Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шидловский, О свойствах алгебраических уравнений, связывающих множество E -функций над полем рациональных функций, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 761–770

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm996>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:57:44

УДК 511.36

О СВОЙСТВАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗЫВАЮЩИХ МНОЖЕСТВО E -ФУНКЦИЙ НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Б. Шидловский

В работе доказываются теоремы о линейной и алгебраической независимости значений в алгебраических точках множества E -функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций, и теорема об оценке модуля многочлена с целыми коэффициентами от значения таких функций. При этом используются свойства идеала в кольце многочленов от нескольких переменных, образованного уравнениями, связывающими рассматриваемые функции над полем рациональных функций.

Библиография: 7 названий.

Рассматривается множество E -функций, алгебраически зависимых над $\mathbb{C}(z)$. Доказываются некоторые утверждения об арифметических свойствах их значений в алгебраических точках. При этом используются свойства идеала в кольце $\mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m]$, образованного всеми алгебраическими уравнениями, связывающими рассматриваемые функции над $\mathbb{C}(z)$.

Всюду в дальнейшем

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \quad (1)$$

будет совокупность E -функций, составляющих решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y'_k = \sum_{i=1}^m Q_{k,i} y_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad m \geq 2, \quad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad (2)$$

или системы

$$y'_k = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^m Q_{k,i} y_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad m \geq 1, \quad (3)$$

а $T(z) \in \mathbb{C}[z]$ обозначает наименьший общий знаменатель всех функций $Q_{k,i}$ в системе (2) или (3).

Рассмотрим множество значений функций (1)

$$f_1(\xi), \dots, f_m(\xi) \quad (4)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00181, и объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № IR-97-1904.

в точке $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, где $\mathbb{A}$ – поле всех алгебраических чисел.

Доказано, что числа (4) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) тогда и только тогда, когда функции (1) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) над $\mathbb{C}(z)$. Если же функции (1) алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$, то в ряде случаев доказана алгебраическая независимость некоторых подсовокупностей чисел (4). Установлено, что степени однородной трансцендентности (степени трансцендентности) функций (1) над $\mathbb{C}(z)$ и чисел (4) над $\mathbb{A}$ равны.

С определением E -функций, историей вопроса и основными результатами об арифметических свойствах значений E -функций можно ознакомиться по книге [1].

В дальнейшем все рассуждения будут проводиться только в однородных случаях. Также некоторые утверждения формулируются только в однородных случаях. Соответствующие неоднородные аналоги следуют из однородных, если заменить m на $m + 1$ и ввести функцию $f_{m+1}(z) = 1$.

Пусть $\xi \in \mathbb{C}$, а $\varphi_\xi: \mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m] \rightarrow \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ – гомоморфизм, который представляет собой замену переменной z на ξ во всех многочленах кольца $\mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m]$. Если $\mathfrak{U}$ – любой идеал этого кольца, то будем обозначать через $\mathfrak{U}_\xi = \varphi_\xi(\mathfrak{U})$ идеал, соответствующий $\mathfrak{U}$ в кольце $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ при гомоморфизме φ_ξ .

Пусть $\mathfrak{P}$ – простой идеал кольца $\mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m]$, порожденный всеми однородными по $z_1, \dots, z_m$ многочленами, обращающимися в нуль при подстановке в них вместо $z_1, \dots, z_m$ функций (1). (Если функции (1) однородно алгебраически независимы над полем рациональных функций, то полагаем $\mathfrak{P} = (0)$.)

Всюду в дальнейшем число $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, будет фиксированным, а $\mathbb{K}_0$ обозначает алгебраическое поле над $\mathbb{Q}$, содержащее ξ и все коэффициенты степенных рядов по степеням z функций (1).

Если однородный идеал (идеал) $\mathfrak{P}_\xi$, соответствующий функциям (1), является простым, то совокупность функций (1) будем называть *однородно простой (простой) в точке ξ* .

