Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Корниенко, О спектре вырождающихся операторных уравнений, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 677–691

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm989>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:00:04

О СПЕКТРЕ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Корниенко

Изучено распределение на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ спектра оператора $L = L(\alpha, a, A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$, порожденного замыканием в $H = \mathcal{L}_2(0, b) \otimes \mathfrak{H}$ операции $t^\alpha a D_t^2 + A$, первоначально заданной на гладких функциях $u(t): [0, b] \rightarrow \mathfrak{H}$ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условиям Дирихле: $u(0) = u(b) = 0$. Здесь $D_t \equiv d/dt$; A – модельный оператор, действующий в $\mathfrak{H}$. Приведены условия (критерии) на параметр α , при выполнении которых собственные функции оператора $L: H \rightarrow H$ образуют полную и минимальную систему, а также базис Рисса в гильбертовом пространстве H .

Библиография: 14 названий.

Разработанная в [1] концепция обобщенного решения граничной задачи позволила рассматривать левую часть уравнения как некий оператор L , действующий в соответствующим образом подобранном функциональном пространстве. В предлагаемой работе язык спектральной теории линейных операторов используется при описании свойств разрешимости модельных граничных задач для некоторого класса уравнений в частных производных, вырождающихся на границе области. Говоря о спектре σL оператора L , мы будем придерживаться терминологии, принятой в [2], [3]. Через ρL , $P\sigma L$, $C\sigma L$, $R\sigma L$ обозначим соответственно резольвентное множество, точечный, непрерывный, остаточный спектры оператора L .

1. Постановка задачи

Изучаемым в данной статье является операторное уравнение

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} at^\alpha D_t^k u + Au = \lambda u + f, \quad (1)$$

где $a \in \mathbb{C}$; $t \in \overline{V_t}$, $V_t \equiv (0, b)$, $0 < b < +\infty$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $D_t \equiv d/dt$; $k = 2$; оператор A , коммутирующий с D_t , действует в некотором комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и удовлетворяет определенным требованиям, формулируемым в терминах спектральной теории операторов (см. начало п. 3.1); $\lambda \in \mathbb{C}$, λ – спектральный параметр. Оператор L порожден замыканием операции $L(D_t, A) = at^\alpha D_t^2 + A$ на гладких функциях $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{H}$, удовлетворяющих условиям Дирихле

$$\Gamma_t u \stackrel{\text{def}}{=} u(0) = u(b) = 0 \quad (2)$$

и принадлежащих при всех $t \in \overline{V_t}$ области определения оператора A .

Отметим, что регулярный случай ($\alpha = 0$) достаточно полно исследован в [3]. Там же была сформулирована задача, рассматриваемая в настоящей работе. Уравнение (1), являющееся как сильно ($\alpha > 0$), так и слабо ($\alpha < 0$) иррегулярным [4], дает простейшую ситуацию вырождения типа уравнения. Примером вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных, попадающего в поле наших исследований, может служить уравнение

$$t^\alpha \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \Delta_x u(t, x) = \lambda u(t, x) + f(t, x),$$

где Δ_x – самосопряженный полограниченный эллиптический оператор, порожденный регулярной краевой задачей в ограниченной области Ω с достаточно гладкой границей; $(t, x) \in \overline{V}$, $V = V_t \times \Omega$.

Используемый нами метод изучения уравнения (1) позволяет рассмотреть вначале одномерный случай, т.е. случай, в котором A – умножение на константу $A(s) \in \mathbb{C}$, где s – “номер”, приписываемый “проекции” уравнения (1) в соответствующее подпространство (см. (20a)). Техника перехода к дифференциально-операторному уравнению, развитая в [3] и использованная, например, в [5] при изучении соответствующих вопросов для уравнений смешанного типа, позволяет рассмотреть в дальнейшем общее уравнение (1), т.е. уравнение, в котором A является M -оператором [3, с. 100]. Спектральные характеристики уравнения (1) при $k = 1$ были исследованы в [6]. Характер граничных условий по t (при $t = 0, b$), присоединяемых к вырождающемуся дифференциально-операторному уравнению второго порядка по t : $-D_t t^\alpha D_t u - D_t A u - P u = f$ и обеспечивающих существование и единственность решения при любых правых частях, изучался в [7]. В свете проводимых там исследований уравнение (1) – несамосопряженное уравнение второго типа (при $\alpha = 1$). Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения более высокого порядка по t исследовались, например, в [8]. Перейдем непосредственно к изложению результатов.

2. Одномерный случай

2.1. Структура фундаментальной системы решений. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$t^\alpha D_t^2 v - \varrho v = 0, \quad \varrho \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Исследуем поведение функций $v_1(t, \varrho)$, $v_2(t, \varrho)$, образующих ФСР (фундаментальную систему решений) уравнения (3) в окрестности $t = 0$. Определим функцию $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(n, \alpha) = n(2 - \alpha)[(n(2 - \alpha) + 1)]$, областью определения $\mathfrak{D}(F)$ которой является набор пар (n, α) чисел $n = \pm 1, \pm 2, \dots$; $\alpha \in \mathbb{R}$, т.е. $\mathfrak{D}(F) = \{(n, \alpha) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Отметим, что $(F(n, \alpha) = 0) \iff (\alpha = 2) \vee (\alpha = 2 + 1/\nu) \wedge (n = \nu)$, где $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$

ЛЕММА 1. ФСР $\{v_k(t, \varrho); k = 1, 2\}$ уравнения (3) может быть представлена в виде

$$v_1(t, \varrho) = \begin{cases} t^{1/2 + \sqrt{1/4 + \varrho}}, & \text{если } \alpha = 2, \\ t \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n(2-\alpha)}, & \text{если } (\alpha \neq 2) \wedge \left(\alpha \neq 2 + \frac{1}{\nu}\right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n t + \beta_n \ln t) t^{n(2-\alpha)}, & \text{если } \alpha = 2 + \frac{1}{\nu}, \end{cases} \quad (3a)$$

