Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, О нулях функции типа Миттаг-Леффлера, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 710–724

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm992>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:25:06

УДК 517.5

О НУЛЯХ ФУНКЦИИ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

А. М. Седлецкий

Ранее была известна асимптотика нулей функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C},$$

описывающая поведение нулей вне круга достаточно большого радиуса. В статье решен вопрос о числе нулей внутри такого круга, что позволило указать нумерацию всех нулей $E_\rho(z; \mu)$, согласованную с асимптотикой. Рассмотрен вопрос о распределении нулей двух функций, выражающихся через $E_1(z; \mu)$: неполной гамма-функции и функции ошибок.

Библиография: 12 названий.

1. Рассматривается функция типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C} \quad (1)$$

(см. [1]), превращающаяся при $\mu = 1$ в классическую функцию Миттаг-Леффлера $E_\alpha(z) = E_{1/\alpha}(z; 1)$. Содержательность класса целых функций (1) и его замечательные асимптотические свойства объясняют интерес к вопросу о распределении нулей функции $E_\rho(z; \mu)$, который при различных значениях ρ и μ рассматривался в работах А. Вимана [2], Г. Поля [3], М. М. Джрбашяна и А. Б. Нерсесяна (см. [1]), автора [4], И. В. Островского и И. Н. Пересёловой [5] и других.

У функции $E_1(z; \mu) = z^{1-\mu}e^z$, $\mu = 1, 0, -1, -2, \dots$, нет нулей, отличных от точки $z = 0$. Во всех остальных случаях функция (1) имеет бесконечное множество нулей.

Пусть $\rho > 1/2$, причем $\mu \neq 1, 0, -1, -2, \dots$, если $\rho = 1$. На множестве таких параметров введем константы

$$c_\mu = \begin{cases} \frac{1}{\rho\Gamma(\mu - 1/\rho)}, & \text{если } \mu \neq \frac{1}{\rho} - l, l \in \mathbb{Z}_+, \\ \frac{1}{\rho\Gamma(\mu - 2/\rho)} & \text{если } \mu = \frac{1}{\rho} - l, l \in \mathbb{Z}_+, \rho \neq 1, \end{cases}$$

$$\tau_\mu = \begin{cases} 1 + \rho(1 - \mu), & \text{если } \mu \neq \frac{1}{\rho} - l, l \in \mathbb{Z}_+, \\ 2 + \rho(1 - \mu), & \text{если } \mu = \frac{1}{\rho} - l, l \in \mathbb{Z}_+, \rho \neq 1. \end{cases}$$

Кроме того, при $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$ считаем, что c_μ и τ_μ задаются первыми строками написанных формул. По построению $c_\mu \neq 0$ для всех рассмотренных значений ρ и μ . В [4] доказана следующая

ТЕОРЕМА А. Пусть $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$, причем $\mu \neq 1, 0, -1, -2, \dots$ при $\rho = 1$ и $\operatorname{Re} \mu \neq 3$ при $\rho = 1/2$. Тогда все достаточно большие по модулю нули z_n функции $E_\rho(z; \mu)$ просты и

1) если а) $\rho > 1/2$ или б) $\rho = 1/2$ и $\operatorname{Re} \mu > 3$, то

$$z_n^\rho = 2\pi ni - \frac{\tau_\mu}{\rho} \left(\log 2\pi |n| + i \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} n \right) + \log c_\mu + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad (2)$$

2) если а) $\rho < 1/2$ или б) $\rho = 1/2$ и $\operatorname{Re} \mu < 3$, то

$$z_n = - \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} \left(n + \frac{1}{2} + \rho(\mu - 1) + o(1) \right) \right)^{1/\rho}, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

При этом в [4] оценена скорость убывания входящих в формулы (2), (3) бесконечно малых последовательностей $o(1)$; в частности, показано, что если $\rho = 1$, то $o(1)$ есть $O((\log |n|)/|n|)$.

В формулах (2), (3) и в дальнейшем под степенной и логарифмической функциями понимаем их главные значения.

Формулы (2), (3) асимптотические; они описывают поведение нулей функции (1) вне круга достаточно большого радиуса и не дают информации о числе нулей этой функции внутри указанного круга. Очевидно, вопрос о числе таких нулей равносильен вопросу о согласовании асимптотики с нумерацией нулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $Z = (z_n)$ – множество всех нулей целой функции $F(z)$, и пусть имеет место асимптотическая формула

$$z_n = \varphi(n) + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty \quad (\text{или } n \rightarrow +\infty), \quad (4)$$

где $\varphi(n) \rightarrow \infty$. Скажем, что асимптотика (4) согласована с нумерацией нулей функции $F(z)$ при помощи множества индексов T , если существует биекция $T \leftrightarrow Z$, сохраняющая асимптотику (4).

При этом мы должны считать, что корню λ кратности m в Z отвечают элементы $z_{s+1} = \dots = z_{s+m} = \lambda$ с различными номерами.

Поясним определение на примерах функций $\sin z$ и $z^{-1} \sin z$, нули которых имеют одинаковую асимптотику $z_n = \pi n + o(1)$, $n \rightarrow \pm\infty$. Но в первом случае она согласована с нумерацией нулей при помощи множества индексов $\mathbb{Z}$, а во втором – при помощи множества $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

В настоящей статье мы находим множества индексов T , при помощи которых асимптотические формулы (2), (3) согласованы с нумерацией нулей функции (1). Имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. 1) Если а) $\rho > 1/2$ и $\mu \neq 1/\rho - l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, или б) $\rho = 1/2$ и $\operatorname{Re} \mu > 3$, то асимптотика (2) согласована с нумерацией нулей функции $E_\rho(z; \mu)$ при помощи множества индексов $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2) Если $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$ и $\mu = 1/\rho - l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, то асимптотика (2) согласована с нумерацией нулей функции $E_\rho(z; \mu)$ при помощи множества индексов $\mathbb{Z} \setminus \{0; 1\}$.

