Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Тимофеев, М. Б. Хрипунова, О разности числа простых делителей из подмножеств для последовательных чисел, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 725–738

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm993>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:15:34

УДК 511

О РАЗНОСТИ ЧИСЛА ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ИЗ ПОДМНОЖЕСТВ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Н. М. Тимофеев, М. Б. Хрипунова

Пусть E_1, E_2 – произвольные подмножества множества простых чисел, $g_1(n), g_2(n)$ – аддитивные функции, принимающие целые значения такие, что $g_i(p) = 1$, если $p \in E_i$, и $g_i(p) = 0$ в противном случае, $i = 1, 2$. Положим

$$E_i(x) = \sum_{\substack{p \leq x, \\ p \in E_i}} \frac{1}{p}, \quad i = 1, 2.$$

В работе доказано, что если $R(x) = \max(E_1(x), E_2(x))$, $a \neq 0$ – целое число, то

$$\sup_m |\{n : n \leq x, g_2(n+a) - g_1(n) = m\}| \ll \frac{x}{\sqrt{R(x)}}.$$

Если, кроме того, $E_i(x) \geq T$ при $x \geq x_0$, где T – достаточно большая постоянная и

$$|m - (E_2(x) - E_1(x))| \leq \mu \sqrt{R(x)},$$

то существует постоянная $c(\mu, a, T) > 0$, с которой при $x \geq x_0$

$$\sum_{i=0}^3 |\{n : n \leq x, g_2(n+a) - g_1(n) = m+i\}| \geq c(\mu, a, T) \frac{x}{\sqrt{R(x)}}.$$

Библиография: 6 названий.

Пусть P – множество простых чисел и E – произвольное подмножество P . Будем обозначать p, q – простые числа. Для каждого натурального n обозначим

$$\Omega(n; E) := \sum_{\substack{p^\alpha \parallel n, \\ p \in E}} 1, \quad \omega(n; E) := \sum_{\substack{p | n, \\ p \in E}} 1.$$

Положим $\Omega(n; P) = \Omega(n)$ и $\omega(n; P) = \omega(n)$; $g(n; E)$ равняется $\Omega(n; E)$ или $\omega(n; E)$,

$$L(m, x, g, E) := |\{n : n \leq x, g(n; E) = m\}|,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00070.

где $|A|$ – число элементов множества A ,

$$E(x) := \sum_{\substack{p \leq x, \\ p \in E}} \frac{1}{p}.$$

Халас [1] доказал следующий результат.

Пусть $0 < \delta < 2$. Если $0 \leq m \leq (2 - \delta)E(x)$, то

$$L(m, x, g, E) \leq c_1(\delta)x \frac{E^m(x)}{m!} e^{-E(x)}.$$

Более того, если $0 \leq m \leq (2 - \delta)E(x)$ и $E(x) \geq c_2(\delta)$, то

$$L(m, x, g, E) + L(m + 1, x, g, E) \geq c_3(\delta)x \frac{E^m(x)}{m!} e^{-E(x)}.$$

Здесь и далее $c_i, i = 1, 2, \dots$, константы большие нуля, m, k, l – целые числа.

Естественно, при $E = P$ есть более точные результаты. В частности (см., например, [2]), при $1 \leq m \leq (2 - \delta) \ln \ln x$ справедливы неравенства

$$c_4 \frac{x}{\ln x} \frac{(\ln \ln x)^{m-1}}{(m-1)!} \leq L(m, x, g, P) \leq c_5 \frac{x}{\ln x} \frac{(\ln \ln x)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Историю вопроса и дальнейшие уточнения приведенных результатов можно найти в работе [2].

В настоящей работе изучается

$$S(k, l, x, E_1, E_2) := |\{n : n \leq x, g(n; E_1) = k, g(n + a; E_2) = l\}|,$$

где $a \neq 0$ – целое число, E_1, E_2 – произвольные подмножества P . Естественно ожидать, что n и $n + a$ имеют независимую друг от друга мультипликативную структуру и поэтому должны иметь место результаты, подобные оценкам Халаса, с правой частью, равной

$$x \frac{E_1^k(x)}{k!} \frac{E_2^l(x)}{l!} \exp(-E_1(x) - E_2(x)).$$

Так, например, при $a = 2$ в наших обозначениях $S(1, 1, x, P, P)$ равняется числу близнецов $\leq x$, и знаменитая гипотеза состоит в том, что

$$S(1, 1, x, P, P) \geq c_6 \frac{x}{\ln^2 x}.$$

Здесь мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Если при $x \geq x_0$ $E_i(x) \geq T$, где $T > 0$ – достаточная большая постоянная, и $0 \leq k \leq 3E_1(x)$, $(1 - (-1)^{|a|})/2 \leq l \leq 3E_2(x)$, то

$$\sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1,2} S(k+i, l+j, x, E_1, E_2) \geq c(T, a)x \frac{E_1^k(x)}{k!} \frac{E_2^{l(a)}(x)}{l(a)!} \exp(-E_1(x) - E_2(x)),$$

где $l(a) = l - (1 - (-1)^{|a|})/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства видно, что эта теорема справедлива для любых целозначных аддитивных функций $g_1(n)$ и $g_2(n)$ таких, что $g_1(p) = g(p, E_1)$, $g_2(p) = g(p, E_2)$ для всех p .