Пусть $\mathbb{L}_N$ – линейное пространство над $\mathbb{C}(z)$, порожденное произведениями степеней функций (1)

$$f_m^{k_m}(z) \cdots f_1^{k_1}(z), \quad k_1 + \cdots + k_m = N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

а $\mathbb{L}_{N,\xi}$ – линейное пространство над $\mathbb{A}$, порожденное значениями функций (5) в точке ξ . Обозначим $r_N = \dim \mathbb{L}_N$ и $\rho_N = \dim \mathbb{L}_{N,\xi}$.

В этой статье будем называть ξ -*базисом* $\mathbb{L}_N$ множество функций

$$F_1(z), \dots, F_{r_N}(z), \quad (6)$$

удовлетворяющих условиям:

- 1) функции (6) составляют подмножество множества функций (5);
- 2) функции (6) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$;
- 3) каждая из функций (5) линейно выражается через функции (6) с коэффициентами из $\mathbb{K}_0(z)$, не имеющими полюсов в точке ξ .

При любом N ξ -базисы существуют (см. [1, гл. 4, леммы 1 и 2; гл. 3, лемма 2]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть совокупность E -функций (1) составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (2) и является однородно простой в точке $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, а $N \in \mathbb{N}$ и функции (6) составляют ξ -базис линейного пространства $\mathbb{L}_N$, порожденного произведениями степеней (5) над $\mathbb{C}(z)$.

Тогда числа

$$F_1(\xi), \dots, F_{r_N}(\xi) \quad (7)$$

линейно независимы над $\mathbb{A}$.

Из теоремы 1 при ее условиях получаем очевидные следствия.

Следствие 1. *Каждый ξ -базис линейного пространства $\mathbb{L}_N$ при подстановке $z = \xi$ переходит в базис линейного пространства $\mathbb{L}_{N,\xi}$.*

Следствие 2. *Имеет место равенство $r_N = \rho_N$.*

В [1, с. 161–162] приводятся примеры некоторых случаев, когда выполняются утверждения, аналогичные следствиям 1 и 2, и указывается на трудности доказательства или опровержения их в общем случае.

Пусть в дальнейшем $\mathbb{K}$ обозначает алгебраическое поле над $\mathbb{Q}$, содержащее поле $\mathbb{K}_0$ и все коэффициенты однородного многочлена P ,

$$P = P(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{K}[z_1, \dots, z_m], \quad \deg_{\bar{z}} P \geq 1, \quad (8)$$

а $h = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Далее, пусть $\mathbb{K}_i$, $i = 1, \dots, h$, – алгебраические поля, сопряженные с полем $\mathbb{K}$; ξ_i , $i = 1, \dots, h$, – числа, сопряженные с ξ ;

$$f_{1,i}(z), \dots, f_{m,i}(z), \quad i = 1, \dots, h, \quad (9)$$

– функции, получающиеся из функций (1) заменой всех коэффициентов их степенных рядов по степеням z на числа, сопряженные из поля $\mathbb{K}_i$; а $P_i = P_i(z_1, \dots, z_m)$, $i = 1, \dots, h$, – многочлены, получающиеся аналогично из многочлена P .

Установим вспомогательные предложения для доказательства теоремы 1.

Лемма 1. *Однородный многочлен P из (8) принадлежит идеалу $\mathfrak{P}_\xi$ тогда и только тогда, когда существуют однородные по $z_1, \dots, z_m$ многочлены $Q = Q(z, z_1, \dots, z_m)$ и $R = R(z, z_1, \dots, z_m)$, $Q, R \in \mathbb{K}[z, z_1, \dots, z_m]$, такие, что*

$$P = (z - \xi)Q + R, \quad R \in \mathfrak{P}. \quad (10)$$

Доказательство. Если имеет место равенство (10), то, полагая в нем $z = \xi$, получим, что

$$P(z_1, \dots, z_m) = R(\xi, z_1, \dots, z_m) \quad (11)$$

и, следовательно, $P \in \mathfrak{P}_\xi$.

Пусть теперь многочлен $P \in \mathfrak{P}_\xi$. По определению идеала $\mathfrak{P}_\xi$ выполняется равенство (10), где однородные по $z_1, \dots, z_m$ многочлены $Q, R \in \mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m]$. Докажем, что Q и R можно выбрать из кольца $\mathbb{K}[z, z_1, \dots, z_m]$.