ТЕОРЕМА 2. Если а) $\rho < 1/2$ или б) $\rho = 1/2$ и $\operatorname{Re} \mu < 3$, то асимптотика (3) согласована с нумерацией нулей функции $E_\rho(z; \mu)$ при помощи множества индексов $\mathbb{Z}_+$.

Для иллюстрации рассмотрим функции

$$E_1(z; 2) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad E_{1/2}(z; 1) = \operatorname{ch} \sqrt{z}.$$

В первом случае $\tau_\mu = 0$, $c_\mu = 1$ и по теореме А асимптотика нулей z_n этих функций имеет соответственно вид

$$z_n = 2\pi ni + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad z_n = -\pi^2 \left(n + \frac{1}{2} + o(1) \right)^2, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Теоремы 1, 2 утверждают, что эти асимптотики согласованы с нумерацией нулей при помощи множеств индексов $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{Z}_+$ соответственно. С другой стороны, в силу явного задания функций мы имеем точные формулы $z_n = 2\pi ni$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и $z_n = -\pi^2(n + 1/2)^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Кроме того, мы более подробно остановимся на распределении нулей функции $E_1(z; \mu)$ и двух выражающихся через нее функций, а именно неполной гамма-функции и функции ошибок.

2. Оценка интеграла от логарифма модуля.

2а. Случай $\rho > 1/2$. Пусть $\alpha \in (\pi/(2\rho), \min(\pi/\rho, \pi))$ и $s \in \mathbb{N}$. Тогда верны асимптотические оценки ($r = |z|$):

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho) - \sum_{k=1}^s \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O\left(\frac{1}{r^{s+1}}\right), \quad |\arg z| \leq \alpha, \quad (5)$$

$$-E_\rho(z; \mu) = -\sum_{k=1}^s \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O\left(\frac{1}{r^{s+1}}\right), \quad \alpha \leq |\arg z| \leq \pi, \quad (6)$$

равномерные в соответствующих секторах [1, с. 134]. Введем множества

$$\begin{aligned} P_- &= \{z : r > 1, \operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \log z) - \log |c_\mu| \leq -1\}, \\ P_+ &= \{z : r > 1, \operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \log z) - \log |c_\mu| \geq 1\}, \\ P &= \{z : r > 1, -1 < \operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \log z) - \log |c_\mu| < 1\}. \end{aligned}$$

Фиксируем α в указанном выше интервале и полагаем $s = 1$ при $\mu \neq 1/\rho - l$, $l \in \mathbb{Z}_+$, и $s = 2$ при $\mu = 1/\rho - l$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Как отмечалось, $c_\mu \neq 0$.

В силу формулы (6)

$$z^s E_\rho(z; \mu) \rightarrow -\rho c_\mu \neq 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \alpha \leq |\arg z| \leq \pi. \quad (7)$$

Пусть $|\arg z| \leq \alpha$ и $z \in P_-$. Тогда из определения множества P_- и из формулы (5) следует, что

$$\left| \frac{1}{\rho} z^s E_\rho(z; \mu) \right| \leq \frac{|c_\mu|}{e} + |c_\mu| + O\left(\frac{1}{r}\right) \leq M < \infty, \quad r > r_0, \quad (8)$$

$$\left| \frac{1}{\rho} z^s E_\rho(z; \mu) \right| \geq |c_\mu| - \frac{|c_\mu|}{e} + O\left(\frac{1}{r}\right) \geq m > 0, \quad r > r_0. \quad (9)$$

Объединяя (7) с (8) и (9), получаем

$$|z^s E_\rho(z; \mu)| \asymp 1, \quad r > r_0, \quad z \in P_-. \quad (10)$$

Пусть $z \in P_+$. Тогда по формуле (5)

$$\begin{aligned} & \exp(\operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \log z)) - |c_\mu| + O\left(\frac{1}{r}\right) \\ & \leq \left| \frac{1}{\rho} z^s E_\rho(z; \mu) \right| \leq \exp(\operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \log z)) + |c_\mu| + O\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Но по определению множества P_+

$$|c_\mu| \leq e^{-1} \cdot \exp(\operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \log z)), \quad z \in P_+. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получаем оценку

$$|z^s E_\rho(z; \mu)| \asymp \exp(\operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \log z)), \quad r > r_0, \quad z \in P_+. \quad (13)$$

Осталось рассмотреть “криволинейную полосу” P . При отображении

$$w = z^\rho + \tau_\mu \log z \quad (14)$$

она перейдет в вертикальную полосу $\gamma_- < \operatorname{Re} w < \gamma_+$, $\gamma_\pm = \log |c_\mu| \pm 1$, из которой удалено некоторое ограниченное множество. В силу теоремы Руше при достаточно больших $|z|$ отображение (14) однолистно. Рассмотрим образ $e(w)$ функции $(1/\rho)z^s E_\rho(z; \mu)$ при этом отображении. В силу формулы (5) при $\gamma_- < \operatorname{Re} w < \gamma_+$, $|\operatorname{Im} w| \rightarrow \infty$

$$e(w) = e^w - c_\mu + o(1) =: \varphi(w) + o(1). \quad (15)$$

Функция $\varphi(w)$ периодична с периодом $2\pi i$. Отсюда и из ее непрерывности следует, что $0 < c(\delta) \leq |\varphi(w)| \leq c$ при $\gamma_- < \operatorname{Re} w < \gamma_+$, $|\operatorname{Im} w| > r_0$ и вне кружков радиуса δ с центрами в нулях $\varphi(w)$. В силу (15)

$$0 < m \leq |e(w)| \leq M < \infty, \quad \gamma_- < \operatorname{Re} w < \gamma_+, \quad |\operatorname{Im} w| > r_0 \quad (16)$$

вне кружков радиуса δ с центрами в нулях w_n функции $e(w)$, имеющих вид $w_n = 2\pi ni + \log c_\mu + o(1)$. Беря δ достаточно малым и возвращаясь к переменной z , из (16) делаем вывод, что найдутся окружности $|z| = r_k \rightarrow \infty$ такие, что на их пересечении с P верна оценка (10), т.е.

