Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Бахтин, Теорема Рисса для положительных полилинейных функций, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 4, 628–631

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9889>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 04:21:09

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Теорема Рисса для положительных полилинейных функций

В. И. Бахтин

Пусть $C(X)$ обозначает пространство всех вещественнозначных непрерывных функций на некотором хаусдорфовом компакте X , снабженное равномерной нормой. По теореме Рисса [1; теорема IV.6.3] всякий линейный непрерывный функционал $l: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ порождается некоторой борелевской вещественнозначной мерой (зарядом) μ на X , так что $l(f) = \int_X f d\mu$ для всех $f \in C(X)$. При этом норма l совпадает с вариацией меры μ . Если к тому же функционал l положителен, то и мера μ будет положительной.

Рассмотрим случай, когда X является декартовым произведением компактов: $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Тогда каждая мера μ на X порождает непрерывную полилинейную функцию l на $C(X_1) \times \cdots \times C(X_n)$ по формуле

$$l(f_1, \dots, f_n) = \int_X f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) d\mu. \quad (1)$$

Будет ли справедливо обратное утверждение, что всякая непрерывная полилинейная функция на $C(X_1) \times \cdots \times C(X_n)$ порождается некоторой мерой на X с конечной вариацией? Известно, что ответ на этот вопрос отрицательный; соответствующий контрпример приведен в [2; с. 71].

Тем не менее, если полилинейная функция положительна, то для нее существует порождающая мера. Ниже мы доказываем это утверждение.

Полилинейная функция $l(f_1, \dots, f_n)$, определенная на декартовом произведении $C(X_1) \times \cdots \times C(X_n)$, называется *положительной*, если принимает неотрицательные значения на любом наборе неотрицательных аргументов $f_i \in C(X_i)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ — декартово произведение хаусдорфовых компактов и на произведении $C(X_1) \times \cdots \times C(X_n)$ задана положительная полилинейная функция l . Тогда существует положительная борелевская мера μ на X , для которой выполняется тождество (1).

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим тензорное произведение

$$\mathcal{C} = C(X_1) \otimes \cdots \otimes C(X_n).$$

Оно состоит из формальных конечных сумм вида

$$\sum_{i=1}^m f_1^i \otimes \cdots \otimes f_n^i, \quad \text{где } f_j^i \in C(X_j).$$

Определим естественное вложение

$$\pi: \mathcal{C} \rightarrow C(X), \quad \pi\left(\sum_{i=1}^m f_1^i \otimes \cdots \otimes f_n^i\right) = \sum_{i=1}^m f_1^i(x_1) \cdots f_n^i(x_n).$$

Очевидно, его образ $\pi(\mathcal{C})$ является подалгеброй в $C(X)$.

ЛЕММА 2. Естественное вложение $\pi: \mathcal{C} \rightarrow C(X)$ инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F = \sum_{i=1}^m f_1^i \otimes \cdots \otimes f_n^i \in \mathcal{C}$. Для каждого номера j обозначим через L_j линейную оболочку функций $f_j^1, \dots, f_j^m$ в пространстве $C(X_j)$. Выберем в L_j базис $g_j^1, \dots, g_j^{m_j}$. Найдем в X_j такие точки $x_j^1, \dots, x_j^{m_j}$, чтобы матрица, состоящая из элементов $a_{ik} = g_j^i(x_j^k)$, была невырожденной. Тогда в пространстве L_j существует единственный базис

$$h_j^1, \dots, h_j^{m_j}, \quad \text{для которого} \quad h_j^i(x_j^k) = \delta_{ik},$$

где δ_{ik} – символ Кронекера. Разложим функции f_j^i по этому базису. В итоге F примет вид

$$F = \sum_{i_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} \alpha_{i_1 \dots i_n} h_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes h_n^{i_n}.$$

Очевидно, $\pi F(x_1^{i_1}, \dots, x_n^{i_n}) = \alpha_{i_1 \dots i_n}$. Значит, если $\pi F = 0$, то и $F = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По линейности функционал l однозначно продолжается с декартова произведения $C(X_1) \times \cdots \times C(X_n)$ на тензорное произведение $\mathcal{C} = C(X_1) \otimes \cdots \otimes C(X_n)$. Поскольку вложение $\pi: \mathcal{C} \rightarrow C(X)$ инъективно, оно переносит l с $\mathcal{C}$ на $\pi(\mathcal{C})$.

