Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Э. Кирьяцкий, Э. Г. Кирьяцкий, О максимальной K_n -области одного семейства рациональных функций, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 196–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm99>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:17:27

УДК 517.54

О МАКСИМАЛЬНОЙ K_n -ОБЛАСТИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. Э. Кирьяцкий, Э. Г. Кирьяцкий

В данной работе находится круг максимального радиуса с центром в начале координат, в котором любая рациональная функция из некоторого семейства принадлежит классу функций с не равной нулю разделенной разностью n -порядка.

Библиография: 10 названий.

Определим *разделенную разность n -порядка* (*n -ую разделенную разность*) однозначной аналитической в области D функции $F(z)$ формулой [1]

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\xi) d\xi}{(\xi - z_0) \cdots (\xi - z_n)},$$

где Γ — простой замкнутый контур, целиком лежащий в D и охватывающий точки $z_0, \dots, z_n \in D$.

Разделенную разность n -порядка в случае выпуклой области D можно представить в виде [2]

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} F^{(n)}(\zeta) dt_1 \cdots dt_n,$$

где

$$\zeta = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \cdots + t_n(z_n - z_{n-1}), \quad 0 \leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq t_2 \leq t_1, \quad 0 \leq t_n \leq t_{n-1}.$$

В случае попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$ разделенную разность n -порядка можно записать также в виде [2]

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{[F(z); z_0, \dots, z_{n-1}] - [F(z); z_1, \dots, z_n]}{z_0 - z_n}.$$

В частности,

$$[F(z); z_0, z_1] = \frac{[F(z); z_0] - [F(z); z_1]}{z_0 - z_1} = \frac{F(z_0) - F(z_1)}{z_0 - z_1}.$$

Через $K_n(D)$ обозначается класс однозначных аналитических в области D функций $F(z)$, для которых n -ая разделенная разность $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$. При $n = 1$ имеем, как легко видеть, класс $K_1(D)$ однолистных в области D функций [3].

Класс $K_n(D)$ был впервые введен в 1961 г. Э. Г. Кирьяцким в работе [4] и в дальнейшем изучался многие годы (исследуется и в настоящее время) как самим автором, так и другими математиками [5]–[7]. Этот класс, является естественным обобщением класса однолистных функций и обладает многими замечательными свойствами. Приведем некоторые из свойств, которые понадобятся нам в данной работе.

Свойство 1. Если $F(z) \in K_n(D)$, то $F^{(n)}(z) \neq 0$ при всех $z \in D$.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места, однако справедливо

Свойство 2. Если функция $F(z)$ аналитична в области D и $F^{(n)}(\zeta) \neq 0$ в некоторой точке $\zeta \in D$, то $F(z)$ принадлежит классу K_n в достаточно малой окрестности точки ζ .

Свойство 3. Для того чтобы $F(z) \in K_n(D)$, необходимо и достаточно, чтобы функции $1, z, \dots, z^{n-1}, F(z)$ образовывали систему Чебышева в области D .

Свойство 4. Если $F(z) \in K_n(D)$, то и функция

$$F_*(\zeta) = (c\zeta + d)^{n-1} F\left(\frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}\right) \in K_n(D_*),$$

где D_* – прообраз области D при отображении

$$z = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Область D называется K_n -областью семейства T аналитических в D функций, если любая функция $F(z)$ из этого семейства принадлежит классу K_n в области D , т.е. $F(z) \in K_n(D)$. Область D называется максимальной K_n -областью семейства T аналитических в D функций, если она обладает следующим свойством: при присоединении к области D какой-либо окрестности произвольной граничной точки, всегда найдется функция из T , уже не принадлежащая классу K_n в таком образом расширенной области. Семейство T может состоять только из одной функции. Для одного и того же семейства может существовать более одной максимальной K_n -области. Возьмем, например, простой случай, когда семейство T состоит из одной функции $F(z) = z^2$. Тогда его максимальной K_1 -областью (т.е. максимальной областью однолиственности) может служить любая полуплоскость, ограниченная прямой, проходящей через начало координат. Максимальные области однолиственности исследовались в работах [8]–[10].