Положим

$$N(m, x, E_1, E_2) := |\{n : n \leq x, g(n + a; E_2) - g(n; E_1) = m\}|.$$

В работе [3] при $a = 1$ доказано, что

$$N(0, x, P, P) \ll \frac{x}{\sqrt{\ln \ln x}}.$$

Более общий результат был получен в [4]. Там доказано, что при $|m| \leq \mu\sqrt{\ln \ln x}$ и $x \geq x_0$

$$N(m, x, P, P) + N(m + 1, x, P, P) \geq c_1(a, \mu) \frac{x}{\sqrt{\ln \ln x}},$$

где $c_1(a, \mu) > 0$ и

$$\sup_m N(m, x, P, P) \ll \frac{x}{\sqrt{\ln \ln 10x}}.$$

Основной результат настоящей работы следующий.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $R(x) = \max(E_1(x), E_2(x))$. Тогда

$$\sup_m N(m, x, E_1, E_2) \ll \frac{x}{\sqrt{R(x)}}.$$

Кроме того, если $E_i(x) \geq T$, $i = 1, 2$, при $x \geq x_0$, где T – достаточно большая положительная постоянная и

$$|m - (E_2(x) - E_1(x))| \leq \mu\sqrt{R(x)},$$

то существует постоянная $c_2(\mu, a, T) > 0$, с которой при $x \geq x_0$

$$\sum_{i=0}^3 N(m + i, x, E_1, E_2) \geq c_2(\mu, a, T) \frac{x}{\sqrt{R(x)}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как видно из доказательства, данные оценки справедливы для любых целозначных, аддитивных функций $g_i(n)$ таких, что $g_i(p) = g(p; E_i)$, $i = 1, 2$, для всех простых p .

Хильдебранд (см. следствие в [5]) доказал, что если E – непустое множество простых чисел, $\|x\|$ – расстояние до ближайшего целого, то для всех $\alpha \in (0, 1)$ кроме конечного числа

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \|\alpha(\Omega(n + 1; E) - \Omega(n; E))\| > 0. \quad (1)$$

Более точно, соотношение (1) справедливо для всех иррациональных α , а также для $\alpha = r/s$, $(r, s) = 1$, $s > c$, где c в его работе постоянная порядка 10^3 .

Из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $E(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда соотношение (1) справедливо для всех $\alpha = r/s$, $(r, s) = 1$, $s > 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя оценку снизу теоремы 2, получим

$$\frac{1}{x} \sum_{j \leq (\mu/s)\sqrt{E(x)}} \sum_{i=1}^4 N(i + js, x, E, E) \geq c > 0.$$

Но если $\Omega(n+1, E) - \Omega(n, E) = i + js$, где $i = 1, 2, 3, 4$, то

$$\left\| \frac{r}{s} (\Omega(n+1, E) - \Omega(n, E)) \right\| = \left\| \frac{r}{s} i \right\| \geq \frac{1}{s}.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства вытекает утверждение следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f(n)$ – комплекснозначная, мультипликативная функция, принимающая на простых числах значения 1 и ξ , где ξ – первообразный корень степени g из единицы, $f^g(n) \equiv 1$, $f(n) \not\equiv 1$. Если $g > 5$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |\bar{f}(n) f(n+a)| < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем предполагать, что ряд

$$\sum_{f(p)=\xi} \frac{1}{p} \tag{2}$$

расходится. Если ряд (2) сходится, но $f(n) \not\equiv 1$, то (см., например, лемму 2 из [5]) в этом случае существует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \bar{f}(n) f(n+a)$$

и модуль предела меньше единицы. Предположим, что ряд (2) расходится, т.е.

$$E(x) = \sum_{\substack{p \leq x, \\ f(p)=\xi}} \frac{1}{p} \rightarrow +\infty$$

при $x \rightarrow \infty$. Пусть по некоторой последовательности

$$\frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} \bar{f}(n) f(n+a) \right| \rightarrow 1$$

при $x \rightarrow \infty$. Положим

$$\Psi_x = \arg \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \bar{f}(n) f(n+a).$$

Можно считать, что на этой подпоследовательности $\Psi_x \rightarrow \Psi$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{g-1} a_x(j) \xi^j e^{-i\Psi} \rightarrow 1$$

при $x \rightarrow \infty$, где

$$a_x(j) = \frac{1}{[x]} |\{n : n \leq x, f(n)f(n+a) = \xi^j\}|.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{g-1} a_x(j) (1 - \operatorname{Re} \xi^j e^{-i\Psi}) \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что существует $0 \leq j \leq g-1$ такое, что $\xi^j e^{-i\Psi} = 1$, $a_x(j) \rightarrow 1$, $a_x(k) \rightarrow 0$ при $k \neq j$, если $x \rightarrow \infty$ по некоторой подпоследовательности. С другой стороны, при $0 \leq j < g-4$ имеем

$$\begin{aligned} & a_x(j+1) + a_x(j+2) + a_x(j+3) + a_x(j+4) \\ & \geq \frac{1}{x} \sum_{0 \leq s \leq \mu\sqrt{E(x)}} \sum_{l=1}^4 |\{n : n \leq x, g(n+a) - g(n) = j+l+sg\}|, \end{aligned}$$

