Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Селицкий, Пространство начальных данных 3-й краевой задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения в одномерном случае, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 4, 636–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9891>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:17:47

Пространство начальных данных 3-й краевой задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения в одномерном случае

А. М. Селицкий

1. Постановка задачи. Пусть $Q = (0, d)$, положим $d = N + \theta$, где N – целое положительное число, $0 < \theta \leq 1$. При $\theta = 1$ интервал Q разобьем на интервалы

$$Q_{1k} = (k - 1, k), \quad k = 1, \dots, N;$$

при $\theta < 1$ – на интервалы

$$Q_{1k} = (k - 1, k - 1 + \theta), \quad k = 1, \dots, N + 1, \quad Q_{2k} = (k - 1 + \theta, k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Введем ограниченные разностные операторы $R_2, R_1, R_0: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ по формулам

$$(R_2 u)(x) = \sum_{k=-N}^N a_k u(x + k), \quad (R_1 u)(x) = \sum_{k=-N}^N b_k u(x + k), \quad (R_0 u)(x) = \sum_{k=-N}^N c_k u(x + k),$$

где a_k, b_k, c_k – комплексные числа.

Введем линейные ограниченные операторы $I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ – оператор продолжения функции нулем вне Q , $P_Q: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(Q)$ – оператор проекции функции на интервал Q , и операторы $R_{iQ}: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, определенные равенствами

$$R_{iQ} = P_Q R_i I_Q, \quad i = 0, 1, 2.$$

Будем рассматривать следующую задачу:

$$u_t - (R_{2Q} u_x)_x + R_{1Q} u_x + R_{0Q} u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = Q \times (0, T), \quad (1)$$

$$(-R_{2Q} u_x + \alpha u)|_{x=0} = 0, \quad (R_{2Q} u_x + \beta u)|_{x=d} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q, \quad (3)$$

где $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $0 < T < \infty$.

Чтобы сформулировать определение сильного решения задачи (1)–(3), введем неограниченный оператор $A: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, действующий по формуле

$$Av = -(R_{2Q} v_x)_x + R_{1Q} v_x + R_{0Q} v, \quad v \in D(A), \quad (4)$$

с областью определения, состоящей из функций $v \in W_2^1(Q)$ (через $W_2^\ell(Q)$ будем обозначать пространство Соболева комплекснозначных функций) таких, что $v \in W_2^2(Q_{sk})$, где Q_{sk} – интервалы, на которые мы разбили Q , и удовлетворяющих условиям

$$R_{2Q} v_x|_{x=k+0} = R_{2Q} v_x|_{x=k-0}, \quad (5)$$

$$R_{2Q} v_x|_{x=\theta+k-1+0} = R_{2Q} v_x|_{x=\theta+k-1-0} \quad (\text{при } \theta < 1), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$(-R_{2Q} v_x + \alpha v)|_{x=0} = 0, \quad (R_{2Q} v_x + \beta v)|_{x=d} = 0, \quad (6)$$

т.е.

$$D(A) = \{v \in W_2^1(Q) : v \in W_2^2(Q_{sk}) \text{ и выполняются (5) и (6)}\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00837).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор A будем называть *сильно эллиптическим*, если существуют числа $c_1 > 0$ и $c_2 \geq 0$ такие, что

$$\operatorname{Re}(Av, v)_{L_2(Q)} \geq c_1 \|v\|_{W_2^1(Q)}^2 - c_2 \|v\|_{L_2(Q)}^2, \quad v \in D(A). \quad (7)$$

Лемма 1.2 в [1] дает необходимое и достаточное условие сильной эллиптичности оператора A .

ЛЕММА 1. Для того, чтобы оператор A был сильно эллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы матрица $R + R^*$ была положительно определена, где $R = \|a_{j-i}\|_{i,j=1}^{N+1}$, а R^* – эрмитово сопряженная матрица.

В дальнейшем будем предполагать, что оператор A сильно эллиптический. Заметим также, что вместо оператора A можно рассматривать оператор $A + c_2 I$, что соответствует замене функции u в задаче (1)–(3) на $\tilde{u} = e^{c_2 t} u$, а тогда в неравенстве (7) можно считать $c_2 = 0$.

