Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Строение модулей над наследственными кольцами, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 739–755

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm994>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:03:08

УДК 512.55

СТРОЕНИЕ МОДУЛЕЙ НАД НАСЛЕДСТВЕННЫМИ КОЛЬЦАМИ

А. А. Туганбаев

Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо. Для A -модуля M_A доказано, что M – конечно порожденный проективный $A/r(M)$ -модуль $\iff M$ – π -проективный конечномерный модуль, причем либо M – редуцированный модуль, либо A – простое артиново кольцо. Полностью описано строение периодических или смешанных π -проективных A -модулей.

Библиография: 11 названий.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Слова типа “нётерово кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Модуль M называется π -*проективным*, если для любых его подмодулей U и V таких, что $U + V = M$, существует такой эндоморфизм f модуля M , что $f(M) \subseteq U$ и $(1 - f)(M) \subseteq V$ (см. [1, с. 359]). Модуль M называется *малопроективным*, если для любого эпиморфизма $h: M \rightarrow \bar{M}$ и каждого эндоморфизма f^* модуля $\bar{M}$ существует такой эндоморфизм f модуля M , что $f^*h = hf$. Модуль, не имеющий ненулевых инъективных прямых слагаемых, называется *редуцированным*. Модуль, не содержащий бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей, называется *конечномерным* (в смысле Голди). Через $r_A(N)$ обозначается аннулятор в кольце A подмножества N правого модуля M_A , причем индекс может опускаться, когда ясно, какое кольцо имеется в виду. Через $\text{Sing}(M)$ обозначается *сингулярный подмодуль* модуля M_A над кольцом A (т. е. множество всех таких элементов $m \in M$, что $r(m)$ – существенный правый идеал кольца A). Модуль M_A называется *несингулярным (сингулярным)*, если $\text{Sing}(M) = 0$ ($\text{Sing}(M) = M$).

В [2] доказана следующая

ТЕОРЕМА А [2, теорема 4]. Пусть M – модуль над наследственным нётеровым первичным кольцом A , причем кольцо A не является примитивным справа. Тогда M – конечно порожденный проективный модуль $\iff M$ – π -проективный редуцированный конечномерный несингулярный модуль.

Кольцо A называется *ограниченным слева (справа)*, если каждый его существенный левый (правый) идеал содержит ненулевой идеал кольца A . Заметим, что каждое наследственное первичное непримитивное кольцо является ограниченным кольцом [3]. Основными результатами данной работы являются теоремы 1, 2 и 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00382.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – модуль над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом A . Тогда M – конечно порожденный проективный $A/r(M)$ -модуль $\iff M$ – π -проективный конечномерный модуль, причем либо M – редуцированный модуль, либо A – простое артиново кольцо.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – модуль над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом A и $\text{Sing}(M) \neq 0$. Тогда M – π -проективный модуль $\iff M$ – малопроективный модуль $\iff$ выполнено одно из следующих условий:

- (i) M – сингулярный модуль, у которого каждая примарная компонента является либо неразложимым инъективным модулем, либо проективным модулем над фактор-кольцом кольца A по аннулятору этой примарной компоненты
- (ii) $M = T \oplus F$, где F – конечно порожденный проективный модуль и T – сингулярный инъективный модуль, у которого каждая примарная компонента является неразложимым модулем.

ТЕОРЕМА 3. Пусть M – модуль над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом A . Тогда M – π -проективный несингулярный конечномерный модуль $\iff$ выполнено одно из следующих условий:

- (i) M – конечно порожденный проективный модуль;
- (ii) A – полуцепное кольцо и $M = T \oplus F$, где T – инъективный неразложимый несингулярный модуль, а F – конечно порожденный проективный модуль;
- (iii) существует такое натуральное число n , что кольцо A изоморфно кольцу всех $(n \times n)$ -матриц над некоторой полной цепной нётеровой областью D , $M = T \oplus F$, где T – инъективный конечномерный несингулярный модуль, а F – конечно порожденный проективный модуль.

Доказательство теорем 1, 2 и 3 разбито на ряд лемм. Приведем необходимые определения и обозначения. Через $\text{End}(M)$ и $J(M)$ обозначаются соответственно кольцо эндоморфизмов и радикал Джекобсона модуля M . Модуль называется *наследственным* (полунаследственным), если все его подмодули (все его конечно порожденные подмодули) проективны. Модуль называется *цепным*, если любые его два подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем. Цепная нётерова область A называется *полной*, если кольцо A является полным относительно $J(A)$ -адической топологии. Модуль M называется *проективным относительно модуля N* (или *N -проективным*), если для любого эпиморфизма $h: N \rightarrow \bar{N}$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}: M \rightarrow \bar{N}$ существует такой гомоморфизм $f: M \rightarrow N$, что $hf = \bar{f}$. Модуль, проективный относительно себя, называется *квазипроективным* модулем. Подмодуль фактор-модуля модуля M называется *подфактором* модуля M . Модуль, не являющийся конечномерным, называется *бесконечномерным*. Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*. Элемент a кольца A , не являющийся левым или правым делителем нуля, называется *регулярным* элементом. Для модуля M через $T(M)$ обозначается множество всех элементов из M , аннуляторы которых содержат регулярные элементы. Если $T(M) = M$ ($0 \neq T(M) \neq M$; $T(M) = 0$), то M называется *периодическим* (смешанным; модулем без кручения). Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Подмодуль N модуля M называется *существенным* (в M), если N имеет ненулевое пересечение с любым ненулевым подмодулем модуля M . В этом случае мы будем говорить, что M – *существенное*

расширение модуля N . Подмодуль V правого модуля U над кольцом S называется *чистым* подмодулем в U_S , если для каждого левого S -модуля M естественный групповой гомоморфизм $V \otimes_S M \rightarrow U \otimes_S M$ является мономорфизмом. Модуль X_A называется *чисто-инъективным*, если для каждого модуля M_A и любого чистого подмодуля N модуля M все гомоморфизмы $N \rightarrow X$ продолжаются до гомоморфизмов $M \rightarrow X$. Модуль M называется *конечно точным*, если существует такое натуральное число n , что модуль M^n содержит свободный циклический подмодуль. Кольцо A называется *чисто-полупростым справа*, если все правые A -модули чисто-инъективны. Кольцо A называется *кольцом конечного типа представлений*, если A – артиново кольцо и существует лишь конечное число неизоморфных неразложимых конечно порожденных (правых или левых) A -модулей.

Пусть кольцо A обладает классическим кольцом частных Q , B – идеал кольца A . Тогда B называется *обратимым* идеалом, если существует такой подбимодуль B^{-1} бимодуля ${}_A Q_A$, что $BB^{-1} = B^{-1}B = A$. Максимальные элементы множества всех собственных обратимых идеалов кольца A называются *максимальными обратимыми идеалами* кольца A . Множество всех максимальных обратимых идеалов кольца A обозначается через $\mathcal{P}(A)$. Если M – A -модуль и $P \in \mathcal{P}(A)$, то подмодуль $\{m \in M \mid mP^n = 0, n = 1, 2, \dots\}$ называется *P -примарной компонентой* модуля M и обозначается через $M(P)$.

1. Доказательство теоремы 1.

ЛЕММА 1.1. Пусть M – модуль над кольцом A .

- (1) M – квазипроективный (π -проективный; малопроективный) A -модуль $\iff M$ – квазипроективный (π -проективный; малопроективный) $A/r(M)$ -модуль.
- (2) Если M – квазипроективный модуль, то M – малопроективный модуль.
- (3) Если все идемпотентные эндоморфизмы всех фактор-модулей модуля M поднимаются до эндоморфизмов модуля M , то M – π -проективный модуль.
- (4) Если M – малопроективный модуль, то M – π -проективный модуль.
- (5) Если M – квазипроективный модуль, то M – π -проективный модуль.
- (6) Если M – цепной модуль, то M – π -проективный модуль.
- (7) Если T – подмодуль в M , то T чист в $M \iff$ для любых двух натуральных чисел n и k система уравнений $\sum_{j=1}^k X_j a_{ij} = t_i$ ($i = 1, \dots, n$, $a_{ij} \in A$, $t_i \in T$), обладающая решением $x_1, \dots, x_k \in M$, имеет также решение в T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из того, что любые подфакторы N и P модуля M являются $A/r(M)$ -модулями и $\text{Hom}_{A/r(M)}(N, P) = \text{Hom}_A(N, P)$.

(2) Пусть $h: M \rightarrow \overline{M}$ – эпиморфизм и f^* – эндоморфизм модуля $\overline{M}$. Положим $\overline{f} \equiv f^*h \in \text{Hom}(M, \overline{M})$. Так как M – квазипроективный модуль, существует такой эндоморфизм f модуля M , что $hf = \overline{f} = f^*h$. Поэтому M – малопроективный модуль.

(3) Пусть U и V – такие подмодули модуля M , что $U + V = M$, $\overline{M} \equiv M/(U \cap V)$, $h: M \rightarrow \overline{M}$ – естественный эпиморфизм. Так как $\overline{M} = h(U) \oplus h(V)$, существует естественная проекция $\overline{f}: \overline{M} \rightarrow h(U)$ с ядром $h(V)$. По условию существует такой эндоморфизм f модуля M , что $\overline{f}h = hf$. Поэтому $(1_{h(M)} - \overline{f})h = h - \overline{f}h = h(1_M - f)$. Тогда $hf(M) = \overline{f}(\overline{M}) = h(U)$ и $h(1 - f)(M) = h(V)$. Поэтому $f(M) \subseteq U + U \cap V = U$, $(1 - f)(M) \subseteq V + U \cap V = V$ и M – π -проективный модуль.

(4) следует из (3).

(5) следует из (2) и (4).

(6) По (3) достаточно доказать, что каждый ненулевой идемпотентный эндоморфизм f^* любого фактор-модуля $\bar{M}$ цепного модуля M поднимается до эндоморфизма модуля M . Так как $\bar{M}$ – цепной модуль, то f^* – тождественный автоморфизм. Поэтому f^* поднимается до тождественного автоморфизма модуля M .

(7) доказано в [1, 34.5].

ЛЕММА 1.2. Пусть M – модуль над кольцом A , $\{Y_i\}_{i \in I}$ – некоторое множество A -модулей.

- (1) Если все модули Y_i проективны относительно M , то $\oplus_{i \in I} Y_i$ – M -проективный модуль.
- (2) Если Y – подфактор модуля $\oplus_{i \in I} Y_i$, X – модуль, проективный относительно всех модулей Y_i , причем либо I – конечное множество, либо X – конечно порожденный модуль, то X – Y -проективный модуль.
- (3) Если $\oplus_{i \in I} Y_i$ – π -проективный модуль, то Y_i – Y_j -проективный модуль для любых несовпадающих индексов $i, j \in I$.
- (4) Если A – артиново справа кольцо, то M – квазипроективный модуль $\iff M$ – проективный $A/r(M)$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1), (2) и (3) доказаны в [1, 18.1, 18.2, 41.14].

(4) доказано в [4, теорема 2.3].

ЛЕММА 1.3. Пусть модуль M является прямой суммой конечно порожденных модулей M_i ($i \in I$). Равносильны условия:

- (1) M – квазипроективный модуль;
- (2) M – π -проективный модуль и все M_i – квазипроективные модули;
- (3) M_i – M_j -проективный модуль для всех индексов $i, j \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\implies$ (2) следует из леммы 1.1 (5) и того, что прямые слагаемые квазипроективных модулей квазипроективны.

(2) $\implies$ (3) следует из квазипроективности модулей M_i и того, что по лемме 1.2 (3) M_i – M_j -проективный модуль для любых несовпадающих индексов $i, j \in I$.

(3) $\implies$ (1) следует из леммы 1.2 (1), (2).

ЛЕММА 1.4.

- (1) Если M – прямая сумма конечно порожденных квазипроективных модулей, то M – квазипроективный модуль $\iff M$ – π -проективный модуль.
- (2) Если $X \oplus N$ – π -проективный модуль и Y – подфактор модуля N , то модуль X проективен относительно модуля Y .
- (3) Если A – полуцепное артиново кольцо, то A – кольцо конечного типа представлений и каждый A -модуль является прямой суммой циклических цепных квазипроективных модулей.
- (4) Если M – модуль над полуцепным артиновым кольцом, то M – π -проективный модуль $\iff M$ – квазипроективный модуль $\iff M$ – проективный $A/r(M)$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из леммы 1.3.

(2) следует из леммы 1.2 (3), (2).

(3) следует из [1, 55.16, 53.6].

(4) следует из (1), (3) и леммы 1.2 (4).

ЛЕММА 1.5. Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо.

- (1) Каждое собственное фактор-кольцо кольца A является полуцепным артиновым кольцом, причем A – либо ограниченное, либо примитивное кольцо. (Если A – ограниченное примитивное кольцо, то A – простое артиново кольцо.)
- (2) Если M – правый A -модуль и $r(M) \neq 0$, то M – π -проективный модуль $\iff M$ – квазипроективный модуль $\iff M$ – проективный $A/r(M)$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [5, теорема 25.5.1] и [3].

(2) вытекает из (1) и лемм 1.1 (1), 1.4 (4).

ЛЕММА 1.6. Пусть A – полупервичное правое кольцо Голди.

- (1) A – несингулярное справа кольцо, A имеет полупростое артиново классическое правое кольцо частных Q , Q_A – инъективная оболочка модуля A_A и множество всех существенных правых идеалов кольца A совпадает со множеством всех правых идеалов кольца A , содержащих регулярные элементы. Кроме того, если Q_A – нётеров модуль, то $A = Q$ – полупростое артиново кольцо.
- (2) Класс всех сингулярных правых A -модулей совпадает с классом всех периодических правых A -модулей, а класс всех несингулярных правых A -модулей совпадает с классом всех правых A -модулей без кручения.
- (3) Любое существенное расширение периодического правого A -модуля является периодическим модулем.
- (4) Если M – правый A -модуль, то $\text{Sing}(M)$ – сингулярный периодический модуль и $M/\text{Sing}(M)$ – несингулярный модуль без кручения.
- (5) Если M – непериодический правый A -модуль, то M содержит ненулевой подмодуль без кручения, изоморфный правому идеалу кольца A .
- (6) Каждый равномерный правый A -модуль является либо модулем без кручения, либо периодическим модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [6, 5.9, 5.48 (1), 5.31 (1)].

(2), (3) и (4) следуют из (1).

(5) По (2) существует элемент $m \in M \setminus \text{Sing}(M)$. Тогда правый идеал $r(m)$ кольца A не является существенным. Поэтому существует такой ненулевой правый идеал B кольца A , что $B \cap r(m) = 0$. Если $f: A_A \rightarrow mA$ – естественный эпиморфизм с ядром $r(m)$, то $B \cap \text{Ker}(f) = 0$, $B \cong f(B) \subseteq M$ и $f(B)$ – ненулевой модуль без кручения.

(6) следует из (5).

ЛЕММА 1.7. Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся примитивным справа, M – ненулевой периодический A -модуль.

- (1) Если M – конечно порожденный модуль, то $r(M) \neq 0$ и M – конечная прямая сумма циклических цепных модулей конечной длины.
- (2) M имеет ненулевое цепное счетно порожденное прямое слагаемое.

- (3) Если модуль M не инъективен, то M имеет ненулевое циклическое цепное прямое слагаемое конечной длины.
- (4) Если M – неразложимый модуль, то либо M – инъективный цепной модуль, либо M – циклический цепной модуль конечной длины и $r(M) \neq 0$.
- (5) Если M – конечномерный модуль, то M – конечная прямая сумма цепных модулей.
- (6) Если M – редуцированный конечномерный модуль, то $r(M) \neq 0$ и M – конечная прямая сумма циклических цепных ненулевых модулей конечной длины.
- (7) Если M – редуцированный конечномерный модуль, то M – π -проективный модуль $\iff M$ – квазипроективный модуль $\iff M$ – проективный $A/r(M)$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ((1) доказано в [7, лемма 2] и [8, лемма 1].

(2) и (3) следуют из [8, теорема 10, лемма 1].

(4) следует из (2) и (3).

(5) следует из (4) и того, что каждый конечномерный модуль является конечной прямой суммой неразложимых модулей.

(6) следует из (4), (5) и (1).

(7) следует из (6) и леммы 1.5 (2).

ЛЕММА 1.8. Пусть X – чистый подмодуль правого модуля M над кольцом A .

- (1) Если Y – чистый подмодуль в X , то Y – чистый подмодуль в M .
- (2) Если X – чисто-инъективный модуль, то X – прямое слагаемое модуля M .
- (3) Если B – собственный идеал кольца A и $h: M \rightarrow M/B$ – естественный эпиморфизм, то $h(X)$ – чистый подмодуль A/B -модуля $h(M)$.
- (4) $X \cap MB = XB$ для любого левого идеала B кольца A

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) и (2) проверяются непосредственно.

(3) Пусть n и k – натуральные числа и $\sum_{j=1}^k h(m_j)(a_{ij} + B) = h(x_i)$, где $m_j \in M$, $a_{ij} \in A$ и $x_i \in X$ ($i = 1, \dots, n$). Существуют такие элементы $t_1, \dots, t_n \in MB$, что $\sum_{j=1}^k m_j a_{ij} + t_i = x_i$ ($i = 1, \dots, n$). Из леммы 1.1 (7) следует существование таких элементов $y_j \in X$ и $z_i \in XB$, что $\sum_{j=1}^k y_j a_{ij} + z_i = x_i$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда $\sum_{j=1}^k h(y_j)a_{ij} = h(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$). По лемме 1.1 (7) $h(X)$ – чистый подмодуль в $h(M)$.
 (4) следует из [1, 34.5 и 34.9].

ЛЕММА 1.9. Пусть B – собственный ненулевой идеал кольца A , X – чистый подмодуль правого A -модуля M , $XB = 0$, $h: M \rightarrow M/B$ – естественный эпиморфизм.

- (1) $X \cap MB = 0$.
- (2) Если $h(X)$ – прямое слагаемое в $h(M)_{A/B}$, то X – прямое слагаемое в M_A .
- (3) Если кольцо A/B чисто-полупросто справа, то X – прямое слагаемое модуля M_A .
- (4) Если A/B – кольцо конечного типа представлений, то X – прямое слагаемое модуля M_A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как X – чистый подмодуль в M , то $X \cap MB = XB = 0$ по лемме 1.8 (4).

(2) По (1) $X \cap MB = 0$. Пусть $h(M) = h(X) \oplus h(Y)$, где $MB \subseteq Y \subseteq M$. Тогда $M = X + Y$ и $X \cap Y = X \cap MB = 0$. Поэтому $M = X \oplus Y$.

(3) По лемме 1.8 (2) чисто-инъективный A/B -модуль $h(X)$ является прямым слагаемым A/B -модуля $h(M)$. По (2) X – прямое слагаемое A -модуля M .

(4) следует из (3) и того, что каждое кольцо конечного типа представлений является чисто-полупростым кольцом [1, 54.3].

ЛЕММА 1.10. Пусть N – модуль, X – N -проективный модуль, Y – подфактор модуля N .

- (1) Если существует эпиморфизм $h: Y \rightarrow X$, то $\text{Ker}(h)$ – прямое слагаемое модуля Y , причем X – квазипроективный модуль, изоморфный прямому слагаемому модуля Y .
- (2) Пусть X – t -порожденный модуль, где t – кардинальное число. Если существует такое натуральное число n , что модуль Y^n содержит свободный подмодуль F ранга t , то X – проективный модуль.
- (3) Если Y – конечно точный модуль, то модуль X проективен относительно любого конечно порожденного правого A -модуля.
- (4) Если X – конечно порожденный модуль и Y – конечно точный модуль, то X – проективный модуль.
- (5) Если Y – неразложимый модуль, причем $X \neq 0$ и существует эпиморфизм $f: Y \rightarrow X$, то f – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как X проективен относительно Y , для эпиморфизма f и тождественного отображения 1_X существует такой гомоморфизм $g: X \rightarrow Y$, что $1_X = fg$. Поэтому $Y = \bar{X} \oplus \text{Ker}(f)$, где $\bar{X} \cong X$. Кроме того, X проективен относительно $\bar{X}$. Поэтому X – квазипроективный модуль.

(2) По лемме 1.2 (2) X – F -проективный модуль. Так как существует эпиморфизм $h: F \rightarrow X$, то по (1) модуль X изоморфен прямому слагаемому свободного модуля F .

(3) Существует такое натуральное число n , что Y^n содержит свободный циклический подмодуль F . По (1) X – Y -проективный модуль. По лемме 1.2 (2) X – F -проективный модуль. По лемме 1.2 (2) модуль X проективен относительно любого конечно порожденного свободного модуля. Так как произвольный конечно порожденный модуль S является гомоморфным образом конечно порожденного свободного модуля, то по лемме 1.2 (2) X проективен относительно любого конечно порожденного модуля.

(4) следует из (2).

(5) следует из (1).

ЛЕММА 1.11. Пусть A – первичное правое кольцо Голди, Q – инъективная оболочка модуля A_A .

- (1) Существует такое натуральное число n , что для каждого непериодического правого A -модуля N модуль N^n содержит свободный циклический подмодуль.
- (2) Существует такое натуральное число n , что для каждого бесконечномерного модуля Y_A без кручения модуль Y^n содержит свободный подмодуль бесконечного ранга.
- (3) Если N – непериодический правый A -модуль, то каждый конечно порожденный N -проективный модуль X является проективным.
- (4) Если Y – бесконечномерный правый A -модуль без кручения, то каждый счетно порожденный Y -проективный модуль X является проективным.

- (5) Если N – непериодический правый A -модуль и X – ненулевой конечно порожденный периодический модуль, то модуль $X \oplus N$ не является π -проективным.
- (6) Если правый A -модуль N содержит бесконечномерный подмодуль Y без кручения и X – ненулевой счетно порожденный периодический модуль, то модуль $X \oplus N$ не является π -проективным.
- (7) Если E – любой инъективный несингулярный неразложимый ненулевой правый A -модуль, то все инъективные несингулярные неразложимые ненулевые правые A -модули изоморфны модулю E и существует такое натуральное число n , что $Q \cong E^n$.
- (8) Если существует ненулевой нётеров инъективный несингулярный неразложимый ненулевой правый A -модуль E , то A – простое артиново кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 1.6 (5) модуль N содержит подмодуль без кручения, изоморфный некоторому ненулевому правому идеалу B кольца A . По лемме 1.6 (1) A – правый порядок в полупростом артиновом кольце Q . Пусть n – длина композиционного ряда модуля Q_Q . Тогда любая строго убывающая цепь правых аннуляторов в кольце Q содержит не более n включений. Поэтому любая строго убывающая цепь правых аннуляторов в кольце A содержит не более n включений. Следовательно, существуют такие элементы $b_1, \dots, b_n \in B$, что $r(B) = r(b_1, \dots, b_n) = r(b_1) \cap \dots \cap r(b_n)$. Поэтому модуль B^n содержит свободный циклический подмодуль. Тогда модуль N^n содержит свободный циклический подмодуль.

(2) По условию модуль Y содержит подмодуль $\bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i$, где все N_i – ненулевые модули без кручения. По (1) существует такое натуральное число n , что каждый модуль N_i^n содержит свободный циклический подмодуль F_i . Тогда модуль Y^n содержит свободный подмодуль $\bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i$ бесконечного ранга.

(3) следует из (1) и леммы 1.10 (4).

(4) следует из (2) и леммы 1.10 (2).

(5), (6) Допустим, что $X \oplus N$ – π -проективный модуль. По лемме 1.4 (2) модуль X проективен относительно любого подфактора модуля N . По (3) и (4) X – проективный модуль. Так как каждый подмодуль любого свободного модуля является модулем без кручения, то X – модуль без кручения. Тогда X – ненулевой периодический модуль без кручения; получено противоречие.

(7) следует из леммы 1.6 (1) и [2, лемма 1.19 (1)].

(8) По (7) существует такое натуральное число n , что $Q \cong E^n$. Поэтому Q – нётеров модуль. По лемме 1.6 (1) A – артиново первичное кольцо. Поэтому A – простое кольцо.

ЛЕММА 1.12. Пусть A – полунаследственное полупервичное кольцо Голди.

- (1) Каждый A -модуль без кручения является плоским модулем.
- (2) Если M – правый A -модуль, то $M/\text{Sing}(M)$ – плоский модуль без кручения и каждый чистый подмодуль X модуля $\text{Sing}(M)$ является чистым периодическим подмодулем модуля M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [9, с. 60].

(2) По лемме 1.6 (3) X – периодический модуль и $M/\text{Sing}(M)$ – модуль без кручения. По (1) $M/\text{Sing}(M)$ – плоский модуль. Поэтому $\text{Sing}(M)$ – чистый подмодуль в M [9, с. 37]. По лемме 1.8 (1) X – чистый подмодуль в M .

ЛЕММА 1.13. Пусть M – модуль над наследственным нётеровым первичным кольцом A , B – собственный ненулевой идеал кольца A .

- (1) Если X – чистый подмодуль модуля M и $XB = 0$, то X – прямое слагаемое в M .
- (2) Если X – чистый подмодуль модуля $\text{Sing}(M)$ и $XB = 0$, то X – прямое слагаемое в M .
- (3) Если X – прямое слагаемое модуля $\text{Sing}(M)$ и $XB = 0$, то X – прямое слагаемое в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 1.5 (1) A/B – полуцепное артиново кольцо. По лемме 1.4 (3) A/B – кольцо конечного типа представлений. Теперь (1) следует из леммы 1.9 (4).

(2) следует из (1) и того, что X – чистый подмодуль модуля M по лемме 1.12 (2).

(3) следует из (2) и того, что каждое прямое слагаемое является чистым подмодулем.

ЛЕММА 1.14. Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся примитивным справа, M – смешанный A -модуль.

- (1) Либо $M = T \oplus F$, где T – инъективный периодический ненулевой модуль и F – ненулевой модуль без кручения, либо $M = X \oplus N$, где X – циклический цепной периодический ненулевой модуль, а N – непериодический модуль.
- (2) M имеет цепное ненулевое счетно порожденное периодическое прямое слагаемое, являющееся либо инъективным, либо циклическим модулем.
- (3) Если M – редуцированный модуль, то $M = X \oplus N$, где X – циклический цепной периодический ненулевой модуль, а N – непериодический модуль.
- (4) Если M – π -проективный модуль, то $M = T \oplus F = X \oplus N$, где T – ненулевой инъективный периодический модуль, F – ненулевой модуль без кручения, X – ненулевой цепной инъективный счетно порожденный периодический модуль, N – непериодический модуль.
- (5) Если M – редуцированный модуль, то M не является π -проективным модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Положим $T \equiv \text{Sing}(M)$. Без ограничения общности можно рассмотреть только случай, когда T – неинъективный ненулевой периодический модуль. По лемме 1.7 (3), (4) T имеет такое ненулевое циклическое цепное периодическое ненулевое прямое слагаемое X , что $r(X) \neq 0$. По лемме 1.13 (3) существует прямое разложение $M = X \oplus N$. Так как M – смешанный модуль, то N – непериодический модуль.

(2) и (3) следуют из (1) и леммы 1.7 (2).

(4) следует из (1), (2) и леммы 1.11 (5).

(5) следует из (4).

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Можно считать, что A не является простым артиновым кольцом. По лемме 1.5 (1) A не является примитивным справа. По лемме 1.6 (2) возможны только следующие три случая: 1) M – несингулярный модуль; 2) M – периодический модуль; 3) M – смешанный модуль. В случае 1) теорема 1 следует из теоремы А. В случае 2) теорема 1 следует из леммы 1.7 (7). Случай 3) невозможен по лемме 1.14 (5).

2. Доказательство теорем 2 и 3.

ЛЕММА 2.1. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся простым артиновым кольцом, $\mathcal{P}(A)$ – множество всех максимальных обратимых идеалов кольца A , X – ненулевой периодический A -модуль, $X(P) \equiv \{x \in X \mid xP^n = 0 \text{ для некоторого } n\}$.

- (1) A не является примитивным справа или слева кольцом.
- (2) X – прямая сумма своих примарных компонент $X(P)$ ($P \in \mathcal{P}(A)$).
- (3) Если X – неразложимый инъективный модуль, то $X = X(P)$ для некоторого $P \in \mathcal{P}(A)$ и для любого инъективного неразложимого инъективного периодического модуля E верно, что либо существуют эпиморфизмы $X \rightarrow E$ и $E \rightarrow X$, либо $E = E(Q)$, где $Q \in \mathcal{P}(A)$ и $P \neq Q$.
- (4) Если X – циклический неразложимый модуль, то X – цепной модуль конечной длины, $X = X(P)$ для некоторого $P \in \mathcal{P}(A)$ и существует такое натуральное число n , что $XP^n = 0$ и $XP^n \subset XP^{n-1} \subset \dots \subset XP \subset X$ – единственный композиционный ряд модуля X .
- (5) Если X – циклический неразложимый модуль, то $r(X) \neq 0$ и X – проективный $A/r(X)$ -модуль.
- (6) Пусть Y и Z – подмодули модуля X и $Y \subseteq Z$. Тогда $Y(P) = Y \cap X(P)$ для любого $P \in \mathcal{P}(A)$, существует естественный изоморфизм

$$Z/Y \rightarrow \bigoplus_{P \in \mathcal{P}(A)} Z(P)/Y(P)$$

и

$$\text{Hom}\left(Z(P)/Y(P), \bigoplus_{P \in \mathcal{P}(A)} Z(P)/Y(P)\right) = \text{Hom}(Z(P)/Y(P), Z(P)/Y(P))$$

для всех $P \in \mathcal{P}(A)$. В частности, все $Z(P)/Y(P)$ – вполне инвариантные подмодули модуля $\bigoplus_{P \in \mathcal{P}(A)} Z(P)/Y(P)$.

- (7) X – π -проективный (квазипроективный; малопроективный) модуль $\iff X(P)$ – π -проективный (квазипроективный; малопроективный) модуль для любого $P \in \mathcal{P}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из леммы 1.5 (1).

(2), (3) и (4) доказаны в [11].

(5) По (4) $r(X) \neq 0$. По лемме 1.5 (2) X – проективный $A/r(X)$ -модуль.

(6) проверяется с помощью (2).

(7) проверяется с помощью (6).

ЛЕММА 2.2. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся простым артиновым кольцом, $P \in \mathcal{P}(A)$, M – инъективный неразложимый ненулевой P -примарный модуль.

- (1) M – цепной нециклический модуль, все собственные подмодули модуля M циклически, имеют конечную длину и образуют счетную цепь $0 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_k \subset \dots$, где X_k/X_{k-1} – простой модуль для любого k и существует такое натуральное число n , что $X_j/X_{j-1} \cong X_k/X_{k-1} \iff j - k$ делится на n .

- (2) Если E – любой инъективный периодический неразложимый ненулевой A -модуль, то либо существуют эпиморфизмы $M \rightarrow E$ и $E \rightarrow M$ с ненулевыми ядрами, либо $0 = \text{Hom}(M', E) = \text{Hom}(E', M)$ для любых подмодулей $M' \subseteq M$ и $E' \subseteq E$.
- (3) Пусть E – любой инъективный неразложимый ненулевой R -примарный A -модуль. Тогда существуют эпиморфизмы $M \rightarrow E$ и $E \rightarrow M$ с ненулевыми ядрами, и модуль $M \oplus E$ не является π -проективным.
- (4) Пусть X – циклический ненулевой подмодуль модуля M длины k , Z – произвольный циклический цепной R -примарный модуль конечной длины $d > k + n$, где число n взято из (1). Тогда существует эпиморфизм $Y \rightarrow X$ с ненулевым ядром, где Y – некоторый подмодуль модуля Z . Если N – такой A -модуль, что модуль Z изоморфен подфактору модуля N , то модуль $X \oplus N$ не является π -проективным.
- (5) Пусть X – ненулевой подмодуль модуля M , E – любой инъективный неразложимый ненулевой R -примарный A -модуль. Тогда модуль $X \oplus E$ не является π -проективным.
- (6) Для любого ненулевого R -примарного A -модуля N модуль $M \oplus N$ не является π -проективным.
- (7) M – малопроективный модуль, не имеющий ненулевых конечно порожденных фактор-модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [10].

(2) следует из (1) и леммы 2.1 (3).

(3) Существование эпиморфизмов $f: M \rightarrow E$ и $g: E \rightarrow M$ с ненулевыми ядрами следует из (1) и (2). Допустим, что $M \oplus E$ – π -проективный модуль. По леммам 1.10 (5) и 1.4 (2) f – изоморфизм. Получено противоречие.

(4) Пусть E – инъективная оболочка модуля Z . Из (2) следует, что существуют эпиморфизмы $M \rightarrow E$ и $E \rightarrow M$. Из (1) следует, что существует эпиморфизм $f: Y \rightarrow X_k$ с ненулевым ядром, где Y – некоторый подмодуль модуля Z . Допустим, что $X_k \oplus N$ – π -проективный модуль. Так как Y изоморфен подфактору модуля N , то по леммам 1.10 (5) и 1.4 (2) f – изоморфизм. Получено противоречие с тем, что $\text{Ker}(f) \neq 0$.

(5) По (3) модуль $M \oplus E$ не является π -проективным. Поэтому можно считать, что $X \neq M$. По (1) X – циклический модуль длины k . Из (1) следует, что модуль E содержит циклический цепной R -примарный модуль Z конечной длины $d > k + n$, где число n взято из (1). По (4) существует эпиморфизм $f: Y \rightarrow X$ с ненулевым ядром, где Y – некоторый подмодуль модуля $Z \subseteq E$. Допустим, что $X \oplus E$ – π -проективный модуль. По леммам 1.10 (5) и 1.4 (2) f – изоморфизм. Получено противоречие.

(6) По леммам 1.7 (2) и 2.1 (1) модуль N имеет ненулевое цепное прямое слагаемое X . Допустим, что модуль $M \oplus N$ π -проективен. Тогда R -примарный модуль $M \oplus X$ π -проективен. Кроме того, инъективная оболочка модуля X неразложима. По (5) модуль $M \oplus X$ не является π -проективным. Получено противоречие.

(7) По (1) M – цепной нециклический модуль, все собственные подмодули модуля M циклически, образуют счетную цепь $0 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_k \subset \dots$, где X_k/X_{k-1} – простой модуль для любого k , причем для любого k модуль X_k имеет конечную длину k . Тогда M не имеет ненулевых конечно порожденных фактор-модулей. Пусть $\bar{f}$ – эндоморфизм произвольного ненулевого фактор-модуля $M/X_s \cong \bar{M}$ модуля M , $h: M \rightarrow \bar{M}$ – естественный эпиморфизм, индуцирующий естественные эпиморфизмы $h|X_k \equiv h_k$:

$X_k \rightarrow h(X_k) \equiv \overline{X}_k$. Непосредственно проверяется, что $\overline{f}(\overline{X}_k) \subseteq \overline{X}_k$ для всех k . Поэтому $\overline{f}$ индуцирует эндоморфизмы $\overline{f}_k$ модулей $\overline{X}_k$. По лемме 2.1 (5) все X_k – проективные $A/r(X_k)$ -модули. Тогда все X_k – малопроективные A -модули. Поэтому существуют такие эндоморфизмы f_k модулей X_k , что $h_k f_k = \overline{f}_k h_k$ для всех k . Рассмотрим f_i и f_k , где $i > k > s$. Тогда $X_k \subseteq X_i$, $\overline{X}_k \subseteq \overline{X}_i$, $(\overline{f}_i | \overline{X}_k - \overline{f}_k)(\overline{X}_k) = 0$. Поэтому $(f_i | X_k - f_k)(X_k) \subseteq X_s$ при $i > k$. Пусть $N_{ik} \equiv \text{Ker}(f_i | X_k - f_k) \subseteq X_k$, d_{ik} – длина модуля N_{ik} . Так как $(f_i | X_k - f_k)(X_k) \cong X_k/N_{ik}$ и длина модуля $(f_i | X_k - f_k)(X_k)$ не превосходит s , то $d_{ik} \geq k - s$. Поэтому $X_{k-s} \subseteq N_{ik}$ при $i > k > s$. Для $k > s$ положим $Y_k \equiv X_{k-s}$. Тогда $f_i | Y_k = f_k | Y_k$ при $i > k$. Кроме того, $M = \bigcup_{k>s} Y_k$. Это позволяет определить такой эндоморфизм f модуля M , что $f | Y_k = f_k$. Тогда $f | X_k = f_{k+s}$. Если $m \in X_{k+s}$, то $hf(m) = hf_{k+s}(m) = h_{k+s}f_{k+s}(m) = \overline{f}_{k+s}h_{k+s}(m) = \overline{f}_{k+s}h(m) = \overline{f}h(m)$. Поэтому $hf = \overline{f}h$ и M – малопроективный модуль.

ЛЕММА 2.3. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, $P \in \mathcal{P}(A)$, M – ненулевой P -примарный A -модуль. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – π -проективный модуль;
- (2) M – малопроективный модуль;
- (3) M – либо неразложимый инъективный A -модуль, либо проективный $A/r(M)$ -модуль;
- (4) M – либо неразложимый A -модуль, либо проективный $A/r(M)$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как над простым артиновым кольцом не существует ненулевых периодических модулей, то можно считать, что A не является простым артиновым кольцом.

(1) $\implies$ (4) Допустим, что M – π -проективный модуль, не являющийся неразложимым. По леммам 1.7 (2) и 2.1 (1) $M = X \oplus N$, где N – ненулевой модуль, X – ненулевой цепной модуль, причем X – либо циклический модуль конечной длины k , либо инъективный модуль. По лемме 2.2 (6) модуль X не инъективен. Поэтому X – циклический модуль длины k . По лемме 2.1 (4) $XP^k = 0$. Пусть Z – любой конечно порожденный подмодуль в N . По леммам 1.7 (1) и 2.1 (1) T – конечная прямая сумма циклических цепных модулей $Z_1, \dots, Z_n$. По лемме 2.2 (4) существует такое натуральное число d , что длины всех модулей Z_i не превосходят d . По лемме 2.1 (4) $Z_i P^d = 0$ для всех i . Поэтому $ZP^d = 0$. Тогда $NP^d = 0$. Поэтому $MP^{k+d} = (X \oplus N)P^{k+d} = 0$ и $r(M) \neq 0$. По лемме 1.5 (2) M – проективный $A/r(M)$ -модуль.

(4) $\implies$ (3) Можно без ограничения общности считать, что M – неразложимый A -модуль, не являющийся проективным $A/r(M)$ -модулем. По лемме 2.1 (5) модуль M не циклический. По леммам 1.7 (2) и 2.1 (1) M – инъективный модуль.

(3) $\implies$ (2) Если M – неразложимый инъективный модуль, то M малопроективен по лемме 2.2 (7). Если M – проективный $A/r(M)$ -модуль, то M малопроективен по лемме 1.1 (1), (2).

(2) $\implies$ (1) следует из леммы 1.1 (4).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть M – периодический модуль над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом A . Тогда M – π -проективный модуль $\iff M$ – малопроективный модуль $\iff$ каждая примарная компонента модуля M является либо неразложимым инъективным модулем, либо проективным модулем над фактор-кольцом кольца A по аннулятору этой примарной компоненты.

Теорема 2.1 вытекает из лемм 2.1 (7) и 2.3.

ЛЕММА 2.4. Пусть T – инъективный модуль, F – наследственный модуль и $M \equiv T \oplus F$. Тогда для любого подмодуля N модуля M существует такое прямое разложение $M = T \oplus F_1$, что $N = N \cap T \oplus N \cap F_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h: N \rightarrow F$ – гомоморфизм с ядром $N \cap T$, индуцированный естественной проекцией $T \oplus F \rightarrow F$ с ядром T . Так как $h(N)$ – подмодуль наследственного модуля F , то $h(N)$ – проективный модуль. Поэтому существует прямое разложение $N = N \cap T \oplus N_1$, где $N_1 \cap T = 0$. Пусть E – инъективная оболочка модуля M . Так как T – инъективный подмодуль инъективного модуля E и $T \cap N_1 = 0$, существует такое прямое разложение $E = T \oplus E_1$, что $N_1 \subseteq E_1$. Так как $T \subseteq M$, то $M = M \cap (T \oplus E_1) = T \oplus (M \cap E_1) = T \oplus F_1$, где $F \equiv M \cap E_1$ и $N_1 \subseteq M \cap E_1 = F$.

ЛЕММА 2.5. Пусть T – инъективный модуль без ненулевых нётеровых фактор-модулей, F – наследственный нётеров модуль и $M \equiv T \oplus F$.

- (1) Если T – малопроективный модуль, то M – малопроективный модуль.
- (2) Если все идемпотентные эндоморфизмы всех фактор-модулей модуля T поднимаются до эндоморфизмов модуля T , то все идемпотентные эндоморфизмы всех фактор-модулей модуля M поднимаются до эндоморфизмов модуля M .
- (3) Если T – квазипроективный модуль, то M – квазипроективный модуль.
- (4) Если T – цепной модуль, то M – π -проективный модуль и все идемпотентные эндоморфизмы всех фактор-модулей модуля M поднимаются до эндоморфизмов модуля M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\bar{f}$ – эндоморфизм фактор-модуля M/N модуля M , h – естественный эпиморфизм. По лемме 2.4 существует такое прямое разложение $M = F_1 \oplus T$, что $N = N \cap F_1 \oplus N \cap T$. Тогда $M/N = h(F_1) \oplus h(T)$. Положим $h_1 \equiv h|F_1$, $h_2 \equiv h|T$, $\bar{f}_1 \equiv \bar{f}|h(F_1)$ и $\bar{f}_2 \equiv \bar{f}|h(T)$. Так как $F_1 \cong M/T \cong F$, то F_1 – нётеров модуль. Имеет место гомоморфизм $\bar{f}_1 h_1$ из модуля F_1 в модуль $h(M)$. Так как F_1 – проективный модуль, существует такой гомоморфизм $f_1: F_1 \rightarrow M$, что $h_1 f_1 = \bar{f}_1 h_1$. Так как модуль $h(T)$ не имеет ненулевых нётеровых гомоморфных образов и $h(F_1)$ – нётеров модуль, то $\text{Hom}(h(T), h(F_1)) = 0$. Поэтому $\bar{f}_2(h(T)) \subseteq h(T)$ и $\bar{f}_2$ – эндоморфизм фактор-модуля $h(T)$ модуля T . Так как T – малопроективный модуль, существует такой эндоморфизм f_2 модуля T , что $h_2 f_2 = \bar{f}_2 h_2$. Определим эндоморфизм f модуля $M = F_1 \oplus T$ правилом $f(x + y) = f_1(x) + f_2(y)$ ($x \in F_1, y \in T$). Тогда $hf = \bar{f}h$.

(2) и (3) Доказательство (2) и (3) аналогично доказательству (1).

(4) следует из (2).

ЛЕММА 2.6. Пусть A – наследственное справа нётерово справа первичное кольцо, Q – инъективная оболочка модуля A_A , E – инъективный несингулярный неразложимый ненулевой правый A -модуль.

- (1) Все инъективные неразложимые правые A -модули являются гомоморфными образами модуля Q .
- (2) Для любого инъективного периодического неразложимого правого A -модуля X существует эпиморфизм $f: E \rightarrow X$ с ненулевым ядром.
- (3) Для любого инъективного периодического неразложимого правого A -модуля X модуль $X \oplus E$ не является π -проективным.

- (4) Каждый инъективный π -проективный правый A -модуль M является либо модулем без кручения, либо периодическим модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) см. в [2, с. 1.14 (2)].

(2) Можно считать, что $X \neq 0$. По (1) и лемме 1.11 (7) существует эпиморфизм $h: E^n \rightarrow X$, который индуцирует ненулевой гомоморфизм $f: E \rightarrow X$. Так как $f(E)$ – гомоморфный образ инъективного правого модуля E над наследственным справа кольцом A , то $f(E)$ – инъективный модуль [1, с. 39.16]. Поэтому $f(E)$ – ненулевое прямое слагаемое неразложимого модуля X . Тогда $f(E) = X$. По лемме 1.6 (2) E – модуль без кручения. Поэтому $\text{Ker}(f) \neq 0$.

(3) Допустим, что $X \oplus E$ – π -проективный модуль. По лемме 1.4 (2) X – E -проективный модуль. По лемме 1.10 (5) $\text{Ker}(f) = 0$; получено противоречие.

(4) Так как A – нётерово справа кольцо и M – инъективный правый A -модуль, то $M = \oplus M_i$, где все M_i – инъективные равномерные модули (см. [1, с.27.5]). По лемме 1.6 (6) каждый модуль M_i является либо модулем без кручения, либо периодическим модулем. По (3) либо все M_i – модули без кручения, либо все M_i – периодические модули.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть M – смешанный модуль над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом A . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) M – π -проективный модуль;
- (2) M – малопроективный модуль;
- (3) $M = T \oplus F$, где F – конечно порожденный проективный ненулевой модуль, T – инъективный периодический ненулевой модуль, и каждая примарная компонента модуля T является неразложимым модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (2) $\implies$ (1) следует из леммы 1.1 (4).

(1) $\implies$ (3) По лемме 1.14 (4) $M = T \oplus F = X \oplus N$, где T – инъективный периодический π -проективный ненулевой модуль, F – π -проективный ненулевой модуль без кручения, X – ненулевой цепной инъективный счетно порожденный периодический модуль, N – непериодический модуль. По лемме 2.2 (5) каждая примарная компонента модуля T является неразложимым модулем. Докажем, что F – конечно порожденный проективный ненулевой модуль. По теореме А достаточно доказать, что F – редуцированный конечномерный модуль. По лемме 1.11 (6) F – конечномерный модуль. Допустим, что F имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое E . Тогда $X \oplus E$ – смешанный инъективный π -проективный модуль; это противоречит лемме 2.6 (5).

(3) $\implies$ (2) По теореме 2.1 T – малопроективный модуль. Из лемм 2.2 (7) и 1.7 (2) следует, что T не имеет ненулевых нётеровых фактор-модулей. Проективный правый модуль F над наследственным справа кольцом A является наследственным модулем [1, с. 39.16]. Конечно порожденный правый модуль F над нётеровым справа кольцом A является нётеровым модулем. По лемме 2.5 (1) M – малопроективный модуль.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2. Возможны только следующие два случая: 1) M – периодический модуль; 2) M – смешанный модуль. В случае 1) теорема 2 следует из теоремы 2.1 и леммы 2.5 (2). В случае 2) теорема 2 следует из теоремы 2.2 и леммы 2.5 (2).

ЛЕММА 2.7. Пусть A – полуцепное наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся простым артиновым кольцом.

- (1) Каждый неразложимый несингулярный инъективный ненулевой правый A -модуль E является цепным счетно порожденным модулем без ненулевых нётеровых фактор-модулей.
- (2) Каждый конечномерный несингулярный инъективный правый A -модуль T не имеет ненулевых нётеровых фактор-модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как E – неразложимый инъективный модуль над полуцепным нётеровым кольцом, то E – цепной модуль [6, 11.55 (2)]. Так как полупрimitивное полуцепное кольцо является артиновым кольцом, то A не является примитивным справа кольцом. Пусть $0 \neq t \in E$. Тогда E/tA – цепной периодический модуль. По лемме 1.7 (2) E/tA – счетно порожденный модуль. Поэтому E – счетно порожденный модуль. Допустим, что E имеет ненулевой нётеров фактор-модуль E/N . Так как ненулевой цепной конечно порожденный модуль E/N является циклическим, то существует такой элемент $x \in E \setminus N$, что $E/N = (x + N)A$. Тогда $E = N + xA$. Так как E – цепной модуль и $xA \not\subseteq N$, то $E = xA$ – нётеров модуль. По лемме 1.11 (8) A – простое артиново кольцо. Получено противоречие

(2) Допустим, что существует такой эпиморфизм $h: T \rightarrow \bar{T}$, что $\bar{T}$ – ненулевой нётеров модуль. Так как T – конечная прямая сумма неразложимых инъективных модулей, то по (1) $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_n$, где все модули T_i не имеют ненулевых нётеровых фактор-модулей. Поэтому $h(T_i) = 0$ для всех i . Тогда $\bar{T} = \sum_{i=1}^n h(T_i) = 0$. Получено противоречие.

ЛЕММА 2.8. Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) A – полуцепное кольцо;
- (2) существует π -проективный инъективный ненулевой правый A -модуль, не являющийся сингулярным;
- (3) для любого неразложимого инъективного несингулярного модуля T и каждого конечно порожденного проективного модуля F модуль $T \oplus F$ π -проективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (1) и (2) доказана в [2, теорема 1].

(3) $\implies$ (2) очевидна.

(1) $\implies$ (3) Можно считать, что A не является простым артиновым кольцом. По лемме 2.7 (1) T – цепной модуль без ненулевых нётеровых фактор-модулей. Так как F – конечно порожденный проективный модуль над наследственным нётеровым кольцом, то F – нётеров наследственный модуль. По лемме 2.5 (4) $T \oplus F$ – π -проективный модуль.

ЛЕММА 2.9. Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) существует такое натуральное число n , что кольцо A изоморфно кольцу всех $(n \times n)$ -матриц над некоторой полной цепной нётеровой областью D ;
- (2) существует π -проективный инъективный несингулярный конечномерный неравномерный правый A -модуль;
- (3) каждый инъективный несингулярный конечномерный правый A -модуль является квазипроективным;

- (4) для любого инъективного несингулярного конечномерного модуля T и каждого конечно порожденного проективного модуля F модуль $T \oplus F$ квази-проективен;
- (5) для любого инъективного несингулярного конечномерного модуля T и каждого конечно порожденного проективного модуля F модуль $T \oplus F$ π -проективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (1), (2) и (3) доказана в [2, лемма 1.21].

(4) $\implies$ (5) следует из леммы 1.1 (5).

(5) $\implies$ (2) очевидна.

(3) $\implies$ (4) Можно считать, что A не является простым артиновым кольцом. По лемме 2.7 (2) T не имеет ненулевых нётеровых фактор-модулей. Так как F – конечно порожденный проективный модуль над наследственным нётеровым кольцом, то F – нётеров наследственный модуль. По лемме 2.5 (3) $T \oplus F$ – квазипроективный модуль.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 3. Без ограничения общности можно считать, что M – несингулярный конечномерный модуль. Возможны только следующие три случая: 1) M – редуцированный конечномерный несингулярный модуль; 2) $M = T \oplus F$, где T – неразложимый инъективный конечномерный несингулярный ненулевой модуль и F – редуцированный конечномерный несингулярный модуль; 3) $M = T \oplus F$, где T – неравномерный несингулярный инъективный ненулевой модуль и F – редуцированный конечномерный несингулярный модуль. В случае 1) теорема 3 следует из теоремы А. В случае 2) теорема 3 следует из теоремы А и леммы 2.8. В случае 3) теорема 3 следует из теоремы А и леммы 2.9.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть M – модуль над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом A . Тогда M – π -проективный нередуцированный несингулярный модуль $\iff$ выполнено одно из следующих условий:

- (i) A – полуцепное кольцо и $M = T \oplus F$, где T – инъективный неразложимый несингулярный ненулевой модуль, а F – конечно порожденный проективный модуль;
- (ii) существует такое натуральное число n , что кольцо A изоморфно кольцу всех $(n \times n)$ -матриц над некоторой полной цепной нётеровой областью D , $M = T \oplus F$, где T – инъективный конечномерный несингулярный ненулевой модуль, а F – конечно порожденный проективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 достаточно доказать, что каждый π -проективный нередуцированный несингулярный модуль M над полуцепным кольцом A является конечномерным модулем. Так как M имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое и каждый инъективный модуль над нётеровым кольцом является прямой суммой неразложимых модулей [5, 20.6], то $M = X \oplus Y$, где X – неразложимый инъективный несингулярный ненулевой модуль, Y – бесконечномерный несингулярный подмодуль. По лемме 2.7 (1) X – счетно порожденный модуль. По лемме 1.11 (6) модуль M не является π -проективным. Получено противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть A – ограниченное наследственное первичное кольцо, над которым все π -проективные редуцированные несингулярные бесконечномерные модули проективны. Тогда M – π -проективный модуль $\iff$ выполнено одно из следующих условий:

- (i) M – проективный модуль;

- (ii) $M = T \oplus F$, где T – периодический инъективный ненулевой модуль, у которого каждая примарная компонента является неразложимым модулем, а F – ненулевой конечно порожденный проективный модуль;
- (iii) M – периодический модуль, у которого каждая примарная компонента является либо неразложимым инъективным модулем, либо проективным модулем над фактор-кольцом кольца A по аннулятору этой примарной компоненты;
- (iv) A – полуцепное кольцо и $M = E \oplus F$, где E – инъективный неразложимый модуль без кручения, а F – конечно порожденный проективный модуль;
- (v) существует такое натуральное число n , что кольцо A изоморфно кольцу всех $(n \times n)$ -матриц над некоторой полной цепной нётеровой областью D , $M = E \oplus F$, где E – инъективный конечномерный модуль без кручения, а F – конечно порожденный проективный модуль.

Следствие 2.2 вытекает из теорем А, 2, 3 и следствия 2.1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.
- [2] Туганбаев А. А. Модули над наследственными кольцами // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 4. С. 143–160.
- [3] Lenagan Т. Н. Bounded hereditary noetherian prime rings // J. London Math. Soc. 1973. V. 6. P. 241–246.
- [4] Fuller K. R., Hill D. A. On quasi-projective modules via relative projectivity // Arch. Math. 1970. V. 21. P. 369–373.
- [5] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979.
- [6] Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [7] Singh S. Quasi-injective and quasi-projective modules over hereditary noetherian prime rings // Can. J. Math. 1974. V. 26. № 5. P. 1173–1185.
- [8] Singh S. Modules over hereditary noetherian prime rings // Canad. J. Math. 1975. V. 27. № 4. P. 867–883.
- [9] Stenström B. Rings of Quotients: an Introduction to Methods of Ring Theory. Berlin: Springer Verlag, 1975.
- [10] Singh S. Modules over hereditary noetherian prime rings. II // Canad. J. Math. 1976. V. 28. № 1. P. 73–82.
- [11] Singh S., Talwar S. Pure submodules of modules over bounded (hnp)-rings // Arch. Math. 1978. V. 30. № 6. P. 570–577.

Московский энергетический институт (технический университет)
E-mail: askar@tuganbaev.mcsme.ru

Поступило
02.11.1999
Исправленный вариант
16.03.2000