Пусть $\mathcal{L}$ обозначает линейное пространство над $\mathbb{K}$, порожденное коэффициентами многочлена R . Покажем, что $1 \in \mathcal{L}$.

Выберем числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ такими, что $P(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq 0$, и подставим в равенство (10) $z = \xi$ и $z_k = \alpha_k$, $k = 1, \dots, m$. Тогда $P(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = R(\xi, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Из последнего равенства следует, что число 1 есть линейная комбинация коэффициентов многочлена R с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Следовательно, $1 \in \mathcal{L}$.

Выберем в $\mathcal{L}$ базис $b_1, \dots, b_N$ такой, что $b_1 = 1$. Тогда

$$R = \sum_{l=1}^N b_l R_l, \quad R_l \in \mathbb{K}[z, z_1, \dots, z_m], \quad l = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Так как $R \in \mathfrak{P}$, то

$$R(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0. \quad (13)$$

Докажем, что

$$R_l \in \mathfrak{P}, \quad l = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Из равенств (12) и (13) следует, что

$$R(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = \sum_{l=1}^N b_l R_l(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0.$$

Поэтому

$$\sum_{l=1}^N b_l \left(\frac{d}{dz} \right)^k R_l(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \Big|_{z=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Поскольку

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^k R_l(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \Big|_{z=0} \in \mathbb{K}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

то ввиду линейной независимости над $\mathbb{K}$ чисел $b_1, \dots, b_N$ из равенства (15) получаем, что

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^k R_l(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \Big|_{z=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и

$$R_l(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0, \quad l = 1, \dots, N.$$

Следовательно, выполняются условия (14).

После деления многочлена R_l на $z - \xi$ с остатком имеем равенства

$$R_l = (z - \xi)T_l + S_l, \quad l = 1, \dots, N, \quad (16)$$

где $T_l \in \mathbb{K}[z, z_1, \dots, z_m]$, а $S_l \in \mathbb{K}[z_1, \dots, z_m]$. Из равенств (12) и (16) находим, что

$$R = \sum_{l=1}^N b_l ((z - \xi)T_l + S_l)$$

Подставляя это значение R в равенство (10), приходим к равенству

$$P = (z - \xi)Q + \sum_{l=1}^N b_l ((z - \xi)T_l + S_l),$$

из которого при $z = \xi$ имеем, что

$$P = \sum_{l=1}^N b_l S_l. \quad (17)$$

Сравнивая в равенстве (17) коэффициенты при различных произведениях степеней переменных $z_1, \dots, z_m$, находим, что $P = S_1, S_2 = \dots = S_N = 0$.

Полагая в первом из равенств (16) $S_1 = P, T_1 = -Q, R_1 = R$, получаем равенство (10), в котором Q и R удовлетворяют утверждению леммы.

ЛЕММА 2. Однородный многочлен P из (8) принадлежит $\mathfrak{P}_\xi$ в том и только том случае, когда выполняются равенства

$$P_i(f_{1,i}(\xi_i), \dots, f_{m,i}(\xi_i)) = 0, \quad i = 1, \dots, h. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $P \in \mathfrak{P}_\xi$, то по лемме 1 выполняется равенство (10), где однородные многочлены $Q, R \in \mathbb{K}[z, z_1, \dots, z_m]$ и $R(\xi, z_1, \dots, z_m) \neq 0$. Из равенства (10) имеем, что

$$P_i = (z - \xi_i)Q_i + R_i, \quad i = 1, \dots, h, \quad (19)$$

где многочлены Q_i и R_i получаются из многочленов Q и R заменой их коэффициентов на сопряженные числа из поля $\mathbb{K}_i$.