Несложно проверить, что при предположении, что выполняется неравенство (7) с $c_2 = 0$, оператор $(-A)$ (а следовательно, и оператор A) является замкнутым (см., например, теорему 4.5 гл. 1 в [2]), а тогда пространство $D(A)$ является гильбертовым с нормой графика. Введем гильбертово пространство

$$W(A) = \{w \in L_2([0, T]; D(A)) : w_t \in L_2(Q_T)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Сильным решением задачи (1)–(3) будем называть функцию $u \in W(A)$, удовлетворяющую уравнению (1) при почти всех (x, t) в Q_T и начальному условию (3).

Из теоремы 2.2 в [1] следует, что задача (1)–(3) эквивалентна абстрактному операторному уравнению

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad u(0) = \varphi,$$

рассматриваемому в $L_2([0, T]; L_2(Q)) = L_2(Q_T)$.

Пусть X и Y – банаховы пространства и $X \subset Y$ плотно и непрерывно. Обозначим через S полосу $S = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$. Через $\mathcal{H}(X, Y)$ обозначим пространство непрерывных ограниченных функций $F : \bar{S} \rightarrow Y$ аналитических в S таких, что $F(iy) \in X$ непрерывна и ограничена, как X -значная функция от y , а $F(1 + iy) \in Y$ непрерывна и ограничена, как Y -значная функция от y , с нормой

$$\|F\|_{\mathcal{H}(X, Y)} = \max \left\{ \sup_{-\infty < y < +\infty} \|F(iy)\|_X, \sup_{-\infty < y < +\infty} \|F(1 + iy)\|_Y \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Интерполяционным пространством $[X, Y]_\theta$ называется образ пространства $\mathcal{H}(X, Y)$ при отображении $F \rightarrow F(\theta)$:

$$[X, Y]_\theta = \{f \in Y : \exists F(z) \in \mathcal{H}(X, Y) \text{ такая, что } F(\theta) = f\},$$

с нормой

$$\|f\|_{[X, Y]_\theta} = \inf_{F(\theta)=f} \|F\|_{\mathcal{H}(X, Y)}.$$

Подробнее о комплексном методе интерполяции см., гл. 1 в [3] или [4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор A сильно эллиптический с $c_2 = 0$. Тогда для любых $f \in L_2(Q_T)$ и $\varphi \in [D(A), L_2(Q)]_{1/2}$ задача (1)–(3) имеет единственное сильное решение, которое определяется по формуле

$$u(x, t) = T_t \varphi(x) + \int_0^t T_{t-s} f(x, s) ds, \quad (8)$$

где $\{T_t\}$, $t \geq 0$ – аналитическая полугруппа с генератором $(-A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 3.1 и 3.2 в [1].

2. Пространство начальных данных. В теореме 1 условие принадлежности начальной функции пространству $[D(A), L_2(Q)]_{1/2}$ является необходимым и достаточным условием существования сильного решения (см. [5]).

Обозначим через $\dot{W}_2^{\ell,R}(Q)$ (соответственно $W_2^{\ell,R}(Q)$) множество функций $v \in W_2^\ell(Q)$ таких, что $v \in \dot{W}_2^\ell(Q_{sk})$ (соответственно $v \in W_2^\ell(Q_{sk})$). Тогда

$$\dot{W}_2^{1,R}(Q) = [\dot{W}_2^{2,R}(Q), L_2(Q)]_{1/2}, \quad W_2^{1,R}(Q) = [W_2^{2,R}(Q), L_2(Q)]_{1/2}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор A сильно эллиптический с $c_2 = 0$. Тогда