В данной работе рассматривается семейство T рациональных функций вида

$$F(z) = \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^{m_k} \frac{A_{k,s}}{(z - a_k)^s} \neq 0, \quad (1)$$

где $a_k = \delta_k e^{i\varphi_k}$, $\delta_k > 0$, $A_{k,s} = d_{k,s} e^{i\beta_{k,s}}$, причем $\beta_{k,s}$ удовлетворяет условию

$$\beta_{k,s} - (s + n)(\pi + \varphi_k) \equiv \varphi \pmod{2\pi}, \quad \varphi \equiv \text{const}, \quad (2)$$

для всех k, s и некоторого натурального n . Для этого семейства устанавливается максимальная K_n -область.

Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Круг*

$$U : |z| < r_n = \min_{k=1, \dots, p} \delta_k \sin \frac{\pi}{2(m_k + n)} \quad (3)$$

является максимальной K_n -областью семейства T функций (1).

Для доказательства теоремы нам понадобятся леммы.

ЛЕММА 1. Если $|\xi| \leq \sin(\pi/(2h))$ и $h > 1$, то

$$\operatorname{Re}\{(1 - \xi)^{-h}\} \geq 0.$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$\xi = \exp\left\{\pm i \frac{\pi(h-1)}{2h}\right\} \sin \frac{\pi}{2h}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим в единичном круге $|z| < 1$ новый круг

$$|z| \leq \sin \frac{\pi}{2h}.$$

Тогда понятно, что из точки $\xi = 1$ этот круг виден под углом π/h , так как он образован двумя касательными к построенному кругу с вершиной в точке $\xi = 1$. Значит, для любой точки ξ_0 , взятой внутри построенного круга, $\arg(1 - \xi_0)$ по абсолютной величине не превосходит $\pi/(2h)$, т.е.

$$\arg(1 - \xi_0) \leq \frac{\pi}{2h}.$$

Поэтому

$$\left| \arg \frac{1}{(1 - \xi_0)^h} \right| = h |\arg(1 - \xi_0)| \leq h \frac{\pi}{2h} = \frac{\pi}{2}.$$

Но тогда

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{(1 - \xi_0)^h}\right\} \geq 0.$$

Очевидно, знак равенства будет иметь место лишь в точках касания. Точки же касания имеют вид

$$\xi_{1,2} = \exp\left\{\pm i \frac{\pi(h-1)}{2h}\right\} \sin \frac{\pi}{2h}.$$

ЛЕММА 2. Пусть функция $F(z)$ аналитическая в выпуклой области D и существует действительное ψ такое, что

$$\operatorname{Re}\{e^{i\psi} F^{(n)}(z)\} > 0 \quad \forall z \in D.$$

Тогда $F(z) \in K_n(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как D – выпуклая область, то по указанной выше формуле и с учетом условия леммы 2 получим

$$\operatorname{Re}\{e^{i\psi} F(z); z_0, \dots, z_n\} = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re}\{e^{i\psi} F^{(n)}(\zeta)\} dt_1 \dots dt_n > 0.$$

Осюда следует, что $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$, и поэтому $F(z) \in K_n(D)$.

Имеет место основная

ЛЕММА 3. Круг U является K_n -областью семейства T функций (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надо показать, что любая функция $F(z)$ вида (1) принадлежит классу K_n в круге (3). Для этого возьмем n -ую производную функции $F(z)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} (-1)^n F^{(n)}(z) &= \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^{m_k} \frac{A_{k,s} N_{s,n}}{(z - a_k)^{s+n}} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^{m_k} \frac{d_{k,s} \exp\{i[\beta_{k,s} - (s+n)(\pi + \varphi_k)]\} N_{s,n}}{\delta_k^{s+n}} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{-s-n}, \end{aligned}$$

где $N_{s,n} = s(s+1) \cdots (s+n-1)$. Учитывая условие (2), имеем

$$(-1)^n e^{-i\varphi} F^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^{m_k} \frac{d_{k,s} N_{s,n}}{\delta_k^{s+n}} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{-s-n}. \quad (4)$$