где $g(n)$ – аддитивная функция такая, что $f(p^\alpha) = \xi^{g(p^\alpha)}$, $0 \leq g(p) \leq g-1$. Очевидно, что $g(p) = g(p; E)$. Следовательно, из теоремы 2 и замечания 2 вытекает, что

$$a_x(j+1) + a_x(j+2) + a_x(j+3) + a_x(j+4) \geq c_8 > 0$$

при $x \geq x_0$. Из полученного противоречия вытекает утверждение следствия 2 при $j < g-4$. Если $j = g-4$, аналогичное неравенство справедливо для

$$a_x(g-3) + a_x(g-2) + a_x(g-1) + a_x(0).$$

Подобным же способом приходим к противоречию в случаях $j = g-3, g-2, g-1$. Следствие 2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Основную роль при доказательстве теоремы 1 играет нижеследующая лемма 1 (см. лемму 1 из [4]), в основе доказательства которой лежит метод Чена.

ЛЕММА 1. Пусть q – простые числа, $0 < \beta < 1/400$,

$$S_1(n, m, x) := \left| \left\{ q : x^\beta < q \leq \frac{x}{n}, nq + a = mP_2 \right\} \right|,$$

где P_2 – числа, имеющие не более двух простых делителей, каждый из которых больше x^β . Тогда

$$S_1(n, m, x) \geq 0.24C\Delta(a)G(nm)\frac{x}{\varphi(nm)\ln^2 x} - r(n, m),$$

где

$$C = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right), \quad \Delta(a) = \prod_{\substack{p|a, \\ p \neq 2}} \frac{p-1}{p-2},$$

$$G(n) = \prod_{p|n} G(p), \quad G(p) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)^2, & \text{если } p \neq 2, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } p = 2, \end{cases}$$

и

$$\sum'_{n,m} |r(n,m)| \ll \frac{x}{\ln^A x}$$

с любой положительной постоянной A , а $\sum'_{n,m}$ означает, что суммирование распространено по $n \leq x^\beta$, $m \leq x^\beta$, $(n, 2a) = 1$, $(m, na) = 1$, m – четное, если a – число нечетное.

Обозначим

$$S(k, l, x) := \sum_{i=0,1} \sum_{j=0,1,2} S(k+i, l+j, x, E_1, E_2).$$

Напомним, что $k \geq 0$, $l \geq (1 - (-1)^{|a|})/2$. Пусть n_1, n_2 – натуральные числа, удовлетворяющие условиям: n_1, n_2 свободные от квадратов, $n_1 \leq x^\beta$, $\beta < 1/400$, $(n_1, 2a) = 1$, $g_1(n_1) = k$; q – простые числа такие, что $x^\beta < q \leq x/n_1$, $n_2 \leq x^\beta$, $(n_2, n_1a) = 1$, $g_2(n_2) = l$, n_2 – четные, если a – нечетное. Напомним, что $g_1(n), g_2(n)$ – целозначные аддитивные функции $g_1(p) = g(p; E_1)$ и $g_2(p) = g(p; E_2)$. Если $n_1q + a = n_2P_2$, где P_2 – числа, имеющие не более двух простых делителей, каждый из которых больше x^β , то

$$g_2(n_2P_2) = l + g_2(P_2) = l + j,$$

где j принимает значения 0, 1, 2. Следовательно, используя лемму 1, имеем

$$S(k, l, x) \geq \sum_{n_1} \sum_{n_2} S_1(n_1, n_2, x) \geq 0.24C\Delta(a) \frac{x}{\ln 2x} \sum_{n_1} \sum_{n_2} \frac{G(n_1n_2)}{\varphi(n_1n_2)} + O\left(\frac{x}{\ln^A x}\right).$$

Учитывая, что $G(n)/\varphi(n) \geq 1/n$, имеем

$$S(k, l, x) \geq 0.24C\Delta(a) \frac{x}{\ln^2 x} \Sigma_1 + O\left(\frac{x}{\ln^A x}\right), \quad (3)$$

и задача свелась к оценке снизу

$$\Sigma_1 := \sum_{n_1} \frac{1}{n_1} \sum_{n_2} \frac{1}{n_2}.$$

Пусть

$$P(z) = \prod_{p \leq z} p \quad \text{и} \quad I_i(k, s, t) = \{n : g_i(n) = k, (n, aP(t)) = 1, n \mid P(t)\},$$

$200 \leq s < t$. Тогда если a четное, то

$$\Sigma_1 \geq \sum_{\substack{n \in I_1(k, s, t), \\ n \leq x^\beta}} \frac{1}{n} \sum_{\substack{m \in I_2(l, s, t), \\ (m, n)=1, \\ m \leq x^\beta}} \frac{1}{m}.$$