где $\nu = 1, 2, 3, \dots$; $\alpha_0, \gamma_0, \gamma_\nu$ – произвольные не равные нулю числа, а остальные коэффициенты определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\varrho}{F(n, \alpha)} \alpha_{n-1} \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \dots, \\ \text{если } \nu > 1, \text{ то } \gamma_n &= \frac{\varrho}{F(n, \alpha)} \gamma_{n-1} \quad \text{при } n = 1, \dots, \nu - 1, \\ \gamma_{\nu+n} &= \frac{\varrho \gamma_{\nu+n-1} - [2n(2-\alpha) - 1] \beta_n}{F(\nu+n, \alpha)} \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \dots, \\ \beta_0 &= -\varrho \gamma_{\nu-1}, \quad \beta_n = \frac{\varrho}{F(-n, \alpha)} \beta_{n-1} \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \dots; \\ v_2(t, \varrho) &= \begin{cases} t^{1/2 - \sqrt{1/4 + \varrho}}, & \text{если } (\alpha = 2) \wedge \left(\varrho \neq -\frac{1}{4}\right), \\ t^{1/2} \ln t, & \text{если } (\alpha = 2) \wedge \left(\varrho = -\frac{1}{4}\right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^{n(2-\alpha)}, & \text{если } (\alpha \neq 2) \wedge \left(\alpha \neq 2 - \frac{1}{\nu}\right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_n + \alpha_n t \ln t) t^{n(2-\alpha)}, & \text{если } \alpha = 2 - \frac{1}{\nu}, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\nu = 1, 2, 3, \dots$; $\beta_0, \delta_0, \delta_\nu$ – произвольные не равные нулю числа, а остальные коэффициенты определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{\varrho}{F(-n, \alpha)} \beta_{n-1} \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \dots, \\ \text{если } \nu > 1, \text{ то } \delta_n &= \frac{\varrho}{F(-n, \alpha)} \delta_{n-1} \quad \text{при } n = 1, \dots, \nu - 1, \\ \delta_{\nu+n} &= \frac{\varrho \delta_{\nu+n-1} - [2n(2-\alpha) + 1] \alpha_n}{F(-(\nu+n), \alpha)} \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \dots, \\ \alpha_0 &= -\varrho \delta_{\nu-1}, \quad \alpha_n = \frac{\varrho}{F(n, \alpha)} \alpha_{n-1} \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha = 2$, то мы имеем дело с уравнением Эйлера, ФСР которого находится известными методами [9, с. 228]. В случае $\alpha \neq 2$ ФСР уравнения (3) будем искать методом, используемым при нахождении решений уравнений класса Фукса с регулярной особой точкой [9, с. 236]. Именно, решения уравнения (3) ищем в форме рядов

$$v_1(t, \varrho) = t \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n\kappa}, \quad v_2(t, \varrho) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^{n\kappa}, \quad (4)$$

при этом уравнение для определения показателя κ (уравнение с неизвестной κ возникает при подстановке рядов (4) в уравнение (3)) имеет вид $n\kappa - 1 + \alpha = (n-1)\kappa + 1$, из которого находим $\kappa = 2 - \alpha$.

Пусть $\alpha \neq 2 + 1/\nu$, где $\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Подставляя ряды (4) в уравнение (3), собирая подобные члены и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях t , получим последовательности рекуррентных соотношений для определения чисел α_n

и β_n . Если $\alpha = 2 + 1/\nu$, где $\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, то определяющее уравнение $F(n, \alpha) = 0$ обращается в нуль при $n = \nu$. При $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ($\nu = -1, -2, -3, \dots$) функция $v_2(t, \varrho)$ ($v_1(t, \varrho)$), входящая в состав ФСР уравнения (3), останется неизменной, а функцию $v_1(t, \varrho)$ ($v_2(t, \varrho)$) будем искать в виде ряда (4) с “поправочным” (с точностью до некоторой постоянной C) слагаемым – произведением $\ln t$ и первой найденной функции, т.е. в виде

$$v_m(t, \varrho) = \sum_{n=0}^{\infty} ((2-m)\gamma_n + (m-1)\delta_n) t^{n(2-\alpha)+1} + C \cdot \ln t \cdot v_{3-m}(t, \varrho), \quad m = 1, 2.$$

При этом, как и ранее, последовательности рекуррентных соотношений для определения чисел γ_n (при $\nu = 1, 2, 3, \dots$) или δ_n (при $\nu = -1, -2, -3, \dots$) определим, пользуясь уравнением (3). (Отметим, что рекуррентные соотношения для определения чисел α_n (при $\alpha = 2 + 1/\nu$, где $\nu = -1, -2, -3, \dots$) и β_n (при $\alpha = 2 + 1/\nu$, где $\nu = 1, 2, 3, \dots$), а следовательно, для δ_n и γ_n соответственно выписаны нами несколько в ином (“равно-сильном”) виде.)

2.2. Свойства решений операторного уравнения $L_s v = g$. Изучим в гильбертовом пространстве $H_t \equiv H(V_t)$ комплекснозначных функций $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ с интегрируемым квадратом на V_t уравнение

$$L_s v \stackrel{\text{def}}{=} at^\alpha D_t^2 v + A(s)v = \lambda v + g, \quad v, g \in H_t. \quad (5)$$

Пусть $\mathfrak{D}_t$ – линейное многообразие гладких функций, удовлетворяющих условиям (2), а точнее

$$\mathfrak{D}_t \stackrel{\text{def}}{=} \{v : (v \in C(\overline{V}_t) \cap C^2(V_t)) \wedge (\Gamma_t v = 0)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $v \in H_t$ называется *обобщенным решением уравнения* (5), если существует последовательность $\{v_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{v_n; n \in \mathbb{N}\}$ функций $v_n = v_n(t)$ из $\mathfrak{D}_t$ такая, что выполнены равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n - v; H_t| = \lim_{n \rightarrow \infty} |L_s(D_t)v_n - \lambda v - g; H_t| = 0.$$

Определение 1 решения уравнения (5) породило замкнутый оператор $L_s: H_t \rightarrow H_t$. Именно, $v \in \mathfrak{D}(L_s)$ и $L_s v = \lambda v + g$, если выполнены условия определения 1. Изучим функциональную зависимость спектра и свойств системы собственных функций (коротко ССФ) оператора $L_s = L_s(\alpha, a)$ от параметров α, a . Приведем вначале легко доказываемые свойства элементов области определения $\mathfrak{D}(L_s)$ оператора L_s .