Согласно лемме 1 вещественные части слагаемых, стоящих под знаком сумм в (4), положительны при

$$\left| \frac{z}{a_k} \right| < \sin \frac{\pi}{2(s+n)}, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Далее, так как $s \leq m_k$, то

$$\sin \frac{\pi}{2(m_k+n)} \leq \sin \frac{\pi}{2(s+n)}, \quad s = 1, 2, \dots, m_k.$$

Поэтому, если взять круг (3), то правая часть (4) будет иметь положительную вещественную часть. Значит, и $\operatorname{Re}\{(-1)^n e^{-i\varphi} F^{(n)}(z)\} > 0$ в круге (3). По лемме 2 следует, что $F(z) \in K_n$ в круге (3). Значит, круг U является K_n -областью семейства T функций (1). Лемма доказана.

Покажем, теперь, что круг U является максимальной K_n -областью семейства T функций (1). Для этого достаточно для любой точки ζ , лежащей на границе круга U , указать такую функцию из T , для которой $F^{(n)}(\zeta) = 0$. Поступим следующим образом. Зафиксируем какую-либо точку ζ , $|\zeta| = r_n$, и установим, какого вида должна быть функция $F(z)$ из T , чтобы $F^{(n)}(\zeta) = 0$. Из (4) и по предположению

$$(-1)^n e^{-u\varphi} F^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^{m_k} \frac{d_{k,s} N_{s,n}}{\delta_k^{s+n}} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{-s-n} = 0. \quad (5)$$

Далее

$$|\zeta| = r_n \leq \delta_k \sin \frac{\pi}{2(m_k+n)} \leq \delta_k \sin \frac{\pi}{2(s+n)}, \quad s = 1, 2, \dots, m_k,$$

где знак равенства в правой части двойного неравенства имеет место только в случае $s = m_k$. Применяя лемму 1, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right)^{-s-n} \right\} &> 0, \quad 1 \leq s < m_k, \quad k = 1, 2, \dots, p. \\ \operatorname{Re} \left\{ \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right)^{-s-n} \right\} &> 0, \quad s = m_k, \quad k = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Значит, равенство (5) может быть справедливым лишь тогда, когда $A_{k,s} = 0$, $1 \leq s < m_k$, и

$$\operatorname{Re} \left\{ \left(1 - \frac{\zeta}{a_k} \right)^{-m_k-n} \right\} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (6)$$

Из сказанного следует, что функция $F(z)$ необходимо имеет вид

$$F(z) = \sum_{k=1}^p \frac{A_{k,m_k}}{(z-a_k)^{m_k}}. \quad (7)$$

Согласно лемме 1 равенство в (6) возможно лишь в том случае, когда

$$\frac{\zeta}{a_k} = \sin \frac{\pi}{2(m_k+n)} \exp \left\{ i\varepsilon \frac{(m_k+n-1)}{2(m_k+n)} \right\}, \quad (8)$$

где $\varepsilon = \pm 1$ и $k = 1, 2, \dots, p$. Взяв обе части равенства (8) по модулю, убедимся в том, что

$$r_n = \delta_k \sin \frac{\pi}{2(m_k+n)}, \quad s = 1, 2, \dots, p. \quad (9)$$

Пусть кратность некоторого полюса функции (7) равна m_σ . Тогда из (9) ясно, что все полюсы (обозначим их через $a_{k,\sigma}$, $k = 1, 2, \dots, \nu_\sigma$), имеющие кратность m_σ , равны между собой по модулю. Это дает возможность записать функцию (7) с помощью следующей двойной суммы:

$$F(z) = \sum_{\sigma=1}^{\tau} \sum_{k=1}^{\nu_\sigma} \frac{a_{k,\sigma}}{(z-a_{k,\sigma})_\sigma^{m_\sigma}}, \quad (10)$$