$$|z^s E_\rho(z; \mu)| \asymp 1, \quad z \in P, \quad |z| = r_k \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Оценки (10), (13), (17) показывают, что на подходящих окружностях справедливы оценки

$$\log |E_\rho(z; \mu)| = \operatorname{Re} z^\rho + (\operatorname{Re} \tau_\mu - s) \log r + O(1), \quad z \in P_+, \quad |z| = r_k \rightarrow \infty, \quad (18)$$

$$\log |E_\rho(z; \mu)| = -s \log r + O(1), \quad z \in P_- \cup P, \quad |z| = r_k \rightarrow \infty. \quad (19)$$

С помощью этих оценок выясним поведение интеграла

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |E_\rho(re^{i\theta}; \mu) d\theta, \quad r = r_k \rightarrow \infty.$$

Обозначим через $\alpha_\pm(r)$ аргументы точек, которые ограничивают дугу окружности $|z| = r$, попавшую на множество P_+ , $\alpha_-(r) < 0 < \alpha_+(r)$. Это означает, что точки $z = r \exp(i\alpha_\pm(r))$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re}(z^\rho + \tau_\mu \log z) - \log |c_\mu| = 1, \quad |z| > 1,$$

из которого находим, что обе величины $\pm\alpha_\pm(r)$ имеют вид

$$\frac{\pi}{2\rho} + O\left(\frac{\log r}{r^\rho}\right) =: \alpha(r). \quad (20)$$

Интеграл $I(r)$ запишем в виде суммы интегралов I_j , $j = 1, 2, 3, 4$, которые берутся соответственно по интервалам $(0, \alpha_+(r))$, $(\alpha_-(r), 0)$, $(\alpha_+(r), \pi)$, $(-\pi, \alpha_-(r))$. Для оценки I_1, I_2 применяем формулу (18), а для оценки I_3, I_4 — формулу (19). С учетом (20) имеем

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha(r)}^{\pi} (O(1) - s \log r) d\theta = O(1) - \frac{s}{2\pi} (\pi - \alpha(r)) \log r = s \left(\frac{1}{4\rho} - \frac{1}{2} \right) \log r + O(1).$$

Аналогичная оценка верна для I_4 . Далее, так как в силу (20)

$$\sin \rho \alpha(r) = \cos \left(O \left(\frac{\log r}{r^\rho} \right) \right) = 1 + O \left(\frac{\log^2 r}{r^{2\rho}} \right),$$

то

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha(r)} (r^\rho \cos \rho \theta + (\operatorname{Re} \tau_\mu - s) \log r + O(1)) d\theta \\ &= \frac{r^\rho}{2\pi\rho} \sin \rho \alpha(r) + \frac{\alpha(r)}{2\pi} (\operatorname{Re} \tau_\mu - s) \log r + O(1) \\ &= \frac{r^\rho}{2\pi\rho} + \frac{1}{4\rho} (\operatorname{Re} \tau_\mu - s) \log r + O(1) \end{aligned}$$

и аналогичная оценка верна для I_2 . Объединяя оценки для I_j , получаем промежуточный итог:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |E_{\rho}(re^{i\theta}; \mu)| d\theta = \frac{r^{\rho}}{\pi\rho} + \left(\frac{\operatorname{Re} \tau_{\mu}}{2\rho} - s \right) \log r + O(1), \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (21)$$

2б. Случай $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$. Справедливы представления

$$E_{1/2}(z; \mu) = \frac{1}{2} z^{(1-\mu)/2} (e^{\sqrt{z}} + e^{\mp i(1-\mu)\pi} \cdot e^{-\sqrt{z}}) - \frac{z^{-1}}{\Gamma(\mu-2)} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

соответственно при $0 \leq \arg z \leq \pi$ и $-\pi \leq \arg z \leq 0$ (см. [1, с. 136]). Напомним, что в рассматриваемом случае константы c_{μ} и $\tau_{\mu} = \tau$ вычисляются по первым строкам задающих их формул (см. п. 1). Имеем $c_{\mu} \neq 0$, $\operatorname{Re} \tau < 0$. Пусть $0 \leq \arg z \leq \pi$. Тогда

$$\begin{aligned} 2zE_{1/2}(z; \mu) &= \exp(\sqrt{z} + \tau \log z) + e^{-i\pi(1-\mu)} z^{\tau} e^{-\sqrt{z}} - c_{\mu} + O\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= \exp(\sqrt{z} + \tau \log z) - c_{\mu} + o(1), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (22)$$

так как $\operatorname{Re} \tau < 0$. Введем множества

$$\begin{aligned} P_+ &= \{z : r > 1, \operatorname{Re}(\sqrt{z} + \tau \log z) - \log |c_{\mu}| \geq 1\}, \\ P &= \{z : r > 1, \operatorname{Re}(\sqrt{z} + \tau \log z) - \log |c_{\mu}| < 1\}. \end{aligned}$$

Пусть $0 \leq \arg z \leq \pi$, $z \in P_+$. Тогда имеет место неравенство (12) с $\rho = 1/2$. Поэтому из (22) вытекает оценка (13) с $\rho = 1/2$, $s = 1$.