$$[D(A), L_2(Q)]_{1/2} = W_2^1(Q). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство вложения $[D(A), L_2(Q)]_{1/2} \subset W_2^1(Q)$ аналогично доказательству теоремы 4.3 в [6]. Докажем обратное вложение. Пусть $f \in W_2^1(Q)$. Покажем, что существует функция $F \in \mathcal{H}(D(A), L_2(Q))$ такая, что $F(1/2) = f$. Пусть функция $v \in D(A)$ и $v|_{\partial Q_{sk}} = f|_{\partial Q_{sk}}$. Положим $F_1 \equiv v$. Тогда $F_1(1/2) - f \in \dot{W}_2^{1,R}(Q)$ и существует функция $F_2 \in \dot{H}(\dot{W}_2^{2,R}(Q), L_2(Q))$ такая, что $F_2(1/2) = F_1(1/2) - f$. Положим $F = F_1 + F_2$, имеем $F \in \mathcal{H}(D(A), L_2(Q))$, так как $\dot{W}_2^{2,R}(Q) \subset D(A)$.

Для завершения доказательства построим явно функцию $v \in D(A)$ такую, что $v|_{\partial Q_{sk}} = f|_{\partial Q_{sk}}$. Рассмотрим случай $\theta < 1$. Обозначим $L_2(\bigcup_k Q_{sk})$ – подпространство функций из $L_2(Q)$, равных нулю вне

$$\bigcup_k Q_{sk}, \quad s = 1, 2, \quad k = 1, \dots, N_s, \quad N_1 = N + 1, \quad N_2 = N.$$

Оператор ортогонального проектирования на $L_2(\bigcup_k Q_{sk})$ обозначим через P_s . Введем оператор, осуществляющий изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s: L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right) \rightarrow \prod_k L_2(Q_{s1})$$

по формуле

$$(U_s u)_k(x) = u(x + k - 1), \quad x \in Q_{s1}.$$

В силу леммы 2.6 в [7; § 2], операторы $R_{2Q_s} = U_s R_{2Q} U_s^{-1}$ являются операторами умножения на матрицы. Рассмотрим векторы

$$\begin{aligned} V_1 &= (U_1 P_1 v_x)|_{x=0+}, & V_2 &= (U_2 P_2 v_x)|_{x=1-0}, \\ V_3 &= (U_1 P_1 v_x)|_{x=\theta-0}, & V_4 &= (U_2 P_2 v_x)|_{x=\theta+0}. \end{aligned}$$

Тогда условия (5), (6) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_N \\ a_{-1} & \dots & a_{N-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{-N+1} & \dots & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{31} \\ V_{32} \\ \dots \\ V_{3,N+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_{N-1} \\ a_{-1} & \dots & a_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{-N+1} & \dots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{41} \\ V_{42} \\ \dots \\ V_{4N} \end{pmatrix} = 0, \quad (10)$$

$$(a_{-N} a_{-N+1} \dots a_0) V_3 + \beta v|_{x=d-0} = 0. \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} a_{-1} & \dots & a_{N-1} \\ a_{-2} & \dots & a_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{-N} & \dots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ \dots \\ V_{1,N+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_{N-1} \\ a_{-1} & \dots & a_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{-N+1} & \dots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \\ \dots \\ V_{2N} \end{pmatrix} = 0, \quad (12)$$

$$-(a_0 a_1 \dots a_N) V_1 + \alpha v|_{x=0+} = 0. \quad (13)$$

В силу условия сильной эллиптичности оператора A матрица R положительно определена, а тогда, положив $v|_{x=0+} = f|_{x=0+}$, $v|_{x=d-0} = f|_{x=d-0}$, получаем, что системы (10), (11) и (12), (13) имеют (вообще говоря, не единственные) решения V_1, V_2, V_3, V_4 .

Рассмотрим функцию $w \in L_2(Q)$, определенную следующим равенством:

$$w(x) = \begin{cases} V_{1k}(x - k + 1) + f|_{x=k-1+0}, & x \in \left(k - 1, k - 1 + \frac{\theta}{2}\right), \\ V_{3k}(x - k + 1 - \theta) + f|_{x=k-1+\theta-0}, & x \in \left(k - 1 + \frac{\theta}{2}, k - 1 + \theta\right), \\ V_{4k}(x - k + 1 - \theta) + f|_{x=k-1+\theta+0}, & x \in \left(k - 1 + \theta, k - \frac{\theta}{2}\right), \\ V_{2k}(x - k) + f|_{x=k-0}, & x \in \left(k - \frac{\theta}{2}, k\right), \end{cases}$$

т.е. функция w состоит из отрезков прямых, имеющих на границах отрезка Q_{sk} коэффициент наклона V_{ik} , $i = 1, 2, 3$ или 4 , и принимающие значения, которые принимает функция f .