Напомним, что при четном a числа n_1 и n_2 нечетные. Если a нечетно и $2 \in E_2$, то n_2 – четное и предыдущая оценка справедлива с заменой условий $m \in I_2(l, s, t)$, $m \leq x^\beta$ на условия $m \in I_2(l-1, s, t)$, $m \leq x^\beta/2$. Пусть $l_1 = l$, если a четно или если a нечетно, но $2 \notin E_2$, и $l_1 = l-1$ в противном случае. Тогда имеем

$$\Sigma_1 \geq \sum_{n \in I_1(k, s, t)} \frac{1}{n} \sum_{\substack{m \in I_2(l_1, s, t), \\ (m, n)=1}} \frac{1}{m} - \sum_{n \in I_1(k, s, t)} \frac{1}{n} \sum_{\substack{m \in I_2(l_1, s, t), \\ nm > x^\beta/2}} \frac{1}{m}.$$

Обозначим

$$\Gamma_i(k, s, t) = \sum_{n \in I_i(k, s, t)} \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\geq \Gamma_1(k, s, t) \Gamma_2(l_1, s, t) \\ &\quad - \sum_{p > s} \frac{1}{p^2} (\Gamma_1(k-1, s, t) + \Gamma_1(k, s, t)) (\Gamma_2(l_1-1, s, t) + \Gamma_2(l_1, s, t)) \\ &\quad - \sum_{n \in I_1(k, s, t)} \frac{1}{n} \sum_{m \in I_2(l_1, s, t)} \frac{\ln nm}{m \ln(x^\beta/2)} \\ &\geq \Gamma_1(k, s, t) \Gamma_2(l_1, s, t) - \frac{1}{s} (\Gamma_1(k-1, s, t) + \Gamma_1(k, s, t)) (\Gamma_2(l_1-1, s, t) + \Gamma_2(l_1, s, t)) \\ &\quad - \frac{1}{\ln(x^\beta/2)} \sum_{p \leq t} \frac{\ln p}{p} \left((\Gamma_1(k-1, s, t) + \Gamma_1(k, s, t)) \Gamma_2(l_1, s, t) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_1(k, s, t) (\Gamma_2(l_1-1, s, t) + \Gamma_2(l_1, s, t)) \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\sum_{p \leq t} \frac{\ln p}{p} \leq 2 \ln t,$$

получим

$$\Sigma_1 \geq \Gamma_1(k, s, t) \Gamma_2(l_1, s, t) - 4 \left(\frac{1}{s} + \frac{2 \ln t}{\ln(x^\beta/2)} \right) \max_{\substack{0 \leq i \leq 1, \\ 0 \leq j \leq 1}} \Gamma_1(k-i, s, t) \Gamma_2(l_1-i, s, t). \quad (4)$$

Будем считать, что $s > |a|$.

Как видно из неравенства (4), задача свелась к исследованию

$$\Gamma_i(k, s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sum_{\substack{n|P(t), \\ (n, P(s))=1}} \frac{z^{g_i(n)}}{n} \frac{dz}{z^{k+1}}.$$

Подынтегральная функция равна

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n|P(t), \\ (n, P(s))=1}} \frac{z^{g_i(n)}}{n} &= \prod_{s < p \leq t} \left(1 + \frac{z^{g(p; E_i)}}{p}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{p \leq t} \frac{z^{g(p; E_i)}}{p}\right) \exp\left(-\sum_{p \leq s} \frac{z^{g(p; E_i)}}{p}\right) \prod_{s < p \leq t} \left(1 + \frac{z^{g(p; E_i)}}{p}\right) \exp\left(-\frac{z^{g(p; E_i)}}{p}\right). \end{aligned}$$

Положим

$$\Phi_i(z) = \exp\left(-\sum_{p \leq s} \frac{z^{g(p; E_i)}}{p}\right) \prod_{p > s} \left(1 + \frac{z^{g(p; E_i)}}{p}\right) \exp\left(-\frac{z^{g(p; E_i)}}{p}\right).$$

Тогда при $|z| \leq 5$ имеем, что подынтегральная функция равна

$$\exp\left(\sum_{p \leq t} \frac{1}{p}\right) \exp(-E_i(t)) e^{z E_i(t)} \left(\Phi_i(z) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Поэтому получаем

$$\Gamma_i(k, s, t) = \exp\left(\sum_{p \leq t} \frac{1}{p}\right) \exp(-E_i(t)) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \left(\Phi_i(z) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) e^{z E_i(t)} \frac{dz}{z^{k+1}}.$$

Выберем $r = k/E_i(t)$, где $k \leq 3E_i(x)$, и пусть t удовлетворяет условию $3E_i(x) \leq 5E_i(t)$. Имеем

$$\Phi_i(z) = \Phi_i(r) + \Phi'_i(r)(z - r) + O\left(\max_{|z| \leq r} |\Phi''_i(z)| \cdot |z - r|^2\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \Phi_i(z) e^{z E_i(t)} \frac{dz}{z^{k+1}} &= \Phi_i(r) E_i^k(t) \frac{1}{k!} + \frac{1}{2\pi i} \Phi'_i(r) \int_{|z|=r} (z - r) e^{z E_i(t)} \frac{dz}{z^{k+1}} \\ &+ O\left(\max_{|z| \leq r} |\Phi''_i(z)| \int_0^{2\pi} |r e^{i\varphi} - r|^2 \exp(\operatorname{Re} r e^{i\varphi} E_i(t)) \frac{d\varphi}{r^k}\right). \end{aligned}$$

Отметим, что при нашем выборе r второе слагаемое равно

$$\Phi'_i(r) \left(\frac{E_i^{k-1}(t)}{(k-1)!} - r \frac{E_i^k(t)}{k!}\right) = 0.$$

Третье слагаемое будет

$$\ll \int_0^{2\pi} r^2 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \exp(r E_i(t) \cos \varphi) \frac{d\varphi}{r^k}.$$

Учитывая, что при $0 \leq \varphi \leq \pi$ справедливо неравенство

$$\frac{\varphi^2}{\pi^2} \leq \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\varphi^2}{4},$$

получим, что третье слагаемое будет

$$\begin{aligned} &\ll \frac{1}{r^{k-2}} \exp(rE_i(t)) \int_0^{2\pi} \varphi^2 \exp\left(-\frac{1}{\pi^2} (\sqrt{2rE_i(t)}\varphi)^2\right) d\varphi \\ &\ll \frac{1}{r^{k-1/2} E_i^{3/2}(t)} \exp(rE_i(t)) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что $r = k/E_i(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_i(k, s, t) = \exp\left(\sum_{p \leq t} \frac{1}{p} - E_i(t)\right) &\left(\Phi_i\left(\frac{k}{E_i(t)}\right) \frac{E_i^k(t)}{k!}\right. \\ &\left.+ O\left(\frac{e^k}{k^{k-1/2}} (E_i(t))^{k-2} + \left(\frac{eE_i(t)}{k}\right)^k \frac{1}{t}\right)\right). \end{aligned}$$

Используя формулу Стирлинга $k! = k^k e^{-k + \Theta/(12k)} \sqrt{2\pi k}$, $0 < \Theta < 1$, имеем

$$\Gamma_i(k, s, t) = \exp\left(\sum_{p \leq t} \frac{1}{p} - E_i(t)\right) \Phi_i\left(\frac{k}{E_i(t)}\right) \frac{E_i^k(t)}{k!} \left(1 + O\left(\frac{1}{E_i(t)} + \frac{\sqrt{k}}{t}\right)\right).$$

Функции $\Phi_i(r)$ при $0 \leq r \leq 5$ убывают, поэтому $\Phi_i(5) \leq \Phi_i(r) \leq \Phi_i(0) = 1$. Возьмем $t = x^\sigma$, $\sigma = \beta/s$. Выберем $s \geq 200|a|$ таким, что

$$4^2 \cdot 3^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{2 \ln t}{\ln(x^\beta/2)}\right) \leq 4^2 \cdot 3^2 \frac{4}{s} \leq \frac{1}{8} \Phi_i^2(5).$$

Это можно сделать, так как

$$\Phi_i(5) \geq \Phi(5) \geq c_8 (\ln s)^{-5},$$

где

$$\Phi(5) = \prod_p \left(1 + \frac{5}{p}\right) e^{-5/p} \exp\left(-5 \sum_{p \leq s} \frac{1}{p}\right).$$

Зафиксируем выбранное s . Так как $E_i(x) \geq T$ при $x \geq x_0$, то при достаточно большом T и $x \geq x_0$ имеем

$$\frac{1}{2} \leq \left(1 + O\left(\frac{1}{E_i(t)} + \frac{\sqrt{k}}{t}\right)\right) \leq 2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \Phi(5) \exp\left(\sum_{p \leq t} \frac{1}{p} - E_i(t)\right) \frac{E_i^k(t)}{k!} \leq \Gamma_i(k, s, t) \leq 2 \exp\left(\sum_{p \leq t} \frac{1}{p} - E_i(t)\right) \frac{E_i^k(t)}{k!}$$

и, подставляя в (4), получим

$$\Sigma_1 \geq \frac{1}{8} \Phi^2(5) \exp\left(2 \sum_{p \leq t} \frac{1}{p} - E_1(t) - E_2(t)\right) \frac{E_1^k(t)}{k!} \frac{E_2^{l_1}(t)}{l_1!}.$$

Так как

$$E_i(x) - 2 \ln \frac{\ln x}{\ln x^\sigma} \leq E_i(t) \leq E_i(x),$$

то при $0 \leq k \leq 3E_i(x)$, $x \geq x_0$, справедливы неравенства

$$E_i^k(x) \geq E_i^k(t) \geq E_i^k(x) \left(1 - \frac{2 \ln(1/\sigma)}{E_i(x)}\right)^{3E_i(x)} \geq \sigma^7 E_i^k(x).$$

Таким образом, при $x \geq x_0$

$$\Sigma_1 \geq c_9 \ln^2 x \exp(-E_1(x) - E_2(x)) \frac{E_1^k(x)}{k!} \frac{E_2^{l_1}(x)}{l_1!}.$$

Отсюда и из (3) вытекает утверждение теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем сначала вторую часть теоремы 2, т.е. оценку снизу. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^3 |\{n : n \leq x, g(n+a, E_2) - g(n, E_1) = m+j\}| \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_k \sum_{j=0}^3 |\{n : n \leq x, g(n, E_1) = k, g(n+a, E_2) = m+k+j\}| \right. \\ & \quad \left. + \sum_k \sum_{j=1}^4 |\{n : n \leq x, g(n, E_1) = k+1, g(n+a, E_2) = m+k+j\}| \right) \\ & \geq \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^3 |\{n : n \leq x, g(n, E_1) = k+i, g(n+a, E_2) = m+k+j\}| \end{aligned}$$

или в введенных ранее обозначениях

$$\sum_{i=0}^3 N(m+i, x, E_1, E_2) \geq \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^2 S(k+i, m+k+1+j, x, E_1, E_2). \quad (5)$$

Пусть $E_2(x) \geq E_1(x)$, т.е. $R(x) = \max(E_1(x), E_2(x)) = E_2(x)$. Если $k \in I = (E_1(x) - \mu\sqrt{E_1(x)}, E_1(x) + \mu\sqrt{E_1(x)})$, то так как $|m - (E_2(x) - E_1(x))| \leq \mu\sqrt{E_2(x)}$, имеем $m+k+1 \in (E_2(x) - 2\mu\sqrt{E_2(x)}, E_2(x) + 2\mu\sqrt{E_2(x)})$. Для k и $m+k+1$ выполнены условия теоремы 1. Используя (5) и теорему 1, получим

$$\sum_{i=0}^3 N(m+i, x, E_1, E_2) \geq c_{10} x \exp(-E_1(x) - E_2(x)) \sum_{k \in I} \frac{E_1^k(x)}{k!} \frac{E_2^{m+k+1}(x)}{(m+k+1)!}.$$

Если $k \in (E_i(x) - \Theta\sqrt{E_i(x)}, E_i(x) + \Theta\sqrt{E_i(x)})$, то, применяя формулу Стирлинга, получим, что

$$\begin{aligned} \frac{E_1^k(x)}{k!} &= \exp\left(k \ln \frac{E_i(x) - k + k}{k} + (k - E_i(x)) + E_i(x) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \\ &= \exp\left(E_i(x) + O\left(\frac{|E_i(x) - k|}{k} + \frac{1}{k}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \geq c_{11} \frac{\exp(E_i(x))}{\sqrt{E_i(x)}}. \end{aligned}$$

Из последних двух неравенств следует, что при $E_2(x) \geq E_1(x)$

$$\sum_{i=0}^3 N(m+i, x, E_1, E_2) \geq c_{12} \frac{x}{\sqrt{E_2(x)}}.$$

Пусть $E_1(x) \geq E_2(x)$. Тогда $R(x) = E_1(x)$ и $|-m - (E_1(x) - E_2(x))| \leq \mu \sqrt{E_1(x)}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^3 |\{n : n \leq x, g(n+a, E_2) - g(n, E_1) = m+j\}| \\ &= \sum_{j=0}^3 |\{n : n \leq x, g(n-a, E_1) - g(n, E_2) = -m+j\}| + O(1). \end{aligned}$$

Повторив предыдущие рассуждения, снова получим неравенство (5), в котором m надо заменить на $-m$, а E_1 и E_2 поменять местами. Далее для $k \in I = (E_2(x) - \mu \sqrt{E_2(x)}, E_2(x) + \mu \sqrt{E_2(x)})$ снова можно применить теорему 1 и в результате доказать оценку снизу в случае $E_1(x) \geq E_2(x)$.

Для доказательства оценки сверху достаточно доказать, что

$$\sup_b |Q_1(x, b)| \ll \frac{x}{\sqrt{R(x)}}, \quad R(x) = \max(E_1(x), E_2(x)),$$

где

$$Q_1(x, b) = \{n : x^{1/3} < n < x - |a|, g(n+a, E_1) - g(n, E_2) = b\}.$$

Воспользуемся методом работы [3]. Пусть $p(n)$ – наибольший и $q(n)$ – наименьший простые делители n соответственно, $p(1) = q(1) = 1$. Для $n \in Q_1(x, b)$ определим числа s, k, m, l следующим образом:

$$\begin{aligned} n+a &= sk, & p(s) &\leq q(k), & s &\leq x^{1/3}, & sq(k) &> x^{1/3}, \\ n &= ml, & p(m) &\leq q(l), & m &\leq x^{1/3}, & mq(l) &> x^{1/3}. \end{aligned}$$

Можно считать, что $q(k)$ и $q(l)$ больше $\ln x$. Действительно, число чисел из $Q_1(x, b)$, например, с $q(k) \leq \ln x$, будет

$$\sum_{\substack{n=n_1 n_2 \leq x, \\ p(n_1) \leq \ln x, \\ q(n_2) > \ln x}} \frac{\ln n_1}{\ln(x^{1/3}/\ln x)} \leq \frac{4}{\ln x} \sum_{\substack{p^r, \\ p \leq \ln x}} \frac{x \ln p^r}{p^r} \ll x \frac{\ln \ln x}{\ln x} \ll \frac{x}{\sqrt{R(x)}}.$$

Если $\ln x > a$, то $q(k) \neq q(l)$. Будем предполагать, что $q(k) < q(l)$. Случай $q(k) > q(l)$ исследуется аналогично. Можно считать, что $p(s) < q(k)$ и $p(m) < q(l)$, так как число чисел $\leq x$, делящихся на квадраты простых $> \ln x$, будет $\leq x/\ln x$. Таким образом, надо оценить число чисел в множестве $Q_2(x, b)$, которое состоит из $x^{1/3} < n < x - |a|$,

$$\begin{aligned} & g(n+a, E_1) - g(n, E_2) = b, \\ n+a &= sk, & p(s) &\leq q(k), & s &\leq x^{1/3}, & sq(k) &> x^{1/3}, \\ n &= ml, & p(m) &\leq q(l), & m &\leq x^{1/3}, & mq(l) &> x^{1/3}, \\ & a < \ln x < q(k) < q(l). \end{aligned}$$

Для $1 < y \leq x^{1/3}$ обозначим $\rho(x, b, y)$ число $n \in Q_2(x, b)$ с $y \leq q(k) < y^3$. Положим $y_i = x^{3^{-j}}$. Тогда

$$|Q_2(x, b)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \rho(x, b, y_i). \quad (6)$$

Если j таково, что $y_j^3 < \ln x$, то $\rho(x, b, y_j) = 0$, т.е. сумма по j конечная. Если число n входит в $Q_2(x, b)$ и засчитывается в $\rho(x, b, y)$, то числа s, m, k, l таковы, что

$$\begin{aligned} sk - ml &= a, & sk < x, & & g(sk, E_1) - g(ml, E_2) &= b, \\ p(s) < q(k) < y^3, & y < q(k) < q(l), & s \leq x^{1/3}, & m \leq x^{1/3}, \\ s &> \frac{x^{1/3}}{q(k)} > \frac{x^{1/3}}{y^3}. \end{aligned}$$

Так как $g(k, E_1) \leq (\ln x)/(\ln y)$ и $g(l, E_2) \leq (\ln a)/(\ln y)$, то

$$|g(s, E_1) - g(m, E_2) - b| \leq \frac{\ln x}{\ln y}.$$

Пусть $(s, m) = \delta$, где $\delta \mid a$. Заменяем s, m на $\delta s, \delta m$, где $(s, m) = 1$. Тогда все решения уравнения $sk - ml = a/\delta$, $(m, s) = 1$, имеют вид

$$k = k_0 \frac{a}{\delta} + tm, \quad l = l_0 \frac{a}{\delta} + ts,$$

где k_0, s_0 – единственные решения уравнения

$$sk - ml = 1, \quad 0 < k_0 < m, \quad 0 < l_0 < s.$$

Так как $k < x/(\delta s)$, то $t < x/(sm\delta)$ и

$$q\left(\left(k_0 \frac{a}{\delta} + tm\right)\left(l_0 \frac{a}{\delta} + ts\right)\right) \geq y.$$

Напомним, что $\delta s \leq x^{1/3}$, $\delta m \leq x^{1/3}$. Применив решето Сельберга (см. [6, теорема 3.1, с. 101]), получим, что количество чисел t , удовлетворяющих последним условиям, равно

$$O\left(\frac{x}{\delta \varphi(m) \varphi(s) \ln^2 y}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \rho(x, b, y) &\ll \sum_{\substack{\delta \mid a \\ x^{1/3}/y^3 < \delta s \leq x^{1/3}, \\ p(\delta s) < y^3}} \sum_{\substack{\delta m < x^{1/3}, \\ |g(\delta s, E_1) - g(\delta m, E_2) - b| \leq (\ln x)/(\ln y)}} \sum_{\substack{\delta m < x^{1/3}, \\ |g(\delta s, E_1) - g(\delta m, E_2) - b| \leq (\ln x)/(\ln y)}} \frac{x}{\delta \varphi(m) \varphi(s) \ln^2 y} \\ &\ll \sum_{\substack{x^{1/3}/y^3 < s \leq x^{1/3}, \\ p(s) < y^3}} \sum_{\substack{m < x^{1/3}, \\ |g(s, E_1) - g(m, E_2) - b| \leq (\ln x)/(\ln y)}} \frac{x}{\varphi(m) \varphi(s) \ln^2 y}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для оценки суммы по s, m докажем следующие леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $g(n)$ – аддитивная функция, принимающая целые значения, и $g(p) = \omega(p, E)$. Тогда

$$\sup_t \sum_{\substack{n \leq x, \\ g(n)=t}} \frac{1}{\varphi(n)} \ll \frac{\ln x}{\sqrt{E(x)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим n в виде $n = n_1 n_2 n_3$, где все простые делители n_1 не входят в E , все простые делители $n_2 n_3$ входят в E , $(n_2, n_3) = 1$, n_3 бесквадратное, а n_2 таково, что если $p \mid n_2$, то $p^2 \mid n_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_t \sum_{\substack{n \leq x, \\ g(n)=t}} \frac{1}{\varphi(n)} &\leq \sum_{n_1 \leq x} \frac{1}{\varphi(n_1)} \sum_{n_2 \leq x} \frac{1}{\varphi(n_2)} \sup_t \sum_{\substack{n_3 \leq x, \\ g(n_3)=t}} \frac{1}{\varphi(n_3)} \\ &\ll \exp \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{p \leq x, \\ p \in E}} \frac{1}{p} \right) \sup_t \frac{1}{t!} \left(\sum_{\substack{p \leq x, \\ p \in E}} \frac{1}{p-1} \right)^t. \end{aligned}$$

Используя формулу Стирлинга, получим, что супремум по t равен

$$\sup_t \frac{1}{t!} (E(x) + O(1))^t \ll \frac{\exp(E(x))}{\sqrt{E(x)}}.$$

Подставляя эту оценку в предыдущее соотношение, получим утверждение леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть $z > 1$. Тогда

$$\sup_t \sum_{\substack{z < n \leq x, \\ p(n) \leq y, \\ g(n)=t}} \frac{1}{\varphi(n)} \ll \left(\frac{\ln y}{\ln z} \right)^4 \frac{\ln x}{\sqrt{E(x)}}, \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{z < n \leq x, \\ p(n) \leq y}} \frac{1}{\varphi(n)} \ll \left(\frac{\ln y}{\ln z} \right)^4 \ln x. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оцениваемая сумма в (8) не превосходит

$$\sum_{\substack{n \leq x, \\ p(n) \leq y, \\ g(n)=t}} \left(\frac{\ln n}{\ln z} \right)^4 \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{1}{\ln^4 z} \sum_{\substack{n \leq x, \\ p(n) \leq y, \\ g(n, E)=t}} \frac{1}{\varphi(n)} \left(\sum_{p^r \parallel n} \ln p^r \right)^4.$$

Возведем сумму по p^r в четную степень и, меняя порядок суммирования, получим, что супремум по t оцениваемой суммы

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\ln^4 z} \sum_{\substack{p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, p_3^{r_3}, p_4^{r_4}, \\ p_1 \leq y, p_2 \leq y, p_3 \leq y, p_4 \leq y}} \sum_{\substack{n \leq x, \\ p(n) \leq y, \\ g(n, E)=t}} \frac{\ln p_1^{r_1} \ln p_2^{r_2} \ln p_3^{r_3} \ln p_4^{r_4}}{\varphi([p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, p_3^{r_3}, p_4^{r_4}])} \sup_t \sum_{\substack{n \leq x, \\ g(n)=t}} \frac{1}{\varphi(s)} \\ &\ll \left(\frac{\ln y}{\ln z} \right)^4 \sup_t \sum_{\substack{n \leq x, \\ g(n)=t}} \frac{1}{\varphi(n)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 2 следует утверждение (8) леммы 3. Соотношение (9) доказывается аналогично.

Вернемся к соотношению (7). Используя лемму 2, получим

$$\rho(x, b, y) \ll \sum_{\substack{x^{1/3}/y^3 < s \leq x^{1/3}, \\ p(s) < y^3}} \frac{x}{\varphi(s)} \frac{1}{\ln^2 y} \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right) \frac{\ln x}{\sqrt{E_2(x)}}.$$

Отсюда и из соотношения (9) леммы 3 при $y < x^{1/18}$ следует, что

$$\rho(x, b, y) \ll \left(\frac{\ln y}{\ln x} \right)^4 \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)^3 \frac{x}{\sqrt{E_2(x)}} = \frac{\ln y}{\ln x} \frac{x}{\sqrt{E_2(x)}}. \quad (10)$$

Эта оценка справедлива и при $y > x^{1/18}$. Переставив суммы по s и m , получим

$$\rho(x, b, y) \ll \frac{x}{\ln^2 y} \sum_{m \leq x^{1/3}} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{t, \\ |t - g(m, E_2) - b| \leq (\ln x)/(\ln y)}} \sum_{\substack{x^{1/3}/y^3 < s \leq x^{1/3}, \\ p(s) < y^2, \\ g(s, E_1) = t}} \frac{1}{\varphi(s)}.$$

Отсюда и из соотношения (8) леммы 3 при $y \leq x^{1/18}$ следует, что

$$\rho(x, b, y) \ll \frac{x}{\ln^2 y} \sum_{m \leq x^{1/3}} \frac{1}{\varphi(m)} \frac{\ln x}{\ln y} \left(\frac{\ln y}{\ln x} \right)^4 \frac{\ln x}{\sqrt{E_1(x)}}.$$

Если $y > x^{1/18}$, то последняя оценка следует из леммы 2, если мы в сумме по s отбросим условия $p(s) < y^2$ и $s > x^{1/3}/y^3$. Следовательно, учитывая (10), мы имеем

$$\rho(x, b, y) \ll x \left(\frac{\ln y}{\ln x} \right) \frac{1}{\sqrt{\max(E_1(x), E_2(x))}}.$$

Подставляя последнюю оценку в (6), находим

$$|Q_2(x, b)| \ll \frac{x}{\sqrt{R(x)}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j} \ll \frac{x}{\sqrt{R(x)}}.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Halász G. Remarks to my paper "On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions" // Acta Math. Sci. Hungar. 1972. V. 23. P. 425–432.
- [2] Norton K. K. On the number of restricted prime factors of an integer. II // Acta Math. 1979. V. 143. P. 9–38.
- [3] Erdős P., Pomerance C., Sárközy A. On locally repeated values of certain arithmetic functions. III // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 101. № 1. P. 1–7.
- [4] Тимофеев Н. М. О разности числа простых делителей последовательных чисел // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 579–595.
- [5] Hildebrand A. Multiplicative functions at consecutive integers // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1988. V. 103. P. 389–398.
- [6] Halberstam H., Richter H.-E. Sieve Methods. London–New York: Academic Press, 1974.