Рассмотрим отображение (14) с $\rho = 1/2$. При этом отображении образ области $P \cap (\operatorname{Im} z > 0)$ для достаточно больших $\operatorname{Im} w$ совпадает с расширяющейся криволинейной полуполосой (обозначим ее через V), которая ограничена: справа вертикальной прямой $\operatorname{Re} w = 1 + \log |c_{\mu}| := b$, а слева кривой $w = i(r^{1/2} + (\operatorname{Im} \tau) \log r) + (\operatorname{Re} \tau) \log r + c$, $r > r_0$. Из (22) следует, что образ $e(w)$ функции $2zE_{1/2}(z; \mu)$ при рассматриваемом отображении имеет вид (15). Фиксируем $a < 0$ так, чтобы $|e^w| = \exp(\operatorname{Re} w) \leq |c_{\mu}|/2$ при $\operatorname{Re} w < a$. Введем полуполосу $V_+ = (w : a < \operatorname{Re} w < b, \operatorname{Im} w > r_0)$ и пусть $V_- = V \setminus V_+$. В силу выбора a из (15) следует, что

$$|e(w)| \geq \frac{|c_{\mu}|}{2} + o(1) \geq m > 0, \quad w \in V_-, \quad \operatorname{Im} w > r_0.$$

Если же $w \in V_+$, то, используя периодичность e^w , заключаем, что оценка снизу $|e(w)| \geq m > 0$ верна и для точек $w \in V_+$, лежащих вне кружков $K_n(\delta)$ радиуса δ с центрами в корнях функции $e(w)$. Итак,

$$|e(w)| \geq c(\delta) > 0, \quad w \in V, \quad w \notin \cup K_n(\delta).$$

Оценка сверху $|e(w)| \leq M < \infty$ для $w \in V$ сразу следует из (15) и из определения множества V . Значит, $|e(w)| \asymp 1$, $w \in V$, $w \notin \cup K_n(\delta)$. Беря δ достаточно малым

и возвращаясь на плоскость z , заключаем, что найдется последовательность $r_k \rightarrow \infty$ такая, что выполняется оценка (17) с $\rho = 1/2$, $s = 1$.

Оценки (13) и (17) (с $\rho = 1/2$, $s = 1$) установлены нами для $0 \leq \arg z \leq \pi$. Аналогично они доказываются и для $-\pi \leq \arg z \leq 0$. Значит, эти оценки с $s = 1$ верны для случая $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$ без ограничений на $\arg z$. В итоге для случая $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$ мы приходим к оценкам (18) и (19) с $s = 1$, причем в (19) множество P_- теперь отсутствует. После чего повторяются рассуждения, следующие за (19); при этом достаточно сделать формальную замену ρ на $1/2$ и s на 1. В результате получаем оценку типа (21):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |E_{\rho}(re^{i\theta}; \mu)| d\theta = \frac{2}{\pi} r^{1/2} + (\operatorname{Re} \tau_{\mu} - 1) \log r + O(1), \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (23)$$

2в. Случаи $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu < 3$ и $\rho < 1/2$. На этот раз применяем формулу

$$E_{\rho}(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \sum_{|\arg z + 2\pi n| \leq \pi/(2\rho) + \varepsilon} e^{2\pi n i \rho(1-\mu)} \cdot \exp(z^{\rho} e^{2\pi n i \rho}) + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (24)$$

справедливую при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Эта формула с $\varepsilon = 0$ доказана в [1, с. 137], но с $\varepsilon = 0$ она, вообще говоря, не является равномерной. Желаемая равномерность как раз и достигается присутствием $\varepsilon > 0$; ведь формула (24) выводится из формулы (5), где значение α превосходит значение $\pi/(2\rho)$. Понадобятся и уточняющие результат А.Ф. Леонтьева [6], [7] факты о поведении квазиполинома

$$R(w) = \sum_{j=1}^m h_j e^{\gamma_j w}, \quad h_j \neq 0, \quad (25)$$

где γ_j – вершины выпуклого многоугольника $G \supset 0$, $\arg \gamma_j < \arg \gamma_{j+1}$. Обозначим через $\kappa(\varphi)$ опорную функцию G , т.е.

$$\kappa(\varphi) = \sup(\operatorname{Re}(we^{-i\varphi}) : w \in G).$$

ЛЕММА 1 [8]. 1) Последовательность Λ нулей квазиполинома (25) имеет вид $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m$, где подпоследовательность Λ_j асимптотически распределена вдоль луча $\arg w = \pi/2 - \arg(\gamma_{j+1} - \gamma_j)$ по закону арифметической прогрессии, $j = 1, \dots, m$.

2) Вне кружков одинакового радиуса с центрами в нулях $R(w)$

$$|R(w)| \asymp \exp(\kappa(\arg w)|w|).$$

Пусть $|\arg z| \leq \pi$. Тогда в сумме (24) обязательно присутствует индекс $n = 0$. Полагая $w = z^{\rho}$, $|\arg w| \leq \pi\rho$ и фиксируя достаточно малое $\varepsilon > 0$, запишем эту сумму в виде

$$Q(w) = \sum_{|\arg w + 2\pi n\rho| \leq \pi/2 + \varepsilon} h_n \exp(we^{2\pi n i \rho}), \quad h_n = e^{2\pi n i \rho(1-\mu)}. \quad (26)$$

В соответствии с суммированием в (26) сектор $|\arg w| \leq \pi\rho$ разбивается на конечное число секторов S_j с общей вершиной в точке 0 без общих внутренних точек, причем

каждому сектору S_j в (26) отвечает свое множество индексов I_j . При любом j точки $\exp(2\pi n \rho i)$, $n \in I_j$, являются вершинами некоторого выпуклого многоугольника G_j (который может вырождаться в отрезок или в точку $w_0 = 1$), одной из вершин которого служит точка 1. Пусть $Q_j(w)$ – соответствующий ему квазиполином, т.е. часть суммы в (26), отвечающая индексам $n \in I_j$. Пусть $\kappa_j(\varphi)$ – опорная функция G_j . Тогда по лемме 1

$$|Q_j(w)| \asymp \exp(\kappa_j(\arg w)|w|), \quad w \in S_j, \quad w \notin D_j(\delta), \quad (27)$$