Так как $R \in \mathfrak{P}$, имеет место равенство (13). Поэтому

$$R_i(z, f_{1,i}(z), \dots, f_{m,i}(z)) = 0, \quad i = 1, \dots, h,$$

и

$$R_i(\xi_i, f_{1,i}(\xi_i), \dots, f_{m,i}(\xi_i)) = 0, \quad i = 1, \dots, h.$$

Но тогда при $z = \xi_i$ и $z_k = f_{k,i}(\xi_i)$, $k = 1, \dots, m$, из равенств (19) следуют равенства (18).

Пусть теперь выполняются равенства (18). Докажем, что $P \in \mathfrak{P}_\xi$.

Рассмотрим какой-либо ξ -базис (6) линейного пространства $\mathbb{L}_N$, где $N = \deg_{\bar{z}} P$. Из условия 3) его определения следует, что

$$P(f_1(z), \dots, f_m(z)) = S_1 F_1(z) + \dots + S_{r_N} F_{r_N}(z), \quad (20)$$

где $S_1, \dots, S_{r_N} \in \mathbb{K}(z)$ и не имеют полюсов в точке $z = \xi$. Если $H(z)$ – общий наименьший знаменатель функций $S_1, \dots, S_{r_N}$, то из равенства (20) имеем, что

$$H(z)P(f_1(z), \dots, f_m(z)) = M_1 F_1(z) + \dots + M_{r_N} F_{r_N}(z), \quad (21)$$

где $H(z), M_1, \dots, M_{r_N} \in \mathbb{K}[z]$ и $H(\xi) \neq 0$.

Из условий 1)–3) определения ξ -базиса и леммы 18 из [1, гл. 3] получаем, что совокупность r_N E -функций (6) составляет решение системы из r_N линейных однородных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{K}(z)$, не имеющими полюсов в точке $z = \xi$, и линейно независима над $\mathbb{K}(z)$. Поэтому, предполагая, что не все многочлены $M_1, \dots, M_{r_N}$ обращаются в нуль в точке $z = \xi$ и применяя к линейной форме, стоящей в правой части равенства (21), теорему 1 из [1, гл. 11, § 2], убеждаемся в том, что все равенства (18) выполняться не могут. Поэтому при $z = \xi$ $M_j = 0$, $j = 1, \dots, r_N$, а равенство (21) имеет вид

$$H(z)P(f_1(z), \dots, f_m(z)) = (z - \xi)Q(z, f_1(z), \dots, f_m(z)), \quad (22)$$

где $Q(z, z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{K}[z, z_1, \dots, z_m]$. Обозначим

$$H(\xi)R(z, z_1, \dots, z_m) = H(z)P(z_1, \dots, z_m) - (z - \xi)Q(z, z_1, \dots, z_m). \quad (23)$$

Из равенств (22) и (23) получаем равенство (13), а при $z = \xi$ из равенства (23) равенство (11), из которого следует, что $P \in \mathfrak{P}_\xi$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3 (см. [2, теорема 1]). Если совокупность E -функций (1) является однородно простой в точке ξ , $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, то для любого однородного многочлена P из (8) такого, что $P \notin \mathfrak{P}_\xi$, выполняется условие $P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Допустим противное, что при некотором N

$$\alpha_1 F_1(\xi) + \dots + \alpha_{r_N} F_{r_N}(\xi) = 0,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_N} \in \mathbb{A}$ и не все эти числа равны нулю. Пусть теперь поле $\mathbb{K}$ таково, что оно содержит все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_N}$. Обозначим

$$P(f_1(z), \dots, f_m(z)) = \alpha_1 F_1(z) + \dots + \alpha_{r_N} F_{r_N}(z).$$

Тогда $P(z_1, \dots, z_m)$ есть однородный многочлен (8) и

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0. \quad (24)$$

Из равенства (24) по лемме 3 следует, что $P \in \mathfrak{P}_\xi$. Тогда по лемме 2 выполняются равенства (18).

Как и при доказательстве леммы 2, убеждаемся в том, что совокупность E -функций (6) удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из [1, гл. 11, § 2]. По этой теореме равенства (18) оказываются противоречивыми и, следовательно, равенство (24) невозможно. Полученное противоречие доказывает, что числа (7) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Теорема доказана.