ЛЕММА 2. Пусть ε – произвольное положительное число из V_t . Любой элемент v из области определения $\mathfrak{D}(L_s)$ оператора $L_s = L_s(\alpha, a)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, представим функцией $v(t)$, первая производная $D_t v(t)$ которой абсолютно непрерывна на $\overline{V}_t^\varepsilon$, а сама функция $v(t)$ удовлетворяет условию $v(b) = 0$. При $\alpha \leq 3/2$ функция $v(t)$ непрерывна на $\overline{V}_t$ и удовлетворяет условиям Дирихле: $v(0) = v(b) = 0$. При $\alpha < 1/2$ первая производная $D_t v(t)$ функции $v(t)$ абсолютно непрерывна на $\overline{V}_t$.

ЛЕММА 3. Собственная функция $v_{s,\lambda}(t)$ оператора L_s , соответствующая собственному значению λ , может быть представлена в виде

$$v_{s,\lambda}(t) = \Delta(t, b, \varrho), \quad (6)$$

где

$$\Delta(t, \tau, \varrho) = \begin{vmatrix} v_1(t, \varrho) & v_2(t, \varrho) \\ v_1(\tau, \varrho) & v_2(\tau, \varrho) \end{vmatrix}, \quad 0 < \tau, t \leq b, \quad \varrho = \frac{\lambda - A(s)}{a}.$$

При $\alpha \leq 3/2$ собственная функция $v_{s,\lambda}(t) \in \mathfrak{D}_t$.

Из лемм 2, 3 следует, что при $\alpha < 2$ решения уравнения

$$\tilde{\Delta}_s(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\Delta}(\varrho) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(0, b, \varrho) = 0 \quad (7)$$

безусловно являются собственными значениями оператора L_s . Решения уравнения (7), естественно, будем искать асимптотическими методами. С этой целью получим интегральные представления ФСР уравнения (3). Именно, используем функцию $\mathfrak{w}(z) = (z - i)^{\alpha/(2-\alpha)}(z + i)^{\alpha/(2-\alpha)}$ однозначную и регулярную на плоскости $\mathbb{C}$ с разрезами $l_k = \{z : z = t + i(-1)^{k+1}, -\infty < t \leq 0\}$, $k = 1, 2$, т.е. на множестве $\mathbb{C} \setminus l_1 \setminus l_2$, для представления ФСР уравнения (3) в виде контурных интегралов. При этом мы будем считать ее продолженной по непрерывности на верхний и нижний берега каждого из разрезов l_k , т.е. считаем функцию $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывной в области $\mathbb{C} \setminus l_1 \setminus l_2$ вплоть до границы. (В работе (по определению) считаем, что $z^v = e^{v \ln z}$, $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z \leq \pi$.) Обозначим через l'_k кривую, состоящую из кусков верхнего, нижнего берегов разреза l_k и окружности радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $i(-1)^{k+1}$, т.е.

$$l'_k = \{z_k(\tau); -\infty < \tau < +\infty\}, \quad (8)$$

$$z_k(\tau) = i(-1)^{k+1} + \begin{cases} -\frac{\varepsilon}{\pi}\tau, & \text{если } \pi < \tau < +\infty, \\ \varepsilon(\cos \tau + i \sin \tau), & \text{если } -\pi \leq \tau \leq +\pi, \\ \frac{\varepsilon}{\pi}\tau, & \text{если } -\infty < \tau < -\pi, \end{cases}$$

где $\varepsilon \ll 1/2$, а “ $\ll$ ” – знак достаточной малости. При этом мы считаем, что движение по кривой (8), соответствующее возрастанию параметра τ , начинается на нижнем и заканчивается на верхнем берегах разреза l_k .

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha < 2$. ФСР $\{v_k(t, \varrho); k = 1, 2\}$ уравнения (3) может быть представлена в виде

$$v_k(t, \varrho) = \gamma^\nu t \int_{l'_k} \mathfrak{w}(z) e^{\gamma t^\beta z} dz, \quad (8a)$$

где $\gamma = 2\nu\sqrt{-\varrho}$, $\nu = 1/(2 - \alpha)$, $\beta = (2 - \alpha)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что уравнение (3) заменой $v = \gamma^\nu t \cdot w$, $z = \gamma t^\beta$ сводится к уравнению

$$z D_z^2 w + (2\nu + 1) D_z w + zw = 0, \quad (9)$$

ФСР которого может быть найдена преобразованием Лапласа

$$w_k(z) = \int_{l'_k} w(t) e^{zt} dt. \quad (10)$$

Отметим, что представление (10) решения уравнения (9) справедливо $\forall z \in \mathbb{C}$ ($-\pi < \arg z < \pi$). Это соответствует всем значениям спектрального параметра $\varrho \in \mathbb{C}$ уравнения (3), кроме неотрицательных значений, т.е. $\forall \varrho ((\varrho \in \mathbb{C}) \wedge (\varrho \notin \mathbb{R}_+ \cup \{0\}))$. Для получения аналитического продолжения полученного решения (10) уравнения (9) в более широкую область значений переменного $z \in \mathbb{C}$ (позволяющее охватить положительные значения ϱ , т.е. значения $\varrho \in \mathbb{R}_+$) достаточно повернуть разрез l_k (а вместе с ним и контур l'_k), по часовой стрелке вокруг точки $z_k = i(-1)^{k+1}$ на некоторый достаточно малый угол α ($0 < \alpha < \pi/2$).