где $D_j(\delta)$ есть объединение кружков радиуса δ с центрами в нулях функции $Q_j(w)$. Но $Q_j(w) = Q(w)$ в секторе S_j . Далее, точка $w_0 = 1$ является одной из вершин многоугольника G_j , поэтому его опорная функция $\kappa_j(\varphi)$ в секторе $|\arg w| \leq \pi\rho$ совпадает с опорной функцией точки $w_0 = 1$, т.е. $\kappa_j(\varphi) = \cos \varphi$, $|\varphi| \leq \pi\rho$, при всех j . Так как набор чисел j конечен, то из (27) следует, что вне $\bigcup D_j(\delta)$

$$|Q(w)| \asymp \exp(|w| \cos \varphi), \quad |\varphi| = |\arg w| \leq \pi\rho. \quad (28)$$

По лемме 1 в сектор $|\arg w| \leq \pi\rho$ могут попасть части только тех кружков из $D_j(\delta)$, центры которых асимптотически распределены вдоль лучей $\arg w = \pm\pi\rho$ по закону арифметической прогрессии. Отсюда и из конечности набора чисел j следует, что, взяв δ достаточно малым, мы можем быть уверены в оценке (28) на частях подходящих окружностей $|w| = R_k \rightarrow \infty$, попавших в сектор $|\arg w| \leq \pi\rho$. Значит, если $|\theta| = |\arg z| \leq \pi$, то

$$|Q(z^\rho)| \asymp \exp(|z|^\rho \cos \rho\theta), \quad |z| = r_k = R_k^{1/\rho} \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Запишем формулу (24) в виде

$$z^{\rho(\mu-1)} E_\rho(z; \mu) = \rho Q(z^\rho) + O\left(\frac{1}{r^{1+\rho(1-\operatorname{Re} \mu)}}\right). \quad (30)$$

Если $\rho < 1/2$, то $\cos \rho\theta \geq \cos \pi\rho > 0$ и из (29) следует, что в правой части (30) доминирует первое слагаемое. Если $\rho = 1/2$, то $\cos \rho\theta \geq 0$ и $|Q(z^\rho)| \geq m > 0$. Но $\operatorname{Re} \mu < 3$ и потому $O(1/r^{1+\rho(1-\operatorname{Re} \mu)})$ есть $o(1)$ при $r \rightarrow \infty$; значит, и в случае $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu < 3$ первое слагаемое в правой части (30) является доминирующим. В итоге

$$|E_\rho(z; \mu)| \asymp r^{\rho(1-\operatorname{Re} \mu)} \exp(r^\rho \cos \rho\theta), \quad |z| = r = r_k \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |E_\rho(re^{i\theta}; \mu)| d\theta = \frac{r^\rho}{\pi\rho} \sin \pi\rho + \rho(1 - \operatorname{Re} \mu) \log r + O(1), \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (31)$$

3. Оценка усредненной плотности положительной последовательности.

ЛЕММА 2. Обозначим через $n(t)$ число точек положительной последовательности $(z_n)_{n=m}^{+\infty}$ в интервале $(0, t)$, $t > 0$, и пусть

$$z_n = (an + b \log n + d + o(1))^{1/\rho}, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (32)$$

где $a, \rho > 0$, $b, d \in \mathbb{R}$. Тогда при $r \rightarrow +\infty$

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{r^\rho}{a\rho} - \frac{b\rho}{2a} \log^2 r + \left(\frac{1}{2} - m - \frac{d}{a} + \frac{b}{a} \log a\right) \log r + o(\log r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Введем последовательности x_n^+ и x_n^- формулами

$$x_n^\pm = an + b \log n + d \pm \varepsilon, \quad n = k, k+1, \dots,$$

где $k \in \mathbb{N}$ выбрано столь большим, чтобы входящая в (32) величина $o(1)$ удовлетворяла неравенству $|o(1)| < \varepsilon$, $n \geq k$, и чтобы последовательность x_n^- была положительной и возрастающей. Пусть $n_\pm(t)$ – число точек $x_n^\pm$ на интервале $(0, t)$. Так как число точек z_n на интервале $(0, t)$ равно числу точек z_n^ρ на интервале $(0, t^\rho)$, то

$$k - m + n_+(t^\rho) \leq n(t) \leq k - m + n_-(t^\rho), \quad t > x_k^+,$$

и, значит, при всех достаточно больших r

$$M_1 + (k - m) \log r + \int_{x_k^+}^r \frac{n_+(t^\rho)}{t} dt \leq N(r) \leq M_2 + (k - m) \log r + \int_{x_k^-}^r \frac{n_-(t^\rho)}{t} dt. \quad (33)$$

Далее, так как $n_\pm(t) = n - k + 1$, $t \in (x_n^\pm, x_{n+1}^\pm)$, то при $N := \max(n : (x_n^-)^{1/\rho} \leq r)$ имеем

$$\begin{aligned} \rho \int_{x_k^\pm}^r \frac{n_\pm(t^\rho)}{t} dt &= \rho \sum_{n=k}^N (n - k + 1) \int_{(x_n^\pm)^{1/\rho}}^{(x_{n+1}^\pm)^{1/\rho}} \frac{dt}{t} + O(1) \\ &= \sum_{n=k}^N (n - k + 1) \log \frac{x_{n+1}^\pm}{x_n^\pm} + O(1) \\ &= \sum_{n=k}^N (n - k + 1) \log \left(1 + \frac{a + b \log(1 + 1/n)}{an + b \log n + d \pm \varepsilon} \right) + O(1) \\ &= \sum_{n=k}^N (n - k + 1) \left(\frac{a + b \log(1 + 1/n)}{an + b \log n + d \pm \varepsilon} - \frac{1}{2} \left(\frac{a + b \log(1 + 1/n)}{an + b \log n + d \pm \varepsilon} \right)^2 \right) + O(1). \end{aligned}$$