причем считаем $a_{k,\sigma} \neq a_{\sigma,k}$ при $k \neq \sigma$, где $a_{k,\sigma} = \delta_\sigma e^{i\varphi_{k,\sigma}}$ для $k = 1, 2, \dots, \nu_\sigma$. Кроме того, $A_{k,\sigma} = d_{k,\sigma} e^{i\beta_{k,\sigma}}$, $\delta_\sigma < \delta_\gamma$ и $m_\sigma < m_\gamma$, если $\sigma < \gamma$. Возьмем снова n -ую производную функции $F(z)$, записанную в форме (10), и положим $z = \zeta$. Тогда, вспоминая, что $F^{(n)}(\zeta) = 0$, получим

$$(-1)^n e^{i\varphi} F^{(n)}(\zeta) = \sum_{\sigma=1}^{\tau} \sum_{k=1}^{\nu_\sigma} N_{m_\sigma,n} d_{k,\sigma} \delta_\sigma^{-m_\sigma-n} \left(1 - \frac{\zeta}{a_{k,\sigma}} \right)^{-m_\sigma-n}. \quad (11)$$

Теперь равенство (8) в новых обозначениях запишется следующим образом:

$$\zeta = a_{k,\sigma} \sin \frac{\pi}{2(m_\sigma+n)} \exp \left\{ \frac{\varepsilon_{k,\sigma} \pi (m_\sigma+n-1)}{2(m_\sigma+n)} i \right\}, \quad (12)$$

где $k = 1, 2, \dots, \nu_\sigma$, $\sigma = 1, 2, \dots, \tau$, $\varepsilon_{k,\sigma} = \pm 1$.

Из (12) легко следует, что

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\zeta}{a_{k,\sigma}} &= 1 - \sin \frac{\pi}{2(m_\sigma+n)} \exp \left\{ \frac{\varepsilon_{k,\sigma} \pi (m_\sigma+n-1)}{2(m_\sigma+n)} i \right\} \\ &= \cos \frac{\pi}{2(m_\sigma+n)} \exp \left\{ -\varepsilon_{k,\sigma} \frac{\pi}{2(m_\sigma+n)} i \right\}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\left(1 - \frac{\zeta}{a_{k,\sigma}}\right)^{-m_\sigma - n} = \left(\cos \frac{\pi}{2(m_k + n)}\right)^{-m_\sigma - n} \varepsilon_{k,\sigma} i.$$

В последнем равенстве все числа $\varepsilon_{k,\sigma}$ не могут быть одного знака, так как в этом случае все значения выражения

$$\left(1 - \frac{\zeta}{a_{k,\sigma}}\right)^{-m_\sigma - n}$$

будут лежать на одной и той же мнимой полуоси, и тогда равенство (11) невозможно. Далее равенство (9) перепишем в виде

$$r_n = \delta_\sigma \sin \frac{\pi}{2(m_\sigma + n)}. \quad (13)$$

Следовательно,

$$\delta_\sigma^{-m_\sigma - n} \left(1 - \frac{\zeta}{a_{k,\sigma}}\right)^{-m_\sigma - n} = i \varepsilon_{k,\sigma} \left(\frac{1}{r_n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(m_\sigma + n)}\right)^{-m_\sigma - n},$$

и равенство (11) можно заменить равенством

$$\sum_{\sigma=1}^{\tau} \sum_{k=1}^{\nu_\sigma} \varepsilon_{k,\sigma} N_{m_\sigma, n} d_{k,\sigma} \left(\frac{1}{r_n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(m_\sigma + n)}\right)^{m_\sigma + n} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим снова равенство (12). Левая часть этого равенства k и σ . Положим в правой части этого равенства $k = 1$, $\sigma = 1$ и, учитывая (13), получим

$$\zeta = r_n e^{i\varphi_{1,1}} \exp \left\{ \frac{\varepsilon_{1,1} \pi (m_1 + n - 1)}{2(m_1 + n)} i \right\}. \quad (15)$$