2.3. Спектр оператора L_s . Прежде чем выписать асимптотическую формулу расщепления собственных значений оператора L_s , являющихся решением уравнения (7), приведем качественную картину расположения нулей функции $\hat{\Delta}(\varrho)$ на $\mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\alpha < 2$ и $\hat{\Delta}(\varrho) = 0$, то $\operatorname{Re} \varrho < 0$ и $\operatorname{Im} \varrho = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tilde{\Delta}_s(\lambda) = 0$, оператора L_s соответствует собственная функция $v = v(t, \varrho)$, $\varrho = (\lambda - A(s))/a$. Умножим обе части равенства $L_s v = \lambda v$ на $\bar{v}$ и проинтегрируем по промежутку V_t . Учитывая свойства ФСР уравнения (5) в окрестности $t = 0$, получим

$$\varrho \int_0^b \frac{|v|^2}{t^\alpha} dt = - \int_0^b |D_t v|^2 dt < 0,$$

т.е. $\operatorname{Re} \varrho < 0$, $\operatorname{Im} \varrho = 0$.

Следующие предложения дают как количественную, так и качественную картину расположения спектра оператора L_s на $\mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\alpha < 2$, то множество $\{\lambda_{k,s} : k = 1, 2, 3, \dots\}$ собственных значений $\lambda_{k,s}$ оператора L_s , являющихся решением уравнения (7), не имеет конечной предельной точки и допускает асимптотическое (при $k \rightarrow \infty$) представление вида

$$\lambda_{k,s} = -a \left(\frac{(2-\alpha)^2 \pi^2}{4b^{2-\alpha}} k^2 + \frac{\alpha(2-\alpha) \pi^2}{8b^{2-\alpha}} k + \frac{\alpha(4-\alpha)}{16b^{2-\alpha}} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{64b^{2-\alpha}} \right) + A(s) + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись методом асимптотических разложений решений, полученных преобразованием Лапласа [10, с. 408], получим асимптотическое разложение функции $v_1(b, \varrho)$ при $\varrho \rightarrow -\infty$ и уравнение

$$\cos\left(\gamma b^\beta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{p_1 \cdot (\nu + 1/2)}{2\gamma b^\beta} \sin\left(\gamma b^\beta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0,$$

равносильное уравнению (7). Решим его.

Рассмотрим (“невозмущенное”) уравнение

$$\cos(z - z_0) - \frac{\alpha_0}{z} \sin(z - z_0) = 0, \quad (11)$$

в котором

$$z_0 = \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}p_1 \cdot \left(\nu + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right), \quad z > 0.$$

Решения $z = z'_k$, $k = -N, -N + 1, -N + 2, \dots$, уравнения (11) действительны и могут быть представлены в виде

$$z'_k = z_0 - \frac{\pi}{2} + k\pi + \varsigma_k, \quad (12)$$

где $|\varsigma_k| < \pi/2$, причем $N = N(\alpha) \in \mathbb{N}$ таково, что $z'_{-N} > 0$. Найдем асимптотику z'_k при $k \rightarrow \infty$. Полагая в (11) $z = z_0 - \pi/2 + k\pi + \varsigma$; $\varepsilon = \varepsilon(k)$, $\varepsilon(k) = \alpha_0/(k\pi)$, получим для ς уравнение $\mathcal{F}(\varsigma) + \varepsilon = 0$, в котором функция

$$\mathcal{F}(\varsigma) = \frac{2\alpha_0 \sin \varsigma}{2\alpha_0 \cos \varsigma + (2z_0 - \pi + 2\varsigma) \sin \varsigma}$$

регулярна ($\varsigma \in \mathbb{C}$) в точке $\varsigma = 0$ и $\mathcal{F}'(0) = 1$. Следовательно, в силу теоремы об обратной функции существует функция $\varsigma = \varsigma(\varepsilon)$, обратная к функции $\mathcal{F}(\varsigma)$, регулярная в точке $\varepsilon = 0$. Подставляя ряд Тейлора $\varsigma(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varepsilon^n$ функции $\varsigma(\varepsilon)$, сходящийся в круге $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$, в формулу (12), получим представление решений уравнения (11):

$$z'_k = z_0 - \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{\alpha_0}{k\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{\alpha_0}{k\pi}\right)^n,$$

справедливое при достаточно больших k .

Рассмотрим теперь исходное уравнение

$$\cos(z - z_0) - \frac{\alpha_0}{z} \sin(z - z_0) + O\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0, \quad z = \gamma b^\beta. \quad (13)$$

В силу теоремы Коши (о промежуточном значении) решения $z = z_k$ уравнения (13) при достаточно больших k можно записать в виде $z_k = z'_k + z''_k$, где $|z''_k| < \pi/2$. Найдем асимптотику z''_k (а, следовательно, и z_k) при $k \rightarrow \infty$. Подставляя в уравнение (13) $z = z_k$, сведем его к уравнению относительно z''_k . Именно, используя равенство (11) (при $z = z'_k$), а также формулы

$$\sin(z'_k - z_0) = (-1)^k \left(1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right), \quad \cos(z'_k - z_0) = O\left(\frac{1}{k}\right),$$

после приведения подобных уравнение (13) примет вид

$$\sin(z_k'') = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Откуда $z_k'' = O(1/k^2)$. Следовательно,

$$z_k = z_0 - \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{a_0}{k\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Учитывая, что $\lambda_{k,s} = -a\rho_k + A(s)$, где $\rho_k = (2 - \alpha)^2 z_k^2 / (4b^{2-\alpha})$, получим асимптотическое представление собственных значений оператора L_s .