В правой части заменим $\log(1 + 1/n)$ в первом слагаемом на $1/n$, а во втором на 0; остаточный член формулы Тейлора для $\log(1 + 1/n)$ даст при суммировании ограниченную по N величину. Получим

$$\begin{aligned} \rho \int_{x_k^\pm}^r \frac{n_\pm(t^\rho)}{t} dt &= \sum_{n=k}^N \left(\frac{an - a(k-1) + b}{an + b \log n + d \pm \varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{a^2 n}{(an + b \log n + d \pm \varepsilon)^2} \right) + O(1) \\ &= \sum_{n=k}^N \left(1 - \frac{b \log n}{an + b \log n + d \pm \varepsilon} + \frac{b - a(k-1) - d \mp \varepsilon}{an + b \log n + d \pm \varepsilon} \right) - \frac{1}{2} \log N + O(1) \\ &= N - \frac{b}{2a} \log^2 N + \left(\frac{b - a(k-1) - d \mp \varepsilon}{a} - \frac{1}{2} \right) \log N + O(1). \end{aligned} \quad (34)$$

Теперь выразим N через r из условия: N есть наибольший из индексов n , для которых $an + b \log n + d - \varepsilon \leq r^\rho$. Очевидно,

$$N = \frac{r^\rho}{a} - \frac{b\rho}{a} \log r + O(1)$$

и, значит, $\log N = \rho \log r - \log a + o(1)$, $\log^2 N = \rho^2 \log^2 r - 2\rho \log a \log r + o(\log r)$. Подставляя эти выражения для $N, \log N, \log^2 N$ в (34), а затем полученное – в (33), видим, что интеграл $N(r)$ заключен между величинами

$$\frac{r^\rho}{a\rho} - \frac{\rho b}{2a} \log^2 r + \left(\frac{1}{2} - m + \frac{\pm \varepsilon - d}{a} + \frac{b}{a} \log a \right) \log r + o(\log r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Так как ε можно брать произвольно малым, то отсюда следует требуемая асимптотика. Лемма 2 доказана.

4. Доказательство теорем 1, 2. Если точка $z = 0$ является корнем функции $E_\rho(z; \mu)$ кратности m , то перейдем к функции

$$F(z) = \left(\frac{z - \lambda}{z} \right)^m \cdot E_\rho(z; \mu), \quad F(0) \neq 0,$$

где $E_\rho(\lambda; \mu) \neq 0$. Полагаем $F(z) = E_\rho(z; \mu)$, если $E_\rho(0; \mu) \neq 0$. Теоремы 1, 2 достаточно доказать для функции $F(z)$.

Пусть мы находимся в условиях теоремы 1. По теореме А последовательность Z корней z_n функции $F(z)$ представима в виде

$$Z = Z_+ \cup Z_-, \quad Z_+ \cap Z_- = \emptyset, \quad Z_+ = (z_n)_{n=m}^{+\infty}, \quad Z_- = (z_n)_{n=-1}^{-\infty},$$

где m – некоторое целое число. При этом если $|n|$ достаточно велик, то $\operatorname{Im} z_n \gtrless 0$ соответственно для $z_n \in Z_\pm$. Обе последовательности $|Z_+| = (|z_n|)_m^\infty$, $|Z_-| = (|z_n|)_1^{-\infty}$ положительны.

В силу (2)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z_n^\rho &= 2\pi n - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \log 2\pi |n| - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Re} \tau_\mu) \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} n + \arg c_\mu + o(1), \\ \operatorname{Re} z_n^\rho &= a_1 \log 2\pi |n| + a_2 \operatorname{sign} n + a_3 + o(1), \end{aligned}$$

где a_j – некоторые константы. Поэтому

$$\begin{aligned} |z_n|^\rho &= \sqrt{(\operatorname{Im} z_n^\rho)^2 + (\operatorname{Re} z_n^\rho)^2} = |\operatorname{Im} z_n^\rho| \sqrt{1 + \frac{(\operatorname{Re} z_n^\rho)^2}{(\operatorname{Im} z_n^\rho)^2}} \\ &= |\operatorname{Im} z_n^\rho| \left(1 + O\left(\frac{\log^2 |n|}{n^2} \right) \right) = |\operatorname{Im} z_n^\rho| + o(1) \end{aligned}$$

и, значит,

$$|z_n|^\rho = \left| 2\pi n - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \log |n| + \arg c_\mu - \frac{\pi}{2\rho} (\operatorname{Re} \tau_\mu) \operatorname{sign} n - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \log 2\pi + o(1) \right|.$$

Таким образом, если $z_n \in Z_+$, то

$$|z_n| = \left(2\pi n - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \log n + \arg c_\mu - \frac{\pi}{2\rho} \operatorname{Re} \tau_\mu - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \log 2\pi + o(1) \right)^{1/\rho}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

и если $z_n \in Z_-$, то

$$|z_{-n}| = \left(2\pi n + \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \log n - \arg c_\mu - \frac{\pi}{2\rho} \operatorname{Re} \tau_\mu + \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \log 2\pi + o(1) \right)^{1/\rho}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, для последовательностей $|Z_+|$ и $|Z_-|$ выполнены условия леммы 2, где в обоих случаях $a = 2\pi$ и

$$\begin{aligned} b &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{Im} \tau_\mu, & d &= \arg c_\mu - \frac{\pi}{2\rho} \operatorname{Re} \tau_\mu - \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \log 2\pi, \\ b &= \frac{1}{\rho} \operatorname{Im} \tau_\mu, & d &= -\arg c_\mu - \frac{\pi}{2\rho} \operatorname{Re} \tau_\mu + \frac{1}{\rho} (\operatorname{Im} \tau_\mu) \log 2\pi \end{aligned}$$

соответственно в случаях последовательностей $|Z_+|$ и $|Z_-|$. При этом во втором случае следует класть $m = 1$. Значит, если обозначить через $n_\pm(t)$ число точек последовательности $|Z_\pm|$ в интервале $(0, t)$, то по лемме 2

$$\int_0^r \frac{n_+(t) + n_-(t)}{t} dt = \frac{r^\rho}{\pi\rho} + \left(\frac{\operatorname{Re} \tau_\mu}{2\rho} - m \right) \log r + o(\log r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Но $n_+(t) + n_-(t)$ есть число нулей функции $F(z)$ в круге $|z| < t$. Запишем для этой функции формулу Иенсена

$$\int_0^r \frac{n_+(t) + n_-(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |F(re^{i\theta})| d\theta - \log |F(0)|. \quad (36)$$

Сопоставляя с этой формулой оценки (35) и (21), видим, что если $\rho > 1/2$, то $m = s$. Остается вспомнить, что $s = 1$ при $\mu \neq 1/\rho - l$ и $s = 2$ при $\mu = 1/\rho - l$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Значит, $m = 1$ и $m = 2$ соответственно и случай $\rho > 1/2$ разобран.