Из (12) и (15) имеем равенство

$$e^{i\varphi_{1,1}} \exp \left\{ \varepsilon_{1,1} \frac{\pi (m_1 + n - 1)}{2(m_1 + n)} i \right\} = e^{i\varphi_{k,\sigma}} \exp \left\{ \varepsilon_{1,1} \frac{\pi (m_\sigma + n - 1)}{2(m_\sigma + n)} \right\},$$

из которого следует

$$\varphi_{k,\sigma} - \varphi_{1,1} \equiv \varepsilon_{1,1} \frac{\pi (m_1 + n - 1)}{2(m_1 + n)} - \varepsilon_{k,\sigma} \frac{\pi (m_\sigma + n - 1)}{2(m_\sigma + n)} \pmod{2\pi}. \quad (16)$$

Учитывая (16), можно переписать условие (2) для $\beta_{k,\sigma}$ следующим образом:

$$\beta_{k,\sigma} - (m_\sigma + n) \left(\pi + \varphi_{1,1} + \varepsilon_{1,1} \frac{\pi (m_1 + n - 1)}{2(m_1 + n)} - \varepsilon_{k,\sigma} \frac{\pi (m_\sigma + n - 1)}{2(m_\sigma + n)} \right) \equiv \varphi \pmod{2\pi}. \quad (17)$$

Из (13) выразим δ_σ :

$$\delta_\sigma = r_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2(m_\sigma + n)}. \quad (18)$$

Подставив (16), (17) и (18), убедимся в том, что если функция $F(z) \in T$ и $F^{(n)}(\zeta) = 0$, то она необходимо имеет вид

$$F(z) = \sum_{\sigma=1}^{\tau} \frac{e^{i\varphi} d_{k,\sigma} e^{i\psi_{k,\sigma}}}{(z + b_{k,\sigma})^{m_{\sigma}}}, \quad (19)$$

где

$$\psi_{k,\sigma} = (m_{\sigma} + n) \left(\pi + \varphi_{1,1} + \frac{\varepsilon_{1,1}\pi(m_1 + n - 1)}{2(m_1 + n)} - \frac{\varepsilon_{k,\sigma}\pi(m_{\sigma} + n - 1)}{2(m_{\sigma} + n)} \right), \quad (20)$$

$$b_{k,\sigma} = r_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2(m_{\sigma} + n)} \exp \left\{ i \left(\pi + \varphi_{1,1} + \frac{\varepsilon_{1,1}\pi(m_1 + n - 1)}{2(m_1 + n)} - \frac{\varepsilon_{k,\sigma}\pi(m_{\sigma} + n - 1)}{2(m_{\sigma} + n)} \right) \right\}, \quad (21)$$

причем справедливо равенство (14).

Пусть теперь ζ произвольно фиксировано на окружности круга $|z| \leq r_n$. Тогда существуют $\varphi_{1,1}$ и $\varepsilon_{1,1}$ такие, что

$$\zeta = r_n e^{i\psi_{1,1}} \exp \left\{ \frac{\varepsilon_{1,1}\pi(m_1 + n - 1)}{2(m_1 + n)} \right\}.$$

Взяв n -ую производную функции $F(z)$, представленной формулой (19), с учетом (20), (21) и (14) после небольших вычислений получим $F^{(n)}(\zeta) = 0$. Таким образом, доказана

ЛЕММА 4. *Для того чтобы для функции $F(z)$ из семейства T имело место равенство $F^{(n)}(\zeta) = 0$, где $|\zeta| = R_n$, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид (19), (20), (21) и выполнялось условие (14).*

Из лемм 1–4 вытекает утверждение теоремы 1.

Заметим, что случай $n = 1$ рассматривался Тодоровым в [8].