Обозначим через $C[\overset{\circ}{0}, b]$ подмножество $C[0, b]$, состоящее из функций, финитных в окрестности $t = 0$ (равных нулю локально при $t \rightarrow +0$), т.е.

$$C[\overset{\circ}{0}, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{v : (v \in C[0, b]) \wedge (\exists \varepsilon_v \in (0, b) \forall t \ (t \in (0, \varepsilon_v) \implies v(t) = 0))\};$$

через

$$\mathbb{P}_s = \left\{ \lambda : 4 \operatorname{Re} \frac{\lambda - A(s)}{a} < -\operatorname{Im}^2 \frac{\lambda - A(s)}{a} + 3 \right\}$$

– внутренность параболы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\alpha = 2$, то $R\sigma L_s = \mathbb{P}_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что для оператора L_s число $\lambda = a\rho + A(s)$, где $\rho \in \mathbb{P} = \{\rho : 4 \operatorname{Re} \rho < -\operatorname{Im}^2 \rho + 3\}$, есть собственное значение с соответствующей ему собственной функцией

$$v(t, \rho) = t^{\frac{1}{2}} \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}\{\sqrt{1/4 + \rho}(\ln b - \ln t)\}}{\sqrt{1/4 + \rho}}, & \rho \neq -\frac{1}{4}, \\ \ln b - \ln t, & \rho = -\frac{1}{4}. \end{cases} \quad (14)$$

Причем если $\rho \in \mathbb{P}_0 = \{\rho : \operatorname{Re} \rho < -\operatorname{Im}^2 \rho\}$, то (14) является “классической” собственной функцией [10], т.е. $v \in \mathfrak{D}_t$. С другой стороны, если $\lambda = a\rho + A(s)$, где $\rho \notin \mathbb{P}$, то решение уравнения (5), например, для любой функции $g \in C[\overset{\circ}{0}, b]$ существует и единственно.

Отметим еще ряд спектральных свойств рассматриваемой задачи: $(\alpha = 2) \implies (R\sigma L_s = \emptyset)$; $(\alpha < 2) \implies (C\sigma L_s = \emptyset) \vee (R\sigma L_s = \emptyset)$. Первое свойство получено в ходе доказательства предложения 3, второе вытекает из определения и структуры решения уравнения (5).

2.4. Свойства ССФ оператора L_s . Займемся изучением свойств системы собственных функций оператора L_s . Пусть оператор $L_s^T: H_t \rightarrow H_t$ порожден (как и оператор L_s) замыканием операции $L_s^T(D_t)$,

$$L_s^T(D_t) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{a}t^\alpha D_t^2 + 2\bar{a}\alpha t^{\alpha-1}D_t + (\bar{a}\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} + \overline{A(s)}) \cdot I, \quad (15)$$

первоначально заданной на линейном многообразии $\mathfrak{D}_t^T$,

$$\mathfrak{D}_t^T \stackrel{\text{def}}{=} \{v : (v \in C^2(V_t)) \wedge (\Gamma_t^T v = 0)\},$$

где

$$\Gamma_t^T v \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +0} t^\alpha v(t), \\ \lim_{t \rightarrow b-0} v(t). \end{cases}$$

Отметим, что операция (15) является формально сопряженной [11] с операцией левой части уравнения (5).

Легко доказываются следующие ниже

ЛЕММА 5. *Любой элемент v из области определения $\mathfrak{D}(L_s^T)$ оператора $L_s^T = L_s^T(\alpha, a)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, представим функцией $v(t)$, для которой имеют место вложения $t^\alpha v(t) \in C^1(\bar{V}_t) \cap C^2(V_t)$ и выполнены условия $\Gamma_t^T v = 0$.*

ЛЕММА 6. *Собственная функция $v_{s, \bar{\lambda}}(t)$ оператора $L_s^T = L_s^T(\alpha, a)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, соответствующая собственному значению $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$, может быть представлена в виде*

$$v_{s, \bar{\lambda}}(t) = t^{-\alpha} \Delta(t, b, \bar{\varrho}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $\alpha < 3/2$. Если $v(t)$ – собственная функция оператора L_s , соответствующая его собственному значению λ , то $t^{-\alpha}v(t)$ – собственная функция оператора L_s^T , соответствующая его собственному значению $\bar{\lambda}$. И наоборот, при $\alpha \geq 3/2$ имеем равенство $R\sigma L_s^T = \emptyset$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть $\alpha < 2$. Совокупность собственных функций оператора L_s образует:*

- а) полную систему в H_t ;
- б) (минимальную систему в H_t) $\iff (\alpha < 3/2)$;
- в) (гильбертову систему в H_t) $\iff (0 \leq \alpha < 3/2)$;
- г) (бесселеву систему в H_t) $\iff (\alpha \leq 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t)$ нетривиальные решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$t^\alpha D_t^2 v - v = 0, \quad (16)$$

удовлетворяющие условиям

$$\tilde{v}_1(0) = \tilde{v}_2(b) = 0. \quad (17)$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае (т.е. $\alpha < 2$) решения уравнения (16), удовлетворяющие условиям (17), существуют

$$\tilde{v}_1(t) = v_1(t, \varrho), \quad \tilde{v}_2(t) = \Delta(t, b, \varrho) \quad \text{при } \varrho = 1.$$

Предполагая их линейную зависимость, получим равенство

$$0 = \int_0^b \left(\tilde{v}_1 D_t^2 \tilde{v}_1 - \frac{\tilde{v}_1^2}{t^\alpha} \right) dt = - \int_0^b \left[(D_t \tilde{v}_1)^2 + \frac{\tilde{v}_1^2}{t^\alpha} \right] dt.$$

Откуда $\forall t \in \bar{V}_t$ ($\tilde{v}_1(t) = \tilde{v}_2(t) = 0$).