Если $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$, то вместо формулы (21) применяется формула (23). Но (23) совпадает с (21) при $\rho = 1/2$, $s = 1$, и случай $\rho = 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > 3$ также разобран. Теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2. По теореме А последовательность Z нулей z_n функции $F(z)$ имеет вид $Z = (z_n)_{n=m}^{+\infty}$, где m — некоторое целое число, и

$$|z_n| = \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} \left(n + \frac{1}{2} + \rho(\operatorname{Re} \mu - 1) + o(1) \right) \right)^{1/\rho}, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (37)$$

Пусть $n(t)$ имеет тот же смысл, что и в лемме 2, т.е. $n(t)$ есть число точек z_n в круге $|z| < t$. Формула (37) показывает, что для последовательности $|Z|$ выполнены условия леммы 2 с

$$a = \frac{\pi}{\sin \pi \rho}, \quad b = 0, \quad d = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \left(\rho(\operatorname{Re} \mu - 1) + \frac{1}{2} \right).$$

По лемме 2

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{\sin \pi \rho}{\pi \rho} r^\rho - (m + \rho(\operatorname{Re} \mu - 1)) \log r + o(\log r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (38)$$

С другой стороны, в силу формулы Иенсена (36), где теперь $n_+(t) + n_-(t) = n(t)$, и оценки (31) имеем

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{\sin \pi \rho}{\pi \rho} r^\rho - \rho(\operatorname{Re} \mu - 1) \log r + O(1), \quad r = r_k \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Из (38) и (39) следует, что $m = 0$. Теорема 2 доказана.

5. Мы будем использовать следующие формулы:

$$E_1(z; \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu - 1)} \int_0^1 e^{zt} (1 - t)^{\mu-2} dt, \quad \mu > 1, \quad (40)$$

$$(\mu - 1)E_\rho(z; \mu) + \frac{z}{\rho} E'_\rho(z; \mu) = E_\rho(z; \mu - 1), \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (41)$$

$$E_1(z; \mu) - E'_1(z; \mu) = (\mu - 1)E_1(z; \mu + 1), \quad \mu \in \mathbb{C}. \quad (42)$$

Формулы (40), (41) содержатся в [1, с. 120, 118]. Формула (42) следует из определения (1) и из свойства $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$. Действительно, в силу (1) левая часть в (42) есть

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(\mu + n)} - \frac{n + 1}{\Gamma(\mu + n + 1)} \right) z^n,$$

и, подставляя сюда $\Gamma(\mu + n) = \Gamma(\mu + n + 1)/(\mu + n)$, мы получаем правую часть. Нам понадобится также

ТЕОРЕМА ПОЙА [9]. Пусть функция $f(t)$ положительна, интегрируема и дифференцируема в интервале $(0, 1)$ и пусть

$$-\infty \leq \alpha \leq -\frac{f'(t)}{f(t)} \leq \beta \leq +\infty, \quad t \in (0, 1).$$

Тогда если $f(t)$ не совпадает ни с функцией $s \cdot \exp(-\alpha t)$, ни с функцией $s \cdot \exp(-\beta t)$, то все нули целой функции

$$F(z) = \int_0^1 e^{zt} f(t) dt \quad (43)$$

лежат в полосе $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$.

В статье [5] доказано, что при $\mu \in (0, 1) \cup (1, 2)$ все нули функции $E_1(z; \mu)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Справедлива

ТЕОРЕМА 3. 1) При $\mu \in (1, 2)$ все нули функции $E_1(z; \mu)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \mu - 2$.

2) При $\mu > 2$ все нули функции $E_1(z; \mu)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \mu - 2$.

3) При $\mu \in (1, 3]$ все нули функции $E_1(z; \mu)$ просты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (40) функция $E_1(z; \mu)$ имеет вид (43), где

$$f(t) = \frac{(1 - t)^{\mu-2}}{\Gamma(\mu - 1)}.$$

Имеем

$$-\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\mu - 2}{1 - t}, \quad 0 < t < 1.$$

Отсюда $-f'(t)/f(t) \leq \mu - 2$ при $1 < \mu < 2$ и $-f'(t)/f(t) \geq \mu - 2$ при $\mu > 2$, и утверждения 1), 2) следуют из теоремы Поля.

Остается доказать утверждение 3). При $\mu = 2$ явный вид $E_1(z; 2) = (e^z - 1)/z$ показывает, что все нули функции $E_1(z; 2)$ просты и лежат на мнимой оси.

Пусть $1 < \mu < 2$. По утверждению 1) все нули функции $E_1(z; \mu)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \mu - 2 < 0$. Если бы у $E_1(z; \mu)$ был кратный корень z_0 , то по формуле (42) он был бы корнем функции $E_1(z; \mu + 1)$ и по утверждению 2) $\operatorname{Re} z_0 > \mu - 1 > 0$. Противоречие.

Пусть $2 < \mu \leq 3$. По утверждению 2) все нули $E_1(z; \mu)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \mu - 2 > 0$. Если бы у $E_1(z; \mu)$ был кратный корень z_0 , то по формуле (41) он был бы корнем функции $E_1(z; \mu - 1)$. По утверждению 1) и в силу сказанного о нулях функции $E_1(z; 2)$ мы имели бы противоречивое неравенство $\operatorname{Re} z_0 \leq 0$. Теорема 3 доказана.