Пусть теперь степень однородной трансцендентности (трансцендентности) функций (1) над $\mathbb{C}(z)$ равна l , $1 \leq l < m$, а функции

$$f_1(z), \dots, f_l(z) \quad (25)$$

однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) над $\mathbb{C}(z)$. Доказано, что числа

$$f_1(\xi), \dots, f_l(\xi) \quad (26)$$

однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) для всех $\xi \in \mathbb{A}$, за исключением конечного числа из них. В ряде случаев установлены теоремы об алгебраической независимости чисел (26) для некоторых подклассов E -функций в точно оговоренных точках ξ (см. [1]). Представляет интерес дальнейшее исследование арифметических свойств чисел (26).

Условимся в многочленах из $\mathbb{C}[z][z_1, \dots, z_m]$ и $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ считать члены упорядоченными в порядке лексикографического расположения по степеням $z_m, \dots, z_1$.

Рассмотрим совокупность однородных минимальных уравнений (минимальных уравнений) функций (1) над $\mathbb{C}(z)$ (см. [3] или [1, гл. 4, § 10]), и пусть Λ – множество нулей их старших коэффициентов, а $\Phi_{N,j}(z)$, $j = 1, \dots, r_N$, – элементы множеств B_N , определенных минимальными уравнениями функций (1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть совокупность E -функций (1) составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (2) и является однородно простой в точке $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi \notin \Lambda$, $\xi T(\xi) \neq 0$.

Тогда при любом $N \in \mathbb{N}$ числа

$$\Phi_{N,j}(\xi), \quad j = 1, \dots, r_N, \quad (27)$$

линейно независимы над $\mathbb{A}$ и составляют базис линейного пространства $\mathbb{L}_{N,\xi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 17 из [1, гл. 4, § 10] при любом N множество B_N составляет базис линейного пространства $\mathbb{L}_N$, причем каждое из произведений степеней (5) линейно выражается через элементы B_N с коэффициентами из $\mathbb{K}_0(z)$, не имеющими полюсов в точке ξ . Следовательно, при любом N множество B_N образует ξ -базис линейного пространства $\mathbb{L}_N$. Поэтому по теореме 1 при любом N числа (27) линейно независимы над $\mathbb{A}$ и составляют базис $\mathbb{L}_{N,\xi}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть совокупность E -функций (1) составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (2) (дифференциальных уравнений (3)) и имеет степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) над $\mathbb{C}(z)$ равную l , $1 \leq l < t$, а функции (25) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы) над $\mathbb{C}(z)$. Далее, $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi \notin \Lambda$, $\xi T(\xi) \neq 0$, а совокупность функций (1) является однородно простой (простой) в точке ξ .

Тогда числа (26) однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим однородные минимальные уравнения функций (1) над $\mathbb{C}(z)$ и определенные ими множества B_N . Поскольку при любом $N \in \mathbb{N}$ множество B_N содержит элементы

$$f_l^{k_l}(z) \cdots f_1^{k_1}(z), \quad k_1 + \cdots + k_l = N,$$

то по теореме 2 числа (26) однородно алгебраически независимы.

Частный случай теоремы 3, когда поле $\mathbb{K}_0$ есть мнимое квадратичное поле над $\mathbb{Q}$, в 1973 году установил В.Г. Чирский (см. [4]). В 1989 году автор статьи (см. [3]) доказал, что существует индекс i , $1 \leq i \leq h$, такой, что числа $f_{1,i}(\xi_i), \dots, f_{l,i}(\xi_i)$ однородно алгебраически независимы (алгебраически независимы).

В статье автора [5] рассматривается теорема 3, аналогичная теореме 3 настоящей работы. Но там доказательство проводится недостаточно подробно. Утверждения леммы 2 и установленной ниже леммы 5 дополняют доказательства этой теоремы. В той же статье доказательства следствий 3 и 4 ошибочны. Их утверждения можно рассматривать как гипотезы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть множество E -функций (1) составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (2) (дифференциальных уравнений (3)) и имеет степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) над $\mathbb{C}(z)$ равную l , $1 \leq l \leq t$; $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$; $\mathbb{K}$ – какое-либо алгебраическое поле над $\mathbb{Q}$, содержащее поле $\mathbb{K}_0$, а совокупность E -функций (1) является однородно простой в точке ξ . Далее, однородный многочлен (многочлен)

$$P = P(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z_1, \dots, z_m], \quad \deg_{\bar{z}} P = s, \quad s \geq 1, \quad \overline{P} = H,$$

где $\overline{P}$ – наибольший из модулей его коэффициентов и всех их сопряженных.