СЛЕДСТВИЕ 1. *Любая функция вида*

$$F(z) = \frac{\exp\{i(m+n)(\pi + \psi)\}}{[z - r_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2(m+n)} e^{i\psi}]^m} + \frac{\exp\{i(m+n)(\pi + \psi) + i\pi(m+n-1)\}}{[z + r_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2(m+n)} \exp i(\psi + \frac{\pi(m+n-1)}{2(m+n)})]^m}$$

принадлежит семейству T , и в точке

$$\zeta = r_n e^{i\psi} \exp \left\{ \frac{i\pi(m+n-1)}{2(m+n)} \right\}$$

ее n -ая производная равна нулю, т.е. $F^{(n)}(\zeta) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Функции $1, z, \dots, z^{n-1}, F(z)$, где $F(z)$ – любая функция (1) из семейства T , образуют систему Чебышева в круге U . Радиус круга U увеличить нельзя в том смысле, что найдется в семействе T функция $F_0(z)$ такая, что функции $1, z, \dots, z^{n-1}, F_0(z)$ уже не будут образовывать систему Чебышева в расширенном круге.

Обозначим через T^+ семейство рациональных функций вида

$$F(z) = \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^{m_k} \frac{(z+1)^{n+s-1} A_{k,s}}{[(r_n - a_k)z - (r_n + a_k)]^s},$$

где $A_{k,s} = d_{k,s} e^{i\beta_{k,s}}$, $a_k = \delta_k e^{i\varphi_k}$, $\beta_{k,s} - (s+n)(\pi + \varphi_k) \equiv \varphi \pmod{2\pi}$, $\varphi = \text{const}$. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Полуплоскость $\Pi = \{\text{Re } z > 0\}$ является максимальной K_n -областью для семейства T^+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если некоторая функция $F(z)$ взята из семейства T , то она по теореме 1 принадлежит классу K_n в круге

$$U : |z| < r_n = \min_{k=1, \dots, p} \delta_k \sin \frac{\pi}{2(m_k + n)}.$$

Сделаем замену

$$z = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} r_n.$$

Тогда по свойству 4

$$F_1(\nu) = (\nu + 1)^{n-1} \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^{m_k} \frac{A_{k,s}}{(((\nu - 1)/(\nu + 1))r_n - a_k)^s} \in K_n(\Pi),$$

или

$$F_1(\nu) = \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^{m_k} \frac{(\nu + 1)^{n-1+s} A_{k,s}}{[(r_n - a_k)\nu - (r_n + a_k)]^s} \in K_n(\Pi).$$

Заменив формально ν на z , получим утверждение круга теоремы 2.

Обозначим через T_0 семейство рациональных функций вида

$$F(z) = \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^{m_k} \frac{A_{k,s} z^{n+s-1}}{(r_n - a_k z)^s},$$

где $A_{k,s} = d_{k,s} e^{i\beta_{k,s}}$, $a_k = \delta_k e^{i\varphi_k}$, $\beta_{k,s} - (s+n)(\pi + \varphi_k) \equiv \varphi \pmod{2\pi}$, $\varphi = \text{const}$. Справедлива

ТЕОРЕМА 3. Внешность круга U , заданного соотношением (3), является максимальной K_n -областью для семейства T_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ибрагимов И. И. Методы интерполирования функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
- [2] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Гостехиздат, 1952.
- [3] Александров И. А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Томский государственный университет, 2001.
- [4] Кирьяцкий Э. Г. О функциях, n -ая разделенная разность которых не равна нулю // Литовский матем. сб. 1961. Т. 1. № 1. С. 109–115.
- [5] Кирьяцкий Э. Г. Многолистные функции и разделенные разности. Вильнюс: Техника, 1995.
- [6] Гопенгауз Б. Е. О некоторых классах аналитических функций // Тр. ТГУ. 1968. Т. 200. № 3. С. 20–30.
- [7] Ruscheweyh St. On functions with nonvanishing divided differences // Math. Nachr. 1976. V. 73. P. 143–146.
- [8] Тодоров П. Г. О полюсах и радиусе круговой однолиственности мероморфного класса функций // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168. № 3. С. 532–534.
- [9] Чакалов Л. Максимальные области однолиственности некоторых классов аналитических функций // Укр. матем. ж. 1959. Т. 11. № 4. С. 326–331.
- [10] Distler R. J. The domain of univalence of certain classes of meromorphic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. № 6. P. 923–928.

Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса
E-mail: eduard.kiriyatzkii@takas.lt

Поступило
17.12.2002