Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Кордюков, А. А. Яковлев, Задача о числе целых точек в семействах анизотропно расширяющихся областей и ее приложения в спектральной теории, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 4, 632–635

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9890>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:09:56

Задача о числе целых точек в семействах анизотропно расширяющихся областей и ее приложения в спектральной теории

Ю. А. Кордюков, А. А. Яковлев

1. Постановка задачи и основные результаты. Данная работа посвящена задаче о числе целых точек в семействах анизотропно расширяющихся областей и ее приложениям в спектральной теории дифференциальных операторов.

Пусть F – p -мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ и H – q -мерное ортогональное дополнение к F относительно стандартного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^n$, $p + q = n$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим линейное преобразование $T_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что

$$T_\varepsilon(x) = x, \quad \text{если } x \in F, \quad \text{и} \quad T_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}x, \quad \text{если } x \in H.$$

Для любого ограниченного множества S в $\mathbb{R}^n$ положим

$$n_\varepsilon(S) = \#(T_\varepsilon(S) \cap \mathbb{Z}^n), \quad \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим свободную абелеву группу $\Gamma = \mathbb{Z}^n \cap F$ ранга $r \leq p$. Пусть V – r -мерное подпространство $\mathbb{R}^n$, порожденное элементами группы Γ . Группа Γ является решеткой в V . Обозначим через Γ^* решетку в пространстве V , двойственную к Γ : $\Gamma^* = \{\gamma^* \in V : (\gamma^*, \Gamma) \subset \mathbb{Z}\}$.

Для любого $x \in V$ через P_x обозначим $(n - r)$ -мерное аффинное подпространство $\mathbb{R}^n$, проходящее через точку x перпендикулярно V .

ТЕОРЕМА 1. Для любого подмножества S в $\mathbb{R}^n$ такого, что для любого $\gamma^* \in \Gamma^*$ множество $P_{\gamma^*} \cap S$ является ограниченным открытым подмножеством в P_{γ^*} , измеримым по Жордану, имеет место формула

$$n_\varepsilon(S) \sim \frac{\varepsilon^{-q}}{\text{vol}(V/\Gamma)} \sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} \text{vol}_{n-r}(P_{\gamma^*} \cap S), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1)$$

Здесь при $r = 0$ группы Γ и Γ^* тривиальны, и мы полагаем $\text{vol}(V/\Gamma) = 1$.

Исследование асимптотического поведения $n_\varepsilon(S)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для областей общего вида в $\mathbb{R}^n$ было начато в работе [1]. В работе [1] доказаны асимптотические формулы для $n_\varepsilon(S)$ с нетривиальной оценкой остатка в следующих двух случаях:

- 1) S — ограниченная открытая область с гладкой границей;
- 2) $P_{\gamma^*} \cap S$ является ограниченной выпуклой областью в P_{γ^*} для любого $\gamma^* \in \Gamma^*$.

В несколько иной постановке задача о подсчете числа целых точек в семействе анизотропно расширяющихся областей достаточно подробно изучалась в работах [2], [3] (см. также приведенные в них ссылки и введение в [1]).

В этой работе мы продолжаем изучение остатка в формуле (1), задаваемого формулой

$$R_\varepsilon(S) = n_\varepsilon(S) - \frac{\varepsilon^{-q}}{\text{vol}(V/\Gamma)} \sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} \text{vol}_{n-r}(P_{\gamma^*} \cap S).$$

Прежде всего, мы доказываем более точные оценки остатка $R_\varepsilon(S)$ при дополнительных предположениях на S .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-00389, 12-01-00519).

© Ю. А. Кордюков, А. А. Яковлев, 2012

ТЕОРЕМА 2. Пусть S – такое подмножество в $\mathbb{R}^n$, что для любого $\gamma^* \in \Gamma^*$ пересечение $P_{\gamma^*} \cap S$ является ограниченным открытым множеством в P_{γ^*} с гладкой границей. Тогда выполнены следующие утверждения:

- (1) если для любых $\gamma^* \in \Gamma^*$ и $x \in F \cap V^\perp$ пересечение $S \cap \{\gamma^* + x + H\}$ строго выпукло, то имеет место формула

$$R_\varepsilon(S) = O(\varepsilon^{2q/(q+1+2(p-r))-q}), \quad \varepsilon \rightarrow 0;$$

- (2) если для любого $\gamma^* \in \Gamma^*$ пересечение $P_{\gamma^*} \cap S$ строго выпукло, то

$$R_\varepsilon(S) = O(\varepsilon^{2q/(n-r+1)-q}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В работах [4], [5] Рэндол предложил рассматривать вместо остатка в аналогичной формуле для области S в случае семейства гомотетичных областей в $\mathbb{R}^n$ его средние, взятые по образам области S при вращениях или при вращениях и переносах. Он заметил, что усредненные оценки могут быть существенно лучше, чем индивидуальные оценки. В [4], [5] результаты такого рода были доказаны для ограниченных выпуклых областей с аналитической границей. Результаты Рэндола были распространены Варченко [6] на произвольные ограниченные области с гладкой границей, что высказывалось ранее Арнольдом в качестве гипотезы. Наконец, в [7] усредненные оценки остатка были доказаны для ограниченной области S в случае, если она выпукла, либо если ее граница класса $C^{3/2}$. Мы отсылаем читателя к [7], [8] за дальнейшей информацией и ссылками по этой задаче.

В данной работе мы изучаем усредненные оценки остатка $R_\varepsilon(S)$, взятые по образам области S при вращениях на элементы некоторой группы ортогональных преобразований евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Мы начнем с группы $SO(H)$ ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, которые оставляют на месте любой вектор из F (и, как следствие, переводят H в себя). Мы будем обозначать через dh меру Хаара на $SO(n)$ (а также на любой подгруппе в $SO(n)$).