Положим

$$G(\tau, t) = \frac{1}{W} \begin{cases} \tilde{v}_1(\tau) \tilde{v}_2(t), & 0 \leq \tau \leq t \leq b, \\ \tilde{v}_1(t) \tilde{v}_2(\tau), & 0 \leq t \leq \tau \leq b, \end{cases}$$

где W – вронскиан выбранной системы функций $\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t)$. Используя свойства ФСР уравнения (3), нетрудно проверить, что уравнение $L_s v = \lambda v$, рассматриваемое над $\mathfrak{D}_t$, эквивалентно уравнению

$$v = (\varrho - 1) B \tilde{L} B^{-1} v, \quad (18)$$

в котором B – оператор умножения на функцию $\sqrt{t^\alpha}$, $\tilde{L}$ – интегральный оператор с ядром $G(\tau, t)/(\sqrt{\tau^\alpha} \sqrt{t^\alpha})$, т.е.

$$B, \tilde{L}: H_t \rightarrow H_t, \quad Bv = \sqrt{t^\alpha} v, \quad \tilde{L}w = \int_0^b \frac{G(\tau, t)}{\sqrt{\tau^\alpha} \sqrt{t^\alpha}} w(\tau) d\tau.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$w = (\varrho - 1) \tilde{L} w, \quad (19)$$

вытекающее из (18), в котором надо положить $w = B^{-1}v$. Ядро оператора $\tilde{L}$ пусто. Кроме того, оператор $\tilde{L}$ является отрицательным самосопряженным, вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве H_t . Следовательно, совокупность его пронормированных собственных функций $w_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, образует полную ортонормальную систему в H_t . Учитывая связь, установленную благодаря уравнению (18) между операторами L_s и $\tilde{L}$, выясним теперь свойства системы

$$v_k = B w_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (20)$$

собственных функции оператора L_s , соответствующих его собственным значениям $\lambda_{k,s} = a \varrho_k + A(s) = a \mu_k^{-1} + A(s) + a$. Здесь μ_k – собственное значение оператора $\tilde{L}$, соответствующее его собственной функции $w_k = w_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Пусть $v \in C[\overset{\circ}{0}, b]$ и равенство $(v, v_k; H_t) = 0$ справедливо при любом $k = 1, 2, 3, \dots$. Тогда при любом $k = 1, 2, 3, \dots$ справедливо равенство $(Bv, w_k; H_t) = 0$. Откуда $Bv = 0$. Но оператор B имеет обратный B^{-1} . Следовательно, $v = 0$. Так как множество $C[\overset{\circ}{0}, b]$ плотно в H_t , в силу критерия [3, с. 16] получим полноту в H_t ССФ оператора L_s . Учитывая структуру ФСР уравнения (3), лемму 6 и представление ССФ оператора L_s , заключаем, что набор $\{v_k, v_k^*; k = 1, 2, 3, \dots\}$, где $v_k^* = t^{-\alpha} \overline{v_k(t)}$, образует биортонормированную систему в H_t . Так как $(v_k^* \in H_t) \iff (\alpha < 3/2)$, то условие минимальности в H_t ССФ оператора L_s установлено [12, с. 306]. Завершая доказательство, осталось, с одной стороны, заметить, что для ССФ оператора L_s справедливо представление (20), а операторная функция $B = B(\alpha)$ в зависимости от значений аргумента α обладает следующими ниже свойствами: $(0 \in \rho B^{-1} \cap C\sigma B) \iff (\alpha \geq 0)$, $(0 \in \rho B \cap C\sigma B^{-1}) \iff (\alpha \leq 0)$, а с другой, воспользоваться соответствующими критериями, при выполнении которых B -система [12, с. 431] является бесселевой или гильбертовой.

3. Общий случай

3.1. Операторные уравнения и модельные операторы. Приступим к изучению операторного или, как еще говорят, дифференциально-операторного уравнения (1). Пусть A – модельный оператор, действующий в $\mathfrak{H}$, т.е. линейный замкнутый, вообще говоря, неограниченный оператор с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения, полная система $\{\varphi_s; s \in S\}$ собственных элементов φ_s которого образует базис Рисса в $\mathfrak{H}$ [11, с. 99]. Пусть также $H = H_t \otimes \mathfrak{H}$; $\mathfrak{D}$ – линейное многообразие, состоящее из функций $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{H}$ вида $u(t) = \sum_s v_s(t) \varphi_s$, где $v_s(t)$ из $\mathfrak{D}_t$ и суммирование проводится для конечного набора индексов $s \in S$. (Функция $u(t)$ (так же, как и операция $L(D_t, A)$) в формализме тензорных произведений [3, с. 102] требует записи вида $u(t) = \sum_s v_s(t) \otimes \varphi_s$ ($L(D_t, A) = at^\alpha D_t^2 \otimes I + I \otimes A$), которой, ради простоты, мы не следуем.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент $u \in H$ называется *обобщенным решением уравнения* (1), где $f \in H$, если существует последовательность $\{u_n\}$ функций $u_n = u_n(t)$ из $\mathfrak{D}$ такая, что выполнены равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u; H| = \lim_{n \rightarrow \infty} |L(D_t, A)u_n - \lambda u - f; H| = 0.$$

Изучим функциональную зависимость спектра и свойств ССФ оператора $L: H \rightarrow H$, $L = L(\alpha, a, A)$, порожденного введенным определением, от “параметров” α, a, A . Обозначим символом $\hat{L}_s$ сужение (“проекцию”) оператора L на подпространство

$$H_s = H_t \otimes \varphi_s \quad (20a)$$

пространства H . Отметим, что H_s – инвариантное подпространство оператора $\hat{L}_s$.

Поскольку основным объектом, интересующим нас, является граничная задача, в дальнейшем роль $\mathfrak{H}$ будет играть пространство $H_x = H(V_x)$, где V_x – ограниченная область пространства переменных $x \in \mathbb{R}_x^n \equiv \mathbb{R}^n$. Более того, при переходе к изучению операторного уравнения (1) удобно считать, что A принадлежит специальному классу модельных операторов, а именно, A является Π -оператором. Опишем интересующий нас класс операторов.