Тогда либо

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0, \quad (28)$$

либо

$$|P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))| > c_0 H^{-\gamma_0 h^l s^{l-1}}, \quad (29)$$

a в неоднородном случае

$$|P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))| > cH^{-\gamma} h^{l+1} s^l,$$

где $c_0 > 0$ и $c > 0$ – постоянные, зависящие от функций (1) и чисел m, l, ξ , а $\gamma_0 > 0$ и $\gamma > 0$ – постоянные, зависящие только от функций (1) и числа l .

Установим вспомогательные предложения для доказательства теоремы 4.

ЛЕММА 4. Идеал $\mathfrak{P}$ имеет базис, состоящий из многочленов кольца $\mathbb{A}[z, z_1, \dots, z_m]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_1, \dots, R_M \in \mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m]$ – какой-либо базис идеала $\mathfrak{P}$. Тогда

$$R_j(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (30)$$

Рассмотрим линейное пространство над $\mathbb{A}$, порожденное всеми коэффициентами многочленов $R_1, \dots, R_M$, и обозначим его $\mathcal{L}$. Пусть $b_1, \dots, b_N$ – базис $\mathcal{L}$. Тогда каждый многочлен R_j единственным способом представляется в виде

$$R_j = \sum_{l=1}^N b_l Q_{j,l}, \quad Q_{j,l} \in \mathbb{A}[z, z_1, \dots, z_m]. \quad (31)$$

Докажем, что все многочлены $Q_{j,l} \in \mathfrak{P}$.

Из равенств (30) и (31) имеем, что

$$R_j(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = \sum_{l=1}^N b_l Q_{j,l}(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (32)$$

Дифференцируя k раз ($k \geq 0$) равенство (32), получаем

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k R_j(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \Big|_{z=0} = \sum_{l=1}^N b_l \left(\frac{d}{dz}\right)^k Q_{j,l}(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \Big|_{z=0} = 0, \\ k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, M. \quad (33)$$

Так как все коэффициенты степенных рядов функций (1) являются алгебраическими числами, то

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k Q_{j,l}(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \Big|_{z=0} \in \mathbb{A}, \\ k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, N.$$

Поэтому из равенств (33) следует, что

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k Q_{j,l}(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \Big|_{z=0} = 0, \\ k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, N.$$

Следовательно, все $Q_{j,l}(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0$. Из последних равенств получаем, что

$$Q_{j,l} \in \mathfrak{P}, \quad j = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, N. \quad (34)$$

Равенства (31) и (34) позволяют утверждать, что $\mathfrak{P} = (Q_{1,1}, \dots, Q_{M,N})$. Это доказывает утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Идеал $\mathfrak{P}_\xi \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ имеет базис, состоящий из многочленов кольца $\mathbb{A}[z_1, \dots, z_m]$.

Так как $\xi \in \mathbb{A}$, то утверждение очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть

$$\Omega = \mathfrak{P}_\xi \cap \mathbb{A}[z_1, \dots, z_m] \quad (35)$$

– идеал кольца $\mathbb{A}[z_1, \dots, z_m]$. Тогда идеал $\mathfrak{P}_\xi$ является расширением идеала (35) в кольцо $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно, так как по следствию 1 идеалы (35) и $\mathfrak{P}_\xi$ имеют один и тот же базис.