Рассмотрим *неполную гамма-функцию*

$$\gamma(\alpha, z) = \int_0^z e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad (44)$$

переменной z . Эта функция аналитична всюду, за возможным исключением точки ветвления $z = 0$; главная ветвь определяется с помощью разреза по отрицательной вещественной полуоси. После разложения e^{-t} в степенной ряд и почленного интегрирования получаем представление

$$\gamma(\alpha, z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!(n+\alpha)},$$

позволяющее распространить $\gamma(\alpha, z)$ на все значения $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Отсюда следует, что модифицированная функция $\gamma^*(\alpha, z) = \gamma(\alpha, z)/(z^\alpha \Gamma(\alpha))$ является целой (в том числе и по α) и справедлива формула

$$\gamma^*(\alpha, z) := \frac{\gamma(\alpha, z)}{z^\alpha \Gamma(\alpha)} = e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)}$$

[10, с. 65]. Значит, в силу (1) при всех $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\gamma^*(\alpha, z) = e^{-z} E_1(z; 1 + \alpha). \quad (45)$$

Исключим из рассмотрения вырожденный случай $\alpha = 0, -1, -2, \dots$, в котором $\gamma^*(\alpha, z) = z^{-\alpha}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Тогда все нули w_n функции $\gamma^*(\alpha, w)$ можно пронумеровать так, что $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и

$$w_n = 2\pi ni - (1 - \alpha) \left(\log 2\pi |n| + i \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} n \right) + \log \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + O\left(\frac{\log |n|}{|n|}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (46)$$

При этом все нули, начиная с некоторого, просты.

Благодаря формуле (45) следствие 1 вытекает из утверждения 1) теорем А и 1 и из замечания относительно убывания величины $o(1)$, сделанного после формулировки теоремы А.

В свою очередь, из (45) и из теоремы 3 сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. 1) При $0 < \alpha < 1$ все нули функции $\gamma^*(\alpha, w)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} w < \alpha - 1$.

2) При $\alpha > 1$ все нули функции $\gamma^*(\alpha, w)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} w > \alpha - 1$.

3) При $0 < \alpha \leq 2$ все нули функции $\gamma^*(\alpha, w)$ просты.

В заключение рассмотрим функцию ошибок

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (47)$$

Это целая функция. Она имеет простой корень $z = 0$ и не имеет других вещественных корней. Из (44) и (47) вытекает формула

$$\operatorname{erf} z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right)$$

(см. также [10, с. 65]), показывающая вместе с определением $\gamma^*(\alpha, z)$, что все ненулевые корни функции $\operatorname{erf} z$ совпадают с корнями функции $\gamma^*(1/2, z^2)$. По следствию 2 корни функции $\gamma^*(1/2, z^2)$ лежат на множестве $\operatorname{Re} z^2 < -1/2$, состоящем из двух криволинейных секторов, симметричных друг другу относительно вещественной оси и ограниченных компонентами гиперболы $y^2 - x^2 = 1/2$ ($z = x + iy$). Это множество лежит в углах $|\pm \pi/2 - \arg z| < \pi/4$. Рассмотрим отображение $w = z^2$ угла $|\pi/2 - \arg z| < \pi/4$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w < 0$, в которой по следствию 2 лежат корни w_n функции $\gamma^*(1/2, w)$, являющиеся простыми. Обозначим через $z_n^\pm$ корни $\operatorname{erf} z$ в угле $|\pi/2 - \arg z| < \pi/4$. Тогда $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и в силу (46) с $\alpha = 1/2$ имеем

$$(z_n^\pm)^2 = 2\pi ni - \frac{1}{2} \log |n| - i \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} n - \log\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2\pi}\right) + O\left(\frac{\log |n|}{|n|}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

В силу нечетности $\operatorname{erf} z$ в угле $|\pi/2 + \arg z| < \pi/4$ располагается симметричная цепь z_n^- корней $\operatorname{erf} z$. Других корней у $\operatorname{erf} z$, кроме точки $z = 0$, нет. Так как $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, мы доказали

СЛЕДСТВИЕ 3. Все корни функции $\operatorname{erf} z$ просты. Ненулевые корни образуют две цепи z_n^+ и z_n^- , $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, симметричные друг другу относительно вещественной оси и расположенные в гиперболических секторах $y^2 - x^2 > 1/2$. При этом

$$(z_n^\pm)^2 = 2\pi ni - \frac{1}{2} \log |n| - i \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} n - \log(\pi\sqrt{2}) + O\left(\frac{\log |n|}{|n|}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty.$$

По поводу нулей неполной гамма-функции справочник Ю. Люка [11] отсылает к статье К. Кельбига [12]. В [12], равно как и в цитируемых там предшествующих работах, представлены другие, в основном, вычислительные аспекты вопроса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
- [2] Wiman A. Über die Nullstellen der Funktionen $E_\alpha(x)$ // Acta Math. 1905. V. 29. P. 217–234.
- [3] Polya G. Bemerkung über die Mittag-Lefflerschen Funktionen $E_\alpha(z)$ // Tôhoku Math. J. 1921. V. 19. P. 241–248.
- [4] Седлецкий А. М. Асимптотические формулы для нулей функции типа Миттаг-Леффлера // Anal. Math. 1994. V. 20. P. 117–132.
- [5] Ostrovskii I. V., Peresolkova I. N. Nonasymptotic results on distribution of zeros of the function $E_\rho(z; \mu)$ // Anal. Math. 1997. V. 23. P. 283–296.
- [6] Леонтьев А. Ф. О представлении аналитических функций в замкнутой выпуклой области рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 3. С. 577–592.
- [7] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
- [8] Седлецкий А. М. Базисы из экспонент в пространствах E^p на выпуклых многоугольниках // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 5. С. 1101–1119.
- [9] Polya G. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen // Math. Z. 1918. V. 2. P. 352–383.
- [10] Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.
- [11] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.
- [12] Kölbig K. S. On the zeros of the incomplete gamma function // Math. Comp. 1972. V. 26. P. 751–756.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
14.09.1999