Оказывается, функционал l на $\pi(\mathcal{C})$ положителен (принимает неотрицательные значения на неотрицательных функциях). Этот факт вытекает из теоремы 3 ниже. В силу положительности l для любой функции $F \in \pi(\mathcal{C})$ справедливы неравенства

$$l(1) \min F = l(\min F) \leq l(F) \leq l(\max F) = l(1) \max F.$$

Следовательно, функционал l непрерывен по отношению к равномерной норме на $\pi(\mathcal{C})$.

Далее, алгебра $\pi(\mathcal{C})$ плотна в $C(X)$. Это следует из теоремы Стоуна, поскольку алгебра $\pi(\mathcal{C})$ разделяет точки X и не исчезает ни в одной из них. По непрерывности функционал l продолжается с $\pi(\mathcal{C})$ на $C(X)$, сохраняя положительность. Наконец, по теореме Рисса для продолженного функционала l существует борелевская мера μ на X , удовлетворяющая тождеству $l(f) = \int_X f d\mu$ при всех $f \in C(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема Рисса устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством *регулярных* борелевских мер на компакте X и пространством линейных ограниченных функционалов на $C(X)$. Поэтому мы в действительности получили взаимно однозначное соответствие между положительными регулярными борелевскими мерами на декартовом произведении $X_1 \times \cdots \times X_n$ и положительными полилинейными функциями на $C(X_1) \times \cdots \times C(X_n)$.

При доказательстве теоремы 1 нами использовалась следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть на произведении компактов $X_1 \times \cdots \times X_n$ задана неотрицательная функция F вида

$$F = \sum_{i=1}^m f_1^i \cdots f_n^i, \quad \text{где все} \quad f_j^i \in C(X_j).$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие неотрицательные функции $g_j^i \in C(X_j)$, что имеет место равенство

$$F = \sum_{i=1}^k g_1^i \cdots g_n^i - \varepsilon.$$

Обозначим через $\mathcal{C}_\#$ множество всех конечных сумм вида $\sum_i g_1^i \cdots g_n^i$, в которых функции $g_j^i \in C(X_j)$ неотрицательны. Чтобы доказать теорему 3, нам потребуется

ЛЕММА 4. Если функция F имеет вид

$$F = f_1 \cdots f_n, \quad \text{где } f_j \in C(X_j),$$

и при этом

$$\|f_1\| \times \cdots \times \|f_n\| \leq \varepsilon,$$

то тогда $F + \varepsilon \in \mathcal{C}_\#$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности достаточно рассмотреть случай $\|f_1\| \times \cdots \times \|f_n\| = \varepsilon$. Введем обозначения

$$f_j^+ = \max\{0, f_j\} \quad \text{и} \quad f_j^- = \max\{0, -f_j\}.$$

Тогда каждая функция f_j записывается как разность $f_j = f_j^+ - f_j^-$, а произведение $F = f_1 \cdots f_n$ будет равно сумме 2^n слагаемых вида $\pm f_1^\pm \cdots f_n^\pm$. Очевидно, функции f_j^+ , f_j^- и $g_j = \|f_j\| - f_j^+ - f_j^-$ непрерывны и неотрицательны. Поэтому число

$$\varepsilon = \|f_1\| \times \cdots \times \|f_n\| = (f_1^+ + f_1^- + g_1) \times \cdots \times (f_n^+ + f_n^- + g_n)$$