ТЕОРЕМА 3. Для любого подмножества S в $\mathbb{R}^n$ такого, что для любых $\gamma^* \in \Gamma^*$ и $x \in F \cap V^\perp$ пересечение $S \cap \{\gamma^* + x + H\}$ является ограниченным открытым множеством в P_{γ^*} таким, что либо $S \cap \{\gamma^* + x + H\}$ выпукло, либо граница $S \cap \{\gamma^* + x + H\}$ класса $C^{3/2}$, имеет место формула

$$\int_{SO(H)} |R_\varepsilon(hS)| dh = O(\varepsilon^{2q/(q+1+2(p-r))-q}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Теперь рассмотрим группу $SO(V^\perp)$ ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, которые оставляют на месте любой вектор из V .

ТЕОРЕМА 4. Для любого подмножества S в $\mathbb{R}^n$ такого, что для любого $\gamma^* \in \Gamma^*$ пересечение $P_{\gamma^*} \cap S$ является ограниченным открытым множеством в P_{γ^*} с гладкой границей, имеет место формула

$$\int_{SO(V^\perp)} |R_\varepsilon(hS)| dh = O(\varepsilon^{2q/(n-r+1)-q}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Наконец, из теоремы 4 легко следует утверждение о усредненных оценках остатка для всей группы $SO(n)$.

ТЕОРЕМА 5. Для любого ограниченного открытого множества S в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей имеет место формула

$$\int_{SO(n)} |R_\varepsilon(hS)| dh = O(\varepsilon^{2q/(n-r+1)-q}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

2. Приложения к адиабатическим пределам. Как и выше, пусть F – линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ и $H = F^\perp$. Рассмотрим ассоциированное слоение $\mathcal{F}$ на n -мерном торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ со слоями

$$L_x = x + F \pmod{\mathbb{Z}^n}, \quad x \in \mathbb{T}^n.$$

Разложение пространства $\mathbb{R}^n$ в виде прямой суммы $\mathbb{R}^n = F \oplus H$ индуцирует разложение $g = g_F + g_H$ стандартной евклидовой метрики g на $\mathbb{T}^n$ в виде суммы касательной и трансверсальной составляющих. Определим семейство g_ε римановых метрик на $\mathbb{T}^n$ по формуле

$$g_\varepsilon = g_F + \varepsilon^{-2} g_H, \quad \varepsilon > 0.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим оператор H_ε в пространстве $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, определяемый в декартовых координатах $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$H_\varepsilon = \sum_{j,\ell=1}^n g_\varepsilon^{j\ell} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - 2\pi i a_j \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell} - 2\pi i a_\ell \right),$$

где $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $g_\varepsilon^{j\ell}$ – элементы матрицы, обратной к матрице метрики g_ε . Оператор H_ε можно рассматривать как магнитный оператор Шрёдингера на торе $\mathbb{T}^n$, ассоциированный с метрикой g_ε и с постоянным магнитным потенциалом $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_j dx_j$. Переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ часто называется *переходом к адиабатическому пределу*. Это понятие было введено Виттеном в 1985 г. при изучении глобальных аномалий в теории струн (см. [9] по поводу исторических замечаний и ссылок).

Легко видеть [1], что функция

$$N_\varepsilon(\lambda) := \#\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k(\varepsilon) < \lambda\}$$

распределения собственных значений $\{\lambda_k(\varepsilon) : k \in \mathbb{N}\}$ оператора H_ε связана с числом целых точек в эллипсоиде $T_\varepsilon(B_{\sqrt{\lambda}}(A))$ по формуле

$$N_\varepsilon(4\pi^2\lambda) = n_\varepsilon(B_{\sqrt{\lambda}}(A)), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где $B_{\sqrt{\lambda}}(A)$ – шар с центром в точке A радиуса $\sqrt{\lambda}$. В качестве непосредственного следствия теоремы 2 получается следующая асимптотическая формула для функции распределения собственных значений, которая улучшает формулу, полученную в [1].

ТЕОРЕМА 6. Для любого $\lambda > 0$ справедлива следующая асимптотическая формула при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$N_\varepsilon(\lambda) = \varepsilon^{-q} \frac{\omega_{n-r}}{\text{vol}(V/\Gamma)} \sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} \left(\frac{\lambda}{4\pi^2} - |\gamma^* - A|^2 \right)^{(n-r)/2} + O(\varepsilon^{2q/(n-r+1)-q}),$$

где ω_{n-r} – объем шара единичного радиуса в пространстве $\mathbb{R}^{n-r}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. А. Кордюков, А. А. Яковлев, *Алгебра и анализ*, **23:6** (2011), 80–95.
- [2] N. A. Nikichine, M. M. Skriganov, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **321:6** (1995), 671–675.
- [3] Н. А. Никишин, М. М. Скриганов, *Алгебра и анализ*, **10:1** (1998), 68–87.
- [4] B. Randol, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), 271–278.
- [5] B. Randol, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), 279–285.
- [6] А. Н. Варченко, *Функц. анализ и его прил.*, **17:2** (1983), 1–6.
- [7] L. Brandolini, S. Hofmann, A. Iosevich, *Geom. Funct. Anal.*, **13:4**

(2003), 671–680. [8] П. М. Грубер, К. Г. Леккеркеркер, *Геометрия чисел*, Наука, М., 2008.
[9] Yu. A. Kordyukov, A. A. Yakovlev, *C^* -Algebras and Elliptic Theory. II*, Trends Math., Birkhäuser-Verlag, Basel, 2008, 123–144.

Ю. А. Кордюков

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа

E-mail: yurikor@matem.anrb.ru

Поступило

07.04.2012

А. А. Яковлев

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа

E-mail: yakovlevandrey@yandex.ru