3.2. Π -операторы. Обозначим символом V_x n -мерный куб с ребром 2π из пространства $\mathbb{R}_x^n$, $H_x = H(V_x)$ – гильбертово пространство комплекснозначных функций $w: \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{C}$ с интегрируемым квадратом над V_x ; $\mathscr{P}^\infty$ – линейное многообразие гладких ($\mathscr{P}^\infty \subset C^\infty(\overline{V_x})$) периодических по всем переменным $(x_1, \dots, x_n) \in \overline{V_x}$ комплекснозначных функций, плотное в H_x ; $S = \{s; s \in \mathbb{Z}^n\}$. Полиному $A(s)$ с постоянными комплексными коэффициентами

$$A(s) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha s^\alpha,$$

$$a_\alpha = a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \in \mathbb{C}, \quad s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_k = 0, 1, 2, \dots, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

поставим в соответствие дифференциальную операцию $A(-iD_x)$ таким образом, что будет выполняться равенство

$$A(-iD_x) \exp(is \cdot x) = A(s) \exp(is \cdot x), \quad s \cdot x = s_1 x_1 + \dots + s_n x_n.$$

Под оператором $A: H_x \rightarrow H_x$ понимается замыкание в H_x первоначально заданной на функциях из $\mathcal{P}^\infty$ операции $A(-iD_x)$. Совокупность экспонент $\{\exp(is \cdot x), s \in S\}$ образует, очевидно, ортогональный базис и является одновременно набором собственных элементов оператора A , соответствующих набору собственных чисел $A(S) = \{A(s); s \in S\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [3]. Спектр σA оператора A совпадает с $\overline{A(S)}$ – замыканием на $\mathbb{C}$ множества $A(S)$, образующего точечный спектр $P\sigma A$ оператора A . При этом непрерывный $C\sigma A$ совпадает с разностью $\overline{A(S)} \setminus A(S)$.

3.3. Операционное исчисление для оператора L . Введенное пространство H_x будет играть роль пространства $\mathfrak{H}$. Пространство $H = H_t \otimes H_x$ можно рассматривать как гильбертово пространство комплекснозначных функций $u: \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{C}$ с интегрируемым квадратом над $V = V_t \times V_x$. Оператор L можно рассматривать как замыкание в H на множестве функций $u = u(t, x)$ из $\mathfrak{D}$, где $\varphi_s = \varphi_s(x) = \exp(is \cdot x)$, операции $at^\alpha D_t^2 + A(-iD_x)$, т.е. u принадлежит области определения $\mathfrak{D}(L)$ (замкнутого) оператора $L: H \rightarrow H$ и $Lu = f$, если существует последовательность $\{u_k\}$ функций $u_k = u_k(t, x)$ из $\mathfrak{D}$ такая, что

$$u_k \xrightarrow{H} u, \quad at^\alpha D_t^2 u_k + A(-iD_x)u_k \xrightarrow{H} f \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Пусть $u \in \mathfrak{D}$ и $u = v(t) \cdot \varphi_s(x)$, т.е. $u \in H_s \cap \mathfrak{D}$. Тогда имеем

$$Lu = \hat{L}_s u = \varphi_s \cdot L_s v, \quad |\hat{L}_s u; H| = |L_s v; H_t| \cdot |\varphi_s; H_x|,$$

где $v = v(t)$ и нормы берутся в пространствах H, H_t и H_x соответственно. Следовательно, операторы $\hat{L}_s$ в рамках наших исследований можно заменить операторами L_s и наоборот. Этим мы воспользуемся при изучении спектральных свойств оператора L . А именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Резольвентные множества операторов L и $L_s, s \in S$, связаны между собой следующим образом:

$$(\lambda \in \rho L) \iff \left(\lambda \in \bigcap_s \rho L_s \right) \wedge \left(\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| < +\infty \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из определения операторов $\hat{L}_s: \hat{L}_s \subset L, s \in S$, и установленной взаимозаменяемости операторов $\hat{L}_s$ и L_s .

Достаточность. Для произвольного элемента $f \in H$ его представление в виде ряда $f = \sum_s \hat{f}_s, \hat{f}_s \in H_s$, единственно. Из неравенства

$$|u; H|^2 = \sum_s |(\hat{L}_s - \lambda)^{-1} \hat{f}_s; H|^2 \leq \sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\|^2 \cdot |f; H|^2$$

следует, что элемент $u = \sum_s (\hat{L}_s - \lambda)^{-1} \hat{f}_s$ является единственным решением уравнения $Lu = \lambda u + f$.

Из доказанного немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\lambda \in \rho L$, то решение и уравнения (1) может быть представлено в виде ряда

$$u = \sum_s (\hat{L}_s - \lambda)^{-1} \hat{f}_s = \sum_s (L_s - \lambda)^{-1} f_s \cdot \varphi_s,$$

где $\hat{f}_s$ – проекция элемента f в H_s : $\hat{f}_s = f_s \cdot \varphi_s$, $f_s \in H_t$; $f_s = (f, \varphi_s^*; H_x)$, $\{\varphi_s, \varphi_s^*; s \in S\}$ – биортогональная в H_x система функций.

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедливы следующие высказывания:

$$\begin{aligned} (\lambda \in P\sigma L) &\iff (\exists s \in S \quad (\lambda \in P\sigma L_s)), \\ (\lambda \in C\sigma L) &\iff \left[(\forall s \in S \quad (\lambda \in \rho L_s)) \wedge \left(\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| = +\infty \right), \right. \\ &\quad \left. (\forall s \in S \quad (\lambda \notin P\sigma L_s)) \wedge (\exists s \in S \quad (\lambda \in C\sigma L_s)) \right]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если $\lambda \in P\sigma L$, то из единственности разложения $u = \sum_s \hat{u}_s$, $\hat{u}_s \in H_s$, справедливого для любого $u \in H$, вытекает, что $\exists s \in S$ ($\lambda \in P\sigma \hat{L}_s$). В силу сделанного ранее замечания $\lambda \in P\sigma L_s$. Если $\lambda \in C\sigma L$, то оператор $(\hat{L}_s - \lambda)^{-1}$ существует при любом $s \in S$. Откуда

$$(\forall s \in S \quad (\lambda \in \rho L_s)) \vee (\forall s \in S \quad (\lambda \notin P\sigma L_s)) \wedge (\exists s \in S \quad (\lambda \in C\sigma L_s)).$$

Если $\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| < +\infty$, то из теоремы 1 имеем $\lambda \notin C\sigma L$.

Достаточность немедленно вытекает из определения операторов $\hat{L}_s$: $\hat{L}_s \subset L$, и установленной взаимозаменяемости операторов $\hat{L}_s$ и L_s .