раскладывается в сумму 3^n слагаемых, каждое из которых будет произведением n неотрицательных непрерывных функций. Среди этих слагаемых содержатся все произведения вида $f_1^\pm \cdots f_n^\pm$. Поэтому $F + \varepsilon \in \mathcal{C}_\#$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Фиксируем любое число $\varepsilon > 0$. Для каждого номера j построим на X_j такое непрерывное разбиение единицы $\varphi_j^1, \dots, \varphi_j^{m_j}$, чтобы осцилляции всех функций f_j^i на носителях функций φ_j^k были меньше ε . В носителе каждой функции φ_j^k отметим по одной точке $x_j^k \in X_j$. Положим

$$\eta_\varepsilon(y) = \begin{cases} -\varepsilon, & \text{если } y < -\varepsilon, \\ y, & \text{если } -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon, \\ \varepsilon, & \text{если } y > \varepsilon, \end{cases}$$

и определим функции

$$g_j^{ik} = \eta_\varepsilon \circ (f_j^i - f_j^i(x_j^k)).$$

По построению $\|g_j^{ik}\| \leq \varepsilon$, и на носителе φ_j^k выполняется равенство $f_j^i = f_j^i(x_j^k) + g_j^{ik}$. Поэтому

$$f_j^i = \sum_{k=1}^{m_j} f_j^i \varphi_j^k = \sum_{k=1}^{m_j} (f_j^i(x_j^k) + g_j^{ik}) \varphi_j^k. \quad (2)$$

Пусть $M = \max_{i,j} \|f_j^i\|$. Рассмотрим произведение

$$(f_1^i(x_1^{k_1}) + g_1^{ik_1}) \times \cdots \times (f_n^i(x_n^{k_n}) + g_n^{ik_n}), \quad k_j \leq m_j.$$

Раскроем в нем скобки и к каждому из полученных 2^n слагаемых (кроме самого первого, являющегося константой) применим лемму 4. По ней

$$\prod_{j=1}^n (f_j^i(x_j^{k_j}) + g_j^{ik_j}) - \prod_{j=1}^n f_j^i(x_j^{k_j}) + (2^n - 1)\varepsilon(M + \varepsilon)^{n-1} \in \mathcal{C}_\#. \quad (3)$$

Положим

$$M(\varepsilon) = (2^n - 1)\varepsilon(M + \varepsilon)^{n-1}.$$

Умножим выражение (3) на произведение $\varphi_1^{k_1} \cdots \varphi_n^{k_n}$ и просуммируем по всем индексам $i, k_1, \dots, k_n$. По построению результат будет лежать в $\mathcal{C}_\#$:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k_1 \cdots k_n} \left\{ \prod_{j=1}^n (f_j^i(x_j^{k_j}) + g_j^{ik_j}) \varphi_j^{k_j} - \prod_{j=1}^n f_j^i(x_j^{k_j}) \varphi_j^{k_j} + M(\varepsilon) \prod_{j=1}^n \varphi_j^{k_j} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \sum_{k_j=1}^{m_j} (f_j^i(x_j^{k_j}) + g_j^{ik_j}) \varphi_j^{k_j} - \sum_{k_1 \dots k_n} \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n f_j^i(x_j^{k_j}) \varphi_j^{k_j} + M(\varepsilon) \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \sum_{k_j=1}^{m_j} \varphi_j^{k_j} \\
 &\stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^m f_1^i \dots f_n^i - \sum_{k_1 \dots k_n} \sum_{i=1}^m f_1^i(x_1^{k_1}) \dots f_n^i(x_n^{k_n}) \varphi_1^{k_1} \dots \varphi_n^{k_n} + M(\varepsilon)m \\
 &= F - \sum_{k_1 \dots k_n} F(x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n}) \varphi_1^{k_1} \dots \varphi_n^{k_n} + M(\varepsilon)m \in \mathcal{C}_{\#}.
 \end{aligned}$$

В силу неотрицательности функций F и φ_j^k отсюда вытекает утверждение теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 1. *Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
 [2] П. Леви, *Конкретные проблемы функционального анализа*, Наука, М., 1967.

В. И. Бахтин

Белорусский государственный университет, г. Минск

E-mail: bakhtin@tut.by

Поступило

23.01.2012