На отрезке Q зададим функции $\xi_{1k} \in \dot{C}^\infty(\bar{Q})$ такие, что

$$\begin{aligned} \xi_{1k}(x) &= 1 & \text{при } x \in [k - 1 + 2\delta, k - 1 + \theta - 2\delta], \\ \xi_{1k}(x) &= 0 & \text{при } x \notin (k - 1 + \delta, k - 1 + \theta - \delta), \quad \delta = \frac{\theta}{4}, \end{aligned}$$

а также функции $\xi_{2k} \in \dot{C}^\infty(\bar{Q})$ такие, что

$$\begin{aligned} \xi_{2k}(x) &= 1 & \text{при значениях } x \in [k - 1 + \theta + 2\sigma, k - 2\sigma], \\ \xi_{2k}(x) &= 0 & \text{при } x \notin (k - 1 + \theta + \sigma, k - \sigma), \quad \sigma = \frac{1 - \theta}{4}. \end{aligned}$$

Положим

$$v(x) = w(x) \cdot \sum_{s,k} (1 - \xi_{sk}(x)).$$

По построению $v \in D(A)$ и $v|_{\partial Q_{sk}} = f|_{\partial Q_{sk}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В гл. VI монографии [8] Като была сформулирована проблема: “Верно ли, что $D(A^{1/2})$ и $D((A^*)^{1/2})$ совпадают?” В [9] был построен пример аккретивного оператора, не удовлетворяющего данному условию, в [10] был построен пример m -секториального оператора $\mathcal{A}$, для которого $D(\mathcal{A}^{1/2}) \neq D(\mathcal{A}^{*1/2})$. Положительное решение этого вопроса для сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений с измеримыми коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ было дано в [11], а для сильно эллиптических уравнений в липшицевых областях – в [12]. В статье [13] гипотеза Като была доказана для широкого класса сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений. При выполнении условий теоремы 2 справедливо равенство $D(A^{1/2}) = D((A^*)^{1/2})$ для операторов A , рассмотренных в настоящей работе (оператор A^* определяется по полуторалинейной форме, связанной с оператором A , см., например, [14], и для A^* справедлива теорема 3.1 настоящей работы).

Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также М. С. Аграновичу за указание на работы Р. Сили по комплексной интерполяции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. M. Selitskii, *Funct. Differ. Equ.*, **14**:2-4 (2007), 373–395. [2] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Appl. Math. Sci., **44**, Springer-Verlag, Berlin, 1983. [3] Ж.-Л. Люнс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Т. 1, Мир, М., 1971. [4] R. Seeley, *Studia Math.*, **44** (1972), 47–60.

- [5] A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii, *Well-Posedness of Parabolic Difference Equations*, Oper. Theory Adv. Appl., **69**, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1994. [6] A. L. Skubachevskii, R. V. Shamin, *Funct. Differ. Equ.*, **8**:3-4 (2001), 407–424. [7] A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **91**, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1997. [8] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. [9] J. L. Lions, *J. Math. Soc. Japan*, **14**:2 (1962), 233–241. [10] A. McIntosh, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32** (1972), 430–434. [11] P. Auscher, S. Hofmann, A. McIntosh, P. Tchamitchian, *J. Evol. Equ.*, **1**:4 (2001), 361–385. [12] A. Axelsson, S. Keith, A. McIntosh, *J. London Math. Soc.* (2), **74**:1 (2006), 113–130. [13] Р. В. Шамин, *Матем. сб.*, **194**:9 (2003), 141–156. [14] Е. Л. Цветков, *Матем. заметки*, **51**:6 (1992), 107–114.

А. М. Селицкий

Вычислительный центр

им. А. А. Дородницына РАН, г. Москва

E-mail: selitsky@mail.ru

Поступило

20.04.2012