Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Шокуров, О рациональной связности, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 771–782

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm997>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:16:25

УДК 512

О РАЦИОНАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ

В. В. Шокуров

Работа посвящена изложению доказательства одной из самых важных теорем би-рациональной геометрии многообразий Фано.

Библиография: 17 названий.

Настоящая заметка является второй в серии “Letters of a bi-rationalist” (см. [1]). Написана она 5 октября 1995 г.; окончательная редакция – 12 марта 1997 г. в Балтиморе. Она посвящается памяти одного из зачинателей современной бирациональной алгебраической геометрии Бориса Мойшезона.

Алгебраическое пространство X *рационально связано*, если любые его две точки в каждой компоненте связности X можно соединить цепочкой рациональных кривых. Это равносильно R -эквивалентности всех точек каждой компоненты связности X [2, лемма 4.2]. Собственно говоря, это даже не связность, когда X несвязно. К тому же в общем случае данная связанность слабее, введенной Кампаной в [3] и Колларом–Мияокой–Мори (см. [4, определение–замечание 2.2]), о чем подробнее изложено в следствии 8 и замечаниях 2, 5. Однако, как ожидается, в случае (слабых) многообразий лог-Фано все они совпадают на каждой неприводимой компоненте связности (см. замечание 2).

Настоящая заметка имеет два источника. Первый – рациональная связность неособых многообразий Фано [5, следствие 3.2], используемая при доказательстве методом Фано ограниченности модулей последних [6, теорема 5.4 и следствие 5.6], [4, следствие 3.11]. Второй источник – вопрос А. Борисова о рациональной связности разрешения трехмерной лог-терминальной или даже терминальной особенности.

Мы придерживаемся в основном терминологии, обозначений и ограничений из [1], [7]–[9].

Гипотеза о рациональной связности. Рассмотрим лог-пару $(X/S, B)$, состоящую из алгебраического пространства X/S с границей B и удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) X нормально (или, возможно, полунормально);
- 2) $f: X \rightarrow S$ собственнo;
- 3) $K + B$ лог-каноничен;
- 4) $-(K + B)$ численно обилен $/S$.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда NSF, грант № DMS-9500971.

Тогда все слои f рационально связны.

Однако отдельные компоненты слоя могут быть не связны (см. замечание 2).

ПРИМЕР-ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим неособую линейчатую поверхность X/E , где E — неособая кривая рода $g \geq 1$, являющаяся одновременно сечением $E \subset X/E$. При подходящем выборе X и E можно считать кривую E исключительной с $E^2 \leq -2g + 1$. Тогда имеется рациональное число b такое, что $1 \leq b < 2$ и лог-дивизор $K + D$ с $D = bE$ численно тривиален на E . С другой стороны, $-(K + D.C) = 2 - b > 0$ на кривой C слоя. Значит, $-(K + D)$ численно эффективен и, более того, объемен. Однако поверхность X не рационально связна.

Тем самым в общем случае условие обильности 4) гипотезы нельзя ослабить до численной эффективности и объемности $/S$. Однако последнее возможно при ослаблении особенностей лог-дивизора (см. следствия 4–6).

Сдувая E в точку, мы получаем нормальную проективную поверхность дель Пеццо Y , предполагая $(K + D) \sim_{\mathbb{Q}} 0$ на E , что выполнено для подходящего нормального пучка E на X . В этом случае Y рационально связно, хотя и имеет не лог-каноническую особенность при $g \geq 2$. Заметим, что особенность в данном случае изолирована. Как будет видно из дальнейшего, условие 3) гипотезы на особенности можно ослабить в том же стиле до условия

3') $K + D$ с эффективным дивизором D (вместо границы B) лог-каноничен во всех подмногообразиях $Y \subset X/S$ с $\dim Y/S > 0$.

В случае, когда $S = \text{pt.}$ — замкнутая точка, X — (полу)нормальное многообразие Фано, лог-каноничное вне конечного множества замкнутых точек (изолированных лог-особенностей) (ср. следствие 6).

Если мы чуть увеличим b в предшествующем примере, то X будет многообразием лог-Фано для $K + D$. Однако оно будет иметь лог-особенность D дивизориального типа: условие 3') гипотезы не выполнено. Значит, дальнейшее размазывание особенностей невозможно.

В трехмерном случае можно построить подобные примеры с $D = B = 0$.