3.4. Спектр оператора L . Рассмотрения п 2.2 и 2.3 позволяют немедленно получить соответствующие результаты и в общем случае. А именно, справедливы следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Точечный спектр $P\sigma L$ оператора L может быть представлен формулой $P\sigma L = P\sigma(at^\alpha D_t) + P\sigma A$.

При $\alpha < 2$ совокупность собственных значений оператора L , определяемых уравнением (7), является счетным (двухпараметрическим) множеством, допускающим при $k \rightarrow \infty$ асимптотическое представление вида

$$\lambda_{k,s} = -a \left(\frac{(2-\alpha)^2 \pi^2}{4b^{2-\alpha}} k^2 + \frac{\alpha(2-\alpha)\pi^2}{8b^{2-\alpha}} k + \frac{\alpha(4-\alpha)}{16b^{2-\alpha}} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{64b^{2-\alpha}} \right) + A(s) + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

равномерное относительно параметра $s \in S$.

При $\alpha = 2$ совокупность собственных значений оператора L является двухпараметрическим множеством мощности континуума: $P\sigma L = \{\lambda_{\varrho,s} : \varrho \in \mathbb{P}, s \in S\}$, каждый элемент которого допускает представление вида $\lambda_{\varrho,s} = a\varrho + A(s)$, где $\varrho \in \mathbb{P}$, $s \in S$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $\alpha \leq 2$, то остаточный спектр $R\sigma L$ оператора L есть пустое множество, т.е. $(\alpha \leq 2) \implies (R\sigma L = \emptyset)$.

Приведем теперь пример свойства уравнения (1), отмеченного в п. 2.2, для двумерного случая. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u + f(t, x). \quad (21)$$

Обозначим через T_0 совокупность функций $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ класса $C^0(\overline{\Delta}) \cap C^2(\Delta)$, где $\Delta = V_t \times (0, \pi)$, удовлетворяющих условию Дирихле: $u|_{\partial\Delta} = 0$. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для любого $\lambda \notin \mathbb{P}'_0 = \mathbb{P}_0 - 1$ уравнение (21) при $f(t, x) = 0$ не имеет нетривиального решения в классе T_0 .

Если обозначить символом $\tilde{K}_D$ оператор, порожденный дифференциальным выражением, стоящим в левой части уравнения (21), областью определения которого является T_0 , т.е. $\mathfrak{D}(\tilde{K}_D) = T_0$ и

$$\tilde{K}_D u = t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

а K_D – его замыкание в $\mathcal{L}_2(\Delta)$, то предложение 6 может быть записано и в следующей форме: $P\sigma \tilde{K}_D = \mathbb{P}'_0$, причем $P\sigma \tilde{K}_D \subset P\sigma K_D$, где “ $\subset$ ” – знак собственного подмножества.

Отметим, что существование решения задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа

$$t^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu = 0$$

с аналитическими коэффициентами a, b, c ($c \leq 0$), вырождающегося на границе рассматриваемой области Δ , было изучено в [13].

3.5. Свойства ССФ оператора L . При изучении свойств ССФ оператора L ограничимся, как и для обыкновенного дифференциального оператора, случаем $\alpha < 2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $\alpha < 2$.

1. Собственная функция $u_{k,s}(t, x)$ оператора L , соответствующая собственному значению $\lambda_{k,s} = a\rho_k + A(s)$, имеет вид $u_{k,s}(t, x) = v_1(t, \rho_k) \cdot \varphi_s(x)$, где $v_1(t, \rho_k)$ может быть представлена либо в виде степенного ряда (см. (3a)), либо в виде контурного интеграла (см. (8a)).

2. Совокупность $\{u_{k,s}; k \in \mathbb{N}, s \in S\}$ собственных функций $u_{k,s} = u_{k,s}(t, x)$ оператора $L = L(\alpha, a, A)$ образует:

- а) полную систему в H ;
- б) (минимальную систему в H) $\iff (\alpha < 3/2)$;
- в) (гильбертову систему в H) $\iff (0 \leq \alpha < 3/2)$;
- г) (бесселеву систему в H) $\iff (\alpha \leq 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление собственных функций оператора L очевидно. Доказательство полноты в H ССФ оператора L , основанное на полноте в H_t ССФ оператора $t^\alpha D_t$, проводится так же, как и в [4]. Оставшиеся свойства ССФ оператора L , вытекающие из аналогичных свойств ССФ оператора L в одномерном случае, доказываются тем же методом, каким оно было проведено для дифференциально-операторного уравнения первого порядка по t в работе [14].

Отметим, что проведенные рассуждения нетрудно перенести на тот случай, когда a , так же как и A , является M -оператором, т.е. $a, A: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$, причем, естественно, они должны обладать общей полной ССФ, образующей базис Рисса в $\mathfrak{H}$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору А. А. Дезину и профессору В. К. Романко за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1955.
- [2] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
- [3] Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980.
- [4] Дезин А. А. О слабой и сильной иррегулярности // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 10. С. 1851–1858.
- [5] Романко В. К. О собственных значениях краевых задач для некоторых уравнений, меняющих тип // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 10. С. 1759–1764.
- [6] Kornienko V. V. // International Conference on Some Topics of Mathematics. Abstracts. Samarkand, 1996. P. 84.
- [7] Дезин А. А. Вырождающиеся операторные уравнения // Матем. сб. 1981. Т. 115 (157). № 3 (7). С. 323–336.
- [8] Тепоян Л. П. Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения четвертого порядка. Дисс. ... к.ф.-м.н. М., 1986.
- [9] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1945.
- [10] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1974.
- [11] Наймарк М. А. Лиейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [12] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958.
- [13] Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
- [14] Корниенко В. В. К слабой и сильной иррегулярности // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 3. С. 599–609.

Самаркандский государственный университет им. А. Навои
E-mail: korni@mchmat.samuni.silk.org

Поступило
06.03.1997
Исправленный вариант
30.11.1999