Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Худалов, О тензорном произведении l -операторов и bo -операторов, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 756–760

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm995>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:20:28

УДК 517.98

О ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ l -ОПЕРАТОРОВ И bo -ОПЕРАТОРОВ

В. Т. Худалов

Доказано, что тензорное произведение двух линейных операторов является конусно суммирующим (соответственно порядково ограниченным) оператором тогда и только тогда, когда оба оператора являются конусно суммирующими (соответственно порядково ограниченными).

Библиография: 4 названия.

Пусть E – упорядоченное банахово пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел с замкнутым конусом E_+ , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\forall x, y \in E \pm x \leq y \implies \|x\| \leq \|y\|$;
- 2) $\forall x \in E \exists y \in E_+ : \pm x \leq y, \|x\| = \|y\|$.

В этом случае пишем $E \in (\mathfrak{R})$. Пусть X – произвольное банахово пространство (БП) над $\mathbb{R}$. Напомним, что линейный оператор $T: E \rightarrow X$ называется l -оператором, если конечна l -норма:

$$\|T\|_l = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|Te_k\| : e_k \in E_+, 1 \leq k \leq n, \left\| \sum_{k=1}^n e_k \right\| \leq 1, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Пространство всех l -операторов из E в X с l -нормой обозначим $L_l(E, X)$.

Линейный оператор $U: X \rightarrow E$ называется bo -оператором, если он переводит единичный шар пространства X в порядково ограниченное множество в E . Пространство всех bo -операторов из X в E с bo -нормой

$$\|U\|_{bo} = \inf \{ \|e\| : Ux \leq e \forall x \in X, \|x\| \leq 1 \}$$

обозначим $L_{bo}(X, E)$.

В данной статье изучаются тензорные произведения [2] l - и bo -операторов. Оказывается, что при подходящем выборе тензорного конуса в $E \otimes F$, где $E, F \in (\mathfrak{R})$, тензорное произведение

$$S \otimes T: E \otimes_\alpha F \rightarrow X \otimes_\beta Y$$

(где α и β – произвольные кросснормы) двух операторов

$$S: E \rightarrow X, \quad T: F \rightarrow Y$$

является l -оператором тогда и только тогда, когда S и T являются l -операторами. Аналогично, тензорное произведение

$$U \otimes V: X \otimes_{\alpha} Y \rightarrow E \otimes_{\beta} F$$

(α и β – произвольные кросснормы) двух операторов

$$U: X \rightarrow E, \quad V: Y \rightarrow F$$

является bo -оператором, если и только если U и V – bo -операторы. При этом получены двусторонние оценки норм этих операторов.

Прежде чем перейти к точным формулировкам, приведем определения проективного и инъективного конусов [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть E и F – упорядоченные банаховы пространства с замкнутыми конусами E_+ и F_+ .

Проективный конус K_p определяется следующим образом:

$$K_p = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k, x_k \in E_+, y_k \in F_+, k = 1, \dots, n; n = 1, 2, \dots \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Инъективным конусом* называется конус

$$K_i = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k : \sum_{k=1}^n \langle x_k, x^* \rangle \langle y_k, y^* \rangle \geq 0 \forall x^* \in E_+^*, \forall y^* \in F_+^* \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $E, F \in (\mathfrak{K})$, X, Y – произвольные БП, $S \in L(E, X)$, $S \neq 0$, $T \in L(F, Y)$, $T \neq 0$. Тогда для любых кросснорм α и β оператор

$$S \otimes T: (E \otimes_{\alpha} F, K_p) \rightarrow X \otimes_{\beta} Y$$

является l -оператором тогда и только тогда, когда S и T – l -операторы. При этом

$$\sqrt{\|S\|_l \|T\|_l} \sqrt{\|S\| \|T\|} \leq \|S \otimes T\| \leq \|S\|_l \|T\|_l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S: E \rightarrow X$ – l -оператор. Это эквивалентно существованию функционала $e^* \in E_+^*$, $\|e^*\| \leq 1$, такого, что

$$\|Se\| \leq \|S\|_l \langle e^*, e \rangle \quad \forall e \in E_+;$$

аналогично, если $T: F \rightarrow Y$ – l -оператор, то найдется $f^* \in F_+^*$, $\|f^*\| \leq 1$, такой, что $\|Tf\| \leq \|T\|_l \langle f^*, f \rangle \quad \forall f \in F_+$. Тогда $e^* \otimes f^*$ – положительный непрерывный функционал, $e^* \otimes f^* \in K_p^*$. Пусть

$$z = \sum_{k=1}^n e_k \otimes f_k \in K_p;$$

тогда

$$\begin{aligned}
 \beta \left[(S \otimes T) \sum_{k=1}^n e_k \otimes f_k \right] &\leq \pi \left(\sum_{k=1}^n S e_k \otimes T f_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \|S e_k\| \|T f_k\| = \sum_{k=1}^n \|S(e_k \|T f_k\|)\| \\
 &\leq \|S\|_l \sum_{k=1}^n \langle e_k, e^* \rangle \|T f_k\| = \|S\|_l \sum_{k=1}^n \|T(f_k \langle e_k, e^* \rangle)\| \\
 &\leq \|S\|_l \|T\|_l \sum_{k=1}^n \langle e_k, e^* \rangle \langle f_k, f^* \rangle = \|S\|_l \|T\|_l \left\langle \sum_{k=1}^n e_k \otimes f_k, e^* \otimes f^* \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Следовательно, $S \otimes T$ — l -оператор и $\|S \otimes T\|_l \leq \|S\|_l \|T\|_l$.

Обратно, пусть $S \otimes T: (E \otimes_\alpha F, K_p) \rightarrow X \otimes_\beta Y$ — l -оператор. Покажем, что S и T — l -операторы. Пусть $e_1, \dots, e_n \in E_+$. Возьмем $f \in F_+$, $Tf \neq 0$. Тогда $e_1 \otimes f, \dots, e_n \otimes f \in K_p$. Поскольку $S \otimes T$ — l -оператор, то

$$\begin{aligned}
 \|Tf\| \sum_{k=1}^n \|S e_k\| &= \sum_{k=1}^n \beta[(S \otimes T)(e_k \otimes f)] \\
 &\leq \|S \otimes T\|_l \alpha \left(\sum_{k=1}^n e_k \otimes f \right) = \|S \otimes T\|_l \left\| \sum_{k=1}^n e_k \right\| \|f\|.
 \end{aligned}$$

Значит, S — l -оператор и $\|S\|_l \leq \|S \otimes T\|_l \|f\| (\|Tf\|^{-1})$. Отсюда, так как последнее неравенство верно $\forall f \in F_+$, $\|f\| = 1$, имеем $\|S\|_l \leq \|S \otimes T\|_l \|T\|^{-1}$, откуда $\|S \otimes T\|_l \geq \|S\|_l \|T\|$.

Аналогично получаем, что $\|T\|_l \leq \|S \otimes T\|_l \|S\|^{-1}$ и $\|S \otimes T\|_l \geq \|T\|_l \|S\|$. Итак, $\|S \otimes T\|_l \geq \sqrt{\|S\|_l \|T\|_l} \sqrt{\|S\| \|T\|}$.

Теорема доказана полностью.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $E, F \in (\mathfrak{R})$, X, Y — произвольные БП, $U \in L(X, E)$, $U \neq 0$, $V \in L(Y, F)$, $V \neq 0$. Тогда для любых кросснорм $\alpha \geq \varepsilon$ и $\beta \geq \varepsilon$ оператор

$$U \otimes V: X \otimes_\alpha Y \rightarrow (E \otimes_\beta F, K_i)$$

является *во-оператором* тогда и только тогда, когда U и V — *во-операторы*. При этом

$$\sqrt{\|U\|_{bo} \|V\|_{bo}} \sqrt{\|U\| \|V\|} \leq \|U \otimes V\|_{bo} \leq \|U\|_{bo} \|V\|_{bo}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U: X \rightarrow E$ и $V: Y \rightarrow F$ — *во-операторы*. Тогда найдутся элементы $e \in E_+$ и $f \in F_+$ такие, что

$$\begin{aligned}
 \pm Ux &\leq e \quad \forall x \in X, \quad \|x\| \leq 1, \quad \|U\|_{bo} = \inf\{\|e\|\}, \\
 \pm Vy &\leq f \quad \forall y \in Y, \quad \|y\| \leq 1, \quad \|V\|_{bo} = \inf\{\|f\|\}.
 \end{aligned}$$

Покажем, что оператор $U \otimes V: X \otimes_\alpha Y \rightarrow (E \otimes_\beta F, K_i)$ является *во-оператором* при $\alpha = \varepsilon$ (а значит, при любом $\alpha \geq \varepsilon$). Пусть $z \in X \otimes Y$, $z = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k$ и $\varepsilon(z) \leq 1$. Докажем, что $\pm U \otimes V(z) \leq e \otimes f$ в смысле конуса K_i , т.е.

$$\left\langle \sum_{k=1}^n Ux_k \otimes Vy_k, e^* \otimes f^* \right\rangle \leq \langle e, e^* \rangle \langle f, f^* \rangle \quad \forall e^* \in E_+^*, \quad \forall f^* \in F_+^*.$$

При этом достаточно считать, что $V^* f^* \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \langle Ux_k, e^* \rangle \langle Vy_k, f^* \rangle &= \left\langle U \left(\sum_{k=1}^n x_k \langle Vy_k, f^* \rangle \right), e^* \right\rangle \\ &\leq \langle e, e^* \rangle \left\| \sum_{k=1}^n x_k \langle Vy_k, f^* \rangle \right\| = \langle e, e^* \rangle \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^n \langle x_k, x^* \rangle \langle Vy_k, f^* \rangle \right|. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \langle Vy_k, f^* \rangle &= \langle y_k, V^* f^* \rangle = \left\langle y_k, \frac{V^* f^*}{\|V^* f^*\|} \right\rangle \|V^* f^*\|, \\ \|V^* f^*\| &= \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle V^* f^*, y \rangle| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle f^*, Vy \rangle| \leq \langle f, f^* \rangle. \end{aligned}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \langle e, e^* \rangle \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^n \langle x_k, x^* \rangle \langle Vy_k, f^* \rangle \right| &= \langle e, e^* \rangle \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^n \langle x_k, x^* \rangle \left\langle y_k, \frac{V^* f^*}{\|V^* f^*\|} \right\rangle \|V^* f^*\| \right| \\ &\leq \langle e, e^* \rangle \|V^* f^*\| \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^n \langle x_k, x^* \rangle \langle y_k, y^* \rangle \right| : \|x^*\| \leq 1, \|y^*\| \leq 1 \right\} \\ &= \varepsilon(z) \langle e, e^* \rangle \|V^* f^*\| \leq \langle e, e^* \rangle \langle f, f^* \rangle. \end{aligned}$$

Итак,

$$\|U \otimes V\|_{bo} \leq \inf\{\|e\| \|f\|\} \leq \|U\|_{bo} \|V\|_{bo}.$$

Обратно, пусть $U \otimes V: X \otimes_{\alpha} Y \rightarrow (E \otimes_{\beta} F, K_i)$ – bo -оператор. Покажем, что $U: X \rightarrow E$ также является bo -оператором. Возьмем $f \in F_+^*$, $\|f^*\| = 1$. Пусть $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, и $y \in Y$ такой, что $\|y\| = 1$ и $\langle Vy, f^* \rangle > 0$. Возьмем элемент $z \in K_i$, $z = \sum_{k=1}^n e_k \otimes f_k$, такой, что $Ux \otimes Vy \leq z$ в смысле конуса K_i .

Отсюда

$$Ux \langle Vy, f^* \rangle \leq \sum_{k=1}^n e_k \langle f_k, f^* \rangle, \quad Ux \leq \frac{1}{\langle Vy, f^* \rangle} \sum_{k=1}^n e_k \langle f_k, f^* \rangle.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|U\|_{bo} &\leq \frac{1}{\langle Vy, f^* \rangle} \left\| \sum_{k=1}^n e_k \langle f_k, f^* \rangle \right\|, \\ \langle Vy, f^* \rangle \|U\|_{bo} &\leq \sup_{\|f^*\| \leq 1} \left\| \sum_{k=1}^n e_k \langle f_k, f^* \rangle \right\| = \varepsilon(z) \leq \beta(z). \end{aligned}$$

Переходя к супремуму по всем $y \in Y$, $\|y\| = 1$, и всем $f^* \in F_+^*$, $\|f^*\| = 1$, получим $\|V\| \|U\|_{bo} \leq \|U \otimes V\|_{bo}$.

Аналогично доказывается, что $\|U\| \|V\|_{bo} \leq \|U \otimes V\|_{bo}$, т.е.

$$\|U \otimes V\|_{bo} \geq \sqrt{\|U\|_{bo} \|V\|_{bo}} \sqrt{\|U\| \|V\|}.$$

Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [4] было доказано, что если $\alpha = \beta = \varepsilon$, то тензорное произведение

$$S \otimes T: E \otimes_{\varepsilon} F \rightarrow X \otimes_{\varepsilon} Y$$

является p -абсолютно суммирующим тогда и только тогда, когда S и T являются абсолютно суммирующими. Там же приведен пример двух абсолютно суммирующих операторов S и T таких, что

$$S \otimes T: E \otimes_{\pi} F \rightarrow X \otimes_{\pi} Y$$

не является абсолютно суммирующим. Поскольку всякий абсолютно суммирующий оператор является l -оператором, то тем не менее в силу теоремы 1 можно утверждать, что для любых кросснорм α и β тензорное произведение абсолютно суммирующих операторов

$$S \otimes T: E \otimes_{\alpha} F \rightarrow X \otimes_{\beta} Y$$

будет l -оператором для проективного конуса K_p .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Худалов В. Т. О совпадении двух кросснорм, связанных с порядком // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1979. Т. 92. С. 307–312.
- [2] Schatten R. A Theory of Cross-Spaces. Princeton, 1950.
- [3] Wittstock G. Ordered normed tensor products // Lecture Notes in Phys. 1974. № 29. P. 67–84.
- [4] Holub J. Tensor product mappings // Math. Ann. 1970. V. 188. P. 1–12.

Северо-Осетинский государственный университет,
г. Владикавказ

Поступило
24.03.1998