ПРИМЕР 1. Пусть теперь X/E — гладкое расслоение на коники, а $E = E_1 \times E_2$ — произведение двух неособых кривых рода $g_1 \geq 2$ и $g_2 \geq 1$ соответственно. Снова при подходящем выборе X и E имеется рациональное b такое, что $1 \leq b < 2$ и лог-дивизор $K + D$ с $D = bE$ численно тривиален на $(E_1, \text{pt.})$, но отрицателен на $(\text{pt.}, E_2)$. Сдувая E послойно над E_2 в кривую E_2 , мы получаем трехмерное многообразие Фано Y с кривою E_2 лог-особенностей. Кроме того, Y/E_2 — расслоение на дель Пеццо с сечением E_2 . Оно не рационально связно.

В предыдущем примере можно изменить E так, чтобы $K + D$ было численно тривиально на $(\text{pt.}, E_2)$. Тогда Y — многообразие Фано в слабом смысле: $-K_Y$ численно эффективен и объемен. Чтобы особенности на Y (вдоль E_2) были лог-каноническими, надо взять конструкцию с $g_1 = g_2 = 1$. При этом несвязность сохранится.

В заключение отметим, что X станет связным, если E в предшествующих примерах сдуть в точку. Это, в частности, показывает, что рациональная связность не является бирациональным инвариантом в общем случае (тем не менее, ср. следствие 8).

ТЕОРЕМА 1 (ср. [1, теорема 2]). *Гипотеза о рациональной связности верна в размерности $\leq n$, если*

- 1) *для каждой лог-пары (X, B) с $\dim X \leq n$ существует проективное лог-разрешение $Y \rightarrow X/S$;*
- 2) *стандартные гипотезы о лог-моделях (СГЛМ) [9, 5.1] выполнены в размерности $\leq n$.*

В характеристике 0 по Хиронаке достаточно условия 2).

Теорема по существу вытекает из следующего ослабления.

ЛЕММА 1 (ср. [1, лемма 3]). *В предположениях 1), 2) теоремы 1 пусть X/S , как в гипотезе о рациональной связности, а подпространство E состоит из компонент вырождения*

$$\text{Exc}(f/P) := \{x \in X \mid f(x) \in P \text{ и морфизм } f \text{ не конечен в } x\}$$

над замкнутым подпространством $P \subseteq S$. Пусть $\gamma: E \dashrightarrow G/S$ рационально собственный и доминантный морфизм алгебраических пространств. Тогда на E имеется семейство $\{C_\lambda\}/S$ (возможно, несвязное) рациональных кривых, покрывающее G ; точнее $\{\gamma(C_\lambda)\}$ покрывает G .

Результат верен при замене условия 3) гипотезы на 3').

В характеристике 0 достаточно условия 2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как будет видно из методов доказательства, лемма 1 справедлива также для некоторого подпространства $E' \subseteq Y$, доминирующего E на произвольном раздутии X . Действительно, по предположению 1) теоремы 1 раздутие можно считать достаточно произвольным, но фиксированным затем разрешением особенностей, например, лог-разрешением. При этом E , предполагаемое неприводимым, заменяется на доминирующий дивизор E' в случае $E \neq X$ и на разрешение Y в противном случае, т.е. на многообразии Фано $/P = S$. Индукция по размерности сохраняет утверждение и приводит к требуемому доминирующему дивизору в случае не многообразия Фано $/P = S$.

Согласно теореме Тзена утверждение не зависит от разрешения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Можно воспользоваться доказательством [1, лемма 3] со следующими изменениями. Поскольку нас интересует общий слой γ при $G \neq \text{pt.}$, мы можем пренебречь особенностями, не доминирующими G ; поэтому – ограничиться условием 3) гипотезы.

Также предполагаем, что E неприводимо и $f(E) = \text{pt.}$ Отметим, что рациональная цепочка деформируется в такую же цепочку.

Однако, $G \neq \text{pt.}$ предполагается всюду.

Затем согласно конструкции [1, лемма 3], [8, эвристическое рассуждение] мы сводим задачу к случаю многообразия Фано: $S = \text{pt.}$ Для этого увеличиваем особенности $K + B$ в окрестности общего слоя F проекции γ так, чтобы они доминировали G (точнее, би-дивизор с 0-й лог-дискрипантой), но в то же время были лог-каноническими в общем слое $/G$. Например, если особенности совпали с E , но последнее условие не выполнено, то доминируют не лог-канонические особенности и мы их понижаем до лог-канонических.

Далее неприводимая и доминирующая G компонента особенностей и обозначается через E . Поскольку в окрестности полного подпространства (и даже проективного) E имеется лишь конечное число центров с лог-дискрипантой 0 и $G \neq \text{pt.}$, такие центры доминируют G вблизи общего слоя F .