Пусть $\mathfrak{P}^{(i)}$, $i = 1, \dots, h$, обозначают идеалы кольца $\mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m]$, порожденные всеми однородными по $z_1, \dots, z_m$ многочленами, обращающимися в нуль при подстановке в них вместо $z_1, \dots, z_m$ соответствующих функций (9) при $i = 1, \dots, h$, а

$$\mathfrak{P}_{\xi_i}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, h, \quad (36)$$

– идеалы кольца $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$, соответствующие идеалам $\mathfrak{P}^{(i)}$ при гомоморфизмах φ_{ξ_i} .

ЛЕММА 5. Если идеал $\mathfrak{P}_\xi$ прост, то просты и все идеалы (36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим идеал (35) и идеалы

$$\Omega_i = \mathfrak{P}_{\xi_i}^{(i)} \cap \mathbb{A}[z_1, \dots, z_m], \quad i = 1, \dots, h. \quad (37)$$

Следствие 1 позволяет утверждать, что при любом $i = 1, \dots, h$ идеал $\mathfrak{P}_{\xi_i}^{(i)}$ имеет базис, состоящий из многочленов кольца $\mathbb{A}[z_1, \dots, z_m]$. Но тогда $\mathfrak{P}_{\xi_i}^{(i)}$ является расширением идеала Ω_i в кольцо $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$. Поскольку идеал $\mathfrak{P}_\xi$ прост, то идеал (35) также является простым. При любом $i = 1, \dots, h$ идеал (37) сопряжен с идеалом (35) и поэтому является простым.

Поле $\mathbb{A}$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику 0. По теореме 39 из [6, гл. 7, § 12] любой идеал (37) абсолютно прост. Поэтому его расширение в кольцо $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$, т.е. идеал $\mathfrak{P}_{\xi_i}^{(i)}$, также является простым идеалом. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Если $P \in \mathfrak{P}_\xi$, то по лемме 2 выполняется равенство (28). Если же $P \notin \mathfrak{P}_\xi$, то по лемме 2 $P_i \notin \mathfrak{P}_{\xi_i}^{(i)}$, $i = 1, \dots, h$. Поскольку по лемме 5 все множества функций (9) при $i = 1, \dots, h$ однородно просты в соответствующих точках ξ_i , то по лемме 3 $P_i(f_{1,i}(\xi_i), \dots, f_{m,i}(\xi_i)) \neq 0$, $i = 1, \dots, h$. Но тогда по вспомогательной теореме из книги [1, гл. 12, § 6] справедливо неравенство (29). Теорема доказана.

В работе [2] доказано, что если совокупность E -функций (1) является однородно простой в точке ξ и эти функции линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то числа (4) линейно независимы над $\mathbb{A}$. Из этого утверждения и леммы 5 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. Пусть совокупность E -функций (1) составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (2), линейно независима над $\mathbb{C}(z)$ и является однородно простой в точке $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$.

Тогда числа $f_{1,i}(\xi_i), \dots, f_{t,i}(\xi_i)$ при любом значении $i = 1, \dots, h$ линейно независимы над $\mathbb{A}$.

Лемма 5 позволяет распространить утверждение теоремы 3 на множество чисел $f_{1,i}(\xi_i), \dots, f_{l,i}(\xi_i)$ при любом $i = 1, \dots, h$.

Заметим, что идеал $\mathfrak{P}_\xi$ является простым для всех чисел $\xi \in \mathbb{C}$, за исключением конечного числа из них (см. [2]).

Оценка многочлена от значений E -функций (1), установленная в теореме 4, была также доказана в 1995 году А. И. Галочкиным (см. [7]) другим методом при меньших предположениях относительно точки ξ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
- [2] Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б. О линейной независимости значений E -функций // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 93–108.
- [3] Шидловский А. Б. К проблеме алгебраической независимости значений E -функций в алгебраических точках // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 1. С. 115–122.
- [4] Чирский В. Г. Об арифметических свойствах значений аналитических функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 1. С. 83–94.
- [5] Шидловский А. Б. Об арифметических свойствах значений E -функций // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 3. С. 252–258.
- [6] Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. Т. 2. М.: ИЛ, 1963.
- [7] Галочкин А. И. Оценки снизу многочленов от значений алгебраически зависимых E -функций // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 1. С. 305–309.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
22.01.2000