$

есть 3-сфера. На границе $\mathbb{T}_{-m}$ полнотория $P_{1, 2, -m}^3$ имеют координаты $(-m, u_2, v_2)$, определяемые равенствами (5). Учитывая лемму 6 получаем, что на торе $\mathbb{T}_{-m}$, ограничивающем полноторий $P_{1, 2, -m}^3$, меридианы задаются равенствами $v_2 = \text{const}$, а параллели – равенствами $u_2 = \text{const}$.

На границе $\mathbb{T}_{-m, 1}^2$ полнотория $D_{-m, 1} \times S^1$ имеют координаты $(-m, u_1, v_1)$ такие, что меридианы задаются равенствами $v_1 = \text{const}$, а параллели – равенствами $u_1 =$

const. Из (8) и леммы 9 вытекает, что после удаления из 3-сферы S_{-m}^3 полнотория $D_{-m,1} \times S^1$ и последующего приклеивания полнотория $P_{1,2,-m}^3$ получаем вновь 3-сферу. Повторяя рассуждения для полноторий $D_{-m+1/3,2} \times S^1$, $P_{1,2,-m+1/3}^3$ и $D_{-m+2/3,3} \times S^1$, $P_{1,2,-m+2/3}^3$ получаем, что $S_{m,*}^3$ есть 3-сфера.

Покажем, что сферы $S_{m,*}^3$, $S_{m+1,*}^3$ в B_N ограничивают кольцо, гомеоморфное $S^3 \times [0; 1]$ при любом $m \geq 1$. Отметим, что сферы $S_{m,*}^3$, $S_{m+1,*}^3$ в B_N ограничивают некоторое компактное множество N^4 с непустой границей $\partial N^4 = S_{m,*}^3 \cup S_{m+1,*}^3$. Действительно, N^4 получается в результате приклеивания к $K(-m \leq -m-1) \setminus \mathcal{I}$ трех компактных множеств

$$U_{12} \left(-m + \frac{1}{3} \leq t \leq -m + \frac{2}{3} \right), \quad U_{12} \left(-m - \frac{1}{3} \leq t \leq -m \right), \\ U_{12} \left(-m - 1 \leq t \leq -m - \frac{2}{3} \right).$$

Граница этих множеств состоит из соответствующих полноториев, которые входят в границу 3-сфер $S_{m,*}^3$ и $S_{m+1,*}^3$, и множеств

$$\mathbb{T}_{-m+1/3 \leq t \leq -m+2/3}^2, \quad \mathbb{T}_{-m-1/3 \leq t \leq -m}^2, \quad \mathbb{T}_{-m-1 \leq t \leq -m-2/3}^2,$$

которые после приклеивания состоят из внутренних точек.

Для доказательства гомеоморфности N^4 и $S^3 \times [0; 1]$ мы покажем, что N^4 вкладывается в $\mathbb{R}^4$. Сперва возьмем дугу d кривой Артина–Фока, соответствующую параметру $-m-2 \leq t \leq -m+1$, и трубчатую окрестность $[-m-2; -m+1] \times D^2 \subset (\mathbb{R} \times D^2)_{\text{AF}}$ этой дуги, которая является частью трубчатой окрестности всей кривой Артина–Фока и имеет естественную структуру прямого произведения. Продолжим d в полупространстве $\text{int } \mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 > 0\}$ до гладкой (открытой) кривой L , выходящей из начала координат и уходящей в бесконечность так, чтобы L удовлетворяла следующим условиям.

УСЛОВИЕ 1. Существует гладкая диффеотопия φ_α , $0 \leq \alpha \leq 1$, пространства $\mathbb{R}_+^3$ в себя такая, что

- а) $\varphi_0 = \text{id}$,
- б) диффеоморфизм φ_1 переводит L в луч

$$\mathcal{L} = \varphi_1(L) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = x_3 \geq 0\},$$

- в) $\varphi_\alpha = \text{id}$ вне 3-шара, содержащего дугу d , и $\varphi_\alpha = \text{id}$ вблизи плоскости $x_3 = 0$ при всех $0 \leq \alpha \leq 1$.

УСЛОВИЕ 2. Трубчатая окрестность $[-m+1; -m-2] \times D^2$ продолжается до трубчатой окрестности $T(L) \subset \mathbb{R}_+^3$ кривой L со структурой прямого произведения, $T(L) = (\mathbb{R} \times D^2)_L$.

Поскольку дуга d деформируется в пространстве $\mathbb{R}_+^3$ в отрезок, то указанное продолжение до кривой L и диффеотопия φ_α существуют. Из условия 1 следует, что L вблизи начала координат и вне достаточно большого шара совпадает с лучом $\mathcal{L}$.

Ясно, что луч $\mathcal{L}$ трансверсально пересекает 3-сферы

$$S_r^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

радиуса $r > 0$. Поэтому существует трубчатая окрестность $T(\mathcal{L})$ луча $\mathcal{L}$ со структурой прямого произведения $T(\mathcal{L}) = (\mathbb{R} \times D^2)_{\mathcal{L}}$, порожденной пересечениями сфер S_r^3 с $\mathcal{L}$, $(\{r\} \times D^2)_{\mathcal{L}} = S_r^3 \cap T(\mathcal{L})$. Перейдя, если необходимо, к меньшим трубчатым окрестностям, можно считать, что выполняется еще одно условие на диффеотопию φ_α :

УСЛОВИЕ 3. Диффеотопия φ_1 переводит $T(L)$ в $T(\mathcal{L})$, сохраняя структуру прямого произведения.

Обозначим через $\mathcal{R}_\tau$ вращение полупространства $\mathbb{R}_+^3$ вокруг двумерной плоскости $x_4 = 0 = x_3$, которое определяется формулами (7) при $v = \tau$. Ясно, что $\mathcal{R}_\tau$ – диффеоморфизм. Поэтому, если $A, B \subset \mathbb{R}_+^3$ – два диффеоморфные посредством фиксированного $\mathcal{R}_\tau$ множества, непересекающиеся с плоскостью $x_4 = 0 = x_3$, то

$$\mathcal{R}(A) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq 1} \mathcal{R}_\tau(A) = \mathcal{R}(B) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq 1} \mathcal{R}_\tau(B).$$

Отсюда следует, что $T(L)_{\mathcal{R}} = T(\mathcal{L})_{\mathcal{R}}$, и поэтому

$$\mathbb{R}^4 \setminus T(L)_{\mathcal{R}} = \mathbb{R}^4 \setminus T(\mathcal{L})_{\mathcal{R}}. \quad (9)$$

Структура прямого произведения на $T(L) = (\mathbb{R} \times D^2)_L$ и $T(\mathcal{L}) = (\mathbb{R} \times D^2)_{\mathcal{L}}$ естественным образом продолжается до структуры прямого произведения на $T(L)_{\mathcal{R}}$ и $T(\mathcal{L})_{\mathcal{R}}$ соответственно, что позволяет ввести координаты на $\partial T(L)_{\mathcal{R}}$ и $\partial T(\mathcal{L})_{\mathcal{R}}$ аналогично координатам (t_1, u_1, v_1) на границе окрестности $\mathcal{R}(\mathbb{R} \times D^2)_{\text{AF}}$. Обозначим одним символом (надеясь, что это не приведет к путанице) Ξ диффеоморфизмы

$$\Xi: \partial M_2 \rightarrow \partial T(L)_{\mathcal{R}}, \quad \Xi: \partial M_2 \rightarrow \partial T(\mathcal{L})_{\mathcal{R}},$$

определяемые равенствами (8). Склеивая границы посредством Ξ , получим два множества

$$R_1 = (\mathbb{R}^4 \setminus T(L)_{\mathcal{R}}) \cup_{\Xi} M_2, \quad R_2 = (\mathbb{R}^4 \setminus T(\mathcal{L})_{\mathcal{R}}) \cup_{\Xi} M_2.$$

Из условия 3 и равенства (9) вытекает, что R_1 и R_2 гомеоморфны. Так как $\mathcal{L}$ – луч, то из леммы 9 следует, что R_2 гомеоморфно прямому произведению 3-сфер на луч с выколотой точкой, т.е. R_2 является пространством $\mathbb{R}^4$ с удаленным началом координат. Согласно условию 2 R_1 содержит N^4 . Отсюда следует, что N^4 вкладывается в $\mathbb{R}^4$.

Из конструкции вытекает, что 3-сферы $S_{m,*}^3, S_{m+1,*}^3$ не имеют точек дикости. Поскольку локально плоские 3-сферы ограничивают в $\mathbb{R}^4$ кольцо, гомеоморфное $S^3 \times [0; 1]$ [17], то сферы $S_{m,*}^3$ и $S_{m+1,*}^3$ в B_N также ограничивают кольцо, гомеоморфное $S^3 \times [0; 1]$ при любом $m \geq 1$. Обозначим это кольцо через $K_N(-m, -m-1)$. Из сказанного следует, что некомпактная часть B_N представляет собой счетное объединение колец, примыкающих друг к другу вдоль граничных 3-сфер. Отсюда следует, что B_N допускает одноточечную компактификацию B_{N*} , на которую продолжается топологическая структура многообразия B_N .

Полностью аналогично доказывается, что B_S допускает одноточечную компактификацию B_{S*} , на которую продолжается топологическая структура многообразия B_N .

Диффеоморфизмы $f_{NS}: M_1 \rightarrow M_1$, $f_s^1: M_2 \rightarrow M_2$ в силу (8) согласованы на границах ∂M_1 , ∂M_2 . Поэтому они индуцируют гомеоморфизм $f: M^4 \rightarrow M^4$ с тремя неподвижными точками: стоком S , источником N и седлом O . Если удалить из M^4 шаровые окрестности U_S и U_N узлов S и N соответственно, то оставшееся компактное множество в силу [26] и [25] допускает структуру гладкого многообразия. Из конструкции вытекает, что можно взять U_S и U_N так, чтобы

$$f(U_S) \subset U_S \quad \text{и} \quad f^{-1}(U_N) \subset U_N.$$

Поэтому можно вернуть шаровые окрестности U_S , U_N так, что получится замкнутое гладкое 4-многообразие (обозначим его снова через M^4), на котором задан диффеоморфизм, сопряженный f (полученный диффеоморфизм снова обозначим через f). Из следствия 1 и теоремы 1 [20] вытекает, что замыкания неустойчивой и устойчивой сепаратрис седла O образуют топологически вложенные в M^4 2-сферы, которые не являются локально плоскими в точках S , N соответственно. Это завершает требуемое построение.

Авторы благодарят Д. В. Аносова за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. В. Аносов, “Гладкие динамические системы. Гл. 1. Исходные понятия”, *Динамические системы* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **1**, ВИНТИ, М., 1985, 156–178; “Гладкие динамические системы. Гл. 2. Элементарная теория”, *Динамические системы* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **1**, ВИНТИ, М., 1985, 178–204.
- [2] Д. В. Аносов, В. В. Солодов, “Динамические системы с гиперболическим поведением. Гл. 1. Гиперболические множества”, *Динамические системы* – 9, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **66**, ВИНТИ, М., 1991, 12–99.
- [3] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 741–817; С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25:1** (1970), 113–185.
- [4] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “О диффеоморфизмах Морса–Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях”, *Матем. заметки*, **74:3** (2003), 369–386.
- [5] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16:2** (1977), 167–172.
- [6] Х. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. Пеку, “О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях”, *ДАН*, **377:2** (2001), 151–155.
- [7] Х. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. Пеку, “О диффеоморфизмах Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, **236**, Наука, М., 2002, 66–78.
- [8] Х. Бонатти, В. З. Гринес, О. В. Починка, “Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **250**, Наука, М., 2005, 5–53.
- [9] C. Bonatti, V. Grines, “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ”, *J. Dynam. Control Systems*, **6:4** (2000), 579–602.
- [10] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43:2** (2004), 369–391.

- [11] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Three-dimensional manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology Appl.*, **117**:3 (2002), 335–344.
- [12] J. Eells, N. H. Kuiper, “Manifolds which are like projective planes”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **14** (1962), 5–46.
- [13] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и топология. II*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **271**, М., 2010, 111–133.
- [14] R. Abraham, S. Smale, “Nongeneracy of Ω -stability”, *Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 5–8.
- [15] S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical system”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.
- [16] J. C. Cantrell, “Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n ”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 716–718.
- [17] R. J. Daverman, G. A. Venema, *Embeddings in Manifolds*, Grad. Stud. Math., **106**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [18] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.
- [19] Л. В. Келдыш, *Топологические вложения в евклидово пространство*, Тр. МИАН СССР, **81**, 1966.
- [20] А. В. Чернавский, “Об особых точках топологических вложений многообразий и объединении локально плоских клеток”, *ДАН СССР*, **167**:3 (1966), 528–530.
- [21] J. Stallings, “On topologically unknotted spheres”, *Ann. of Math. (2)*, **77**:3 (1963), 490–503.
- [22] J. C. Cantrell, C. H. Edwards, Jr., “Almost locally flat imbeddings of manifolds”, *Michigan Math. J.*, **12**:2 (1965), 217–223.
- [23] R. H. Fox, E. Artin, “Some wild cells and spheres in three-dimensional space”, *Ann. of Math. (2)*, **49**:4 (1948), 979–990.
- [24] J. J. Andrews, M. L. Curtis, “Knotted 2-spheres in the 4-sphere”, *Ann. of Math. (2)*, **70**:3 (1959), 565–571.
- [25] M. Hirsch, “Differential Topology”, *Grad. Texts in Math.*, **33**, Springer-Verlag, New York, 1976; М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979.
- [26] В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс, *Начальный курс топологии. Геометрические главы*, Наука, М., 1977.

Е. В. Жужома

Нижегородский государственный педагогический университет

E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступило

28.03.2011

В. С. Медведев

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Нижегородском государственном

университете им. Н. И. Лобачевского

E-mail: medvedev@unn.ac.ru