Значит, лог-каноничность $K + B$ вблизи F сохранится при добавлении εH , где H – общая гиперплоскость через дивизориальное семейство F_g , задающее дивизор Вейля $D = \cup F_g$ вблизи F . Заметим, что $D \neq 0$, так как $G \neq \text{pt.}$

Более того, при малом $\varepsilon > 0$ лог-дивизор $K + B + \varepsilon H$ по-прежнему отрицателен на E . Значит, при редукции случая многообразия Фано можно предполагать, что $K + B$ численно тривиален на $X = E$ и имеет $D \neq 0$ в $\text{Supp}(B)$ послойного типа в окрестности общего слоя F . Теорема о свободе, как в доказательстве [1, лемма 3], тут не нужна.

Вычитание D сохранит численную тривиальность в общем слое F , но приведет к отрицательности на общих кривых поперек F .

Далее действуем, как в [1, лемма 3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточно проверить требуемую связность для всех неприводимых компонент E каждого слоя f . Последнее вытекает из [5, предложение 2.7], ибо условие 2) в данном предположении выполнено по лемме 1.

Согласно Риману лемма 1 верна и эквивалентна для нормализации E^ν . Гладкость E^ν не требуется в доказательстве [5, предложение 2.7]. Однако проективность и нормальность, по-видимому, существенны.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть (X, D) – многообразие лог-Фано, лог-каноническое в размерности ≥ 1 , т.е. дивизор $-(K + D)$ обилен и $K + D$ имеет лог-канонические особенности вне конечного множества замкнутых точек. Тогда X рационально связано при выполнении предположений 1), 2) теоремы 1.

В характеристике 0 достаточно условия 2) теоремы 1.

Поскольку СГЛМ выполнены в характеристике 0 и размерности ≤ 3 [9], мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2 (ср. следствие 4 ниже). В характеристике 0 гипотеза о рациональной связности и рациональной связности многообразия лог-Фано из следствия 1 верна при $\dim X \leq 3$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Предположим, что $g: Y \rightarrow X$ – собственный бирациональный морфизм (например, разрешение особенностей X), а $K + B$ лог-терминален. Тогда любой слой g связан и рационально связан при выполнении предположений 1), 2) теоремы 1.

В характеристике 0 достаточно условия 2) теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $x \in X$ и докажем связность $g^{-1}x$. Утверждение локально по X .

Его достаточно проверить при $\mathbb{Q}$ -факториальности X . Для чего заменяем X на его $\mathbb{Q}$ -факториализацию X'/X , которая к тому же строго лог-терминальна. (Конечно, терминальность предполагает наличие подобного разрешения.) Тогда достаточно установить рациональную связность слоя $E \subset X'/x$. Более того, нам надо найти рациональные кратные кривые сечения на некотором дивизоре $/E$, доминирующие E , указанного или доминирующего разрешения (ср. вопросы 1, 2). Последнее вытекает из замечания 1

для X'/X и $K'_X + B' - \varepsilon H$, где B' – рациональный образ B , а H – относительное гиперплоское сечение. Отметим, что локально над X можно считать $-H$ эффективным и не содержащим центров с дискрипантами 0. Значит, $K'_X + B' - \varepsilon H$ удовлетворяет условиям 1)–4) гипотезы при малых $\varepsilon > 0$.

Заметим, что доминирующие рациональные цепочки могут оказаться несвязными. Однако они дополняются до связных кривыми слоя.

В $\mathbb{Q}$ -факториальном случае, вычитая B , мы сводим задачу к чисто лог-терминальному случаю (с $B = 0$). Более того, тогда X/X – единственная слабо лог-каноническая модель [7, 1.5.7]. Граница при этом считается приведенной на исключительных дивизорах пространства Y/X .

Достаточно установить связность для строго лог-терминальной модели Y/X , доминирующей исходную (например, таком лог-разрешении особенностей X). Такая модель существует по предположению 1) теоремы 1 или по Хиронаке в характеристике 0.

Согласно предположению 2) теоремы 1 имеется последовательность (элементарных) перестроек $Y = Y_N \dashrightarrow Y_{N-1} \dashrightarrow \dots \dashrightarrow Y_1 = X/X$. Поэтому можно воспользоваться индукцией по N .

Итак, предположим, что слой Y_{N-1}/x рационально связан. Надо проверить, что то же самое верно для слоя Y_N/x . Согласно определению перестроек имеется диаграмма сдвигов $/X$:

$$\begin{array}{ccc} Y_N & & Y_{N-1} \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & \end{array}.$$

Тогда слой S/x рационально связан как образ рационально связного. По теореме 1 и определению прерастройки все слои Y_N/S рационально связны. Значит, слой Y_N/x тоже рационально связан. Заметим для этого, что по $\mathbb{Q}$ -факториальности X исключительное множество E_N/X дивизориально при его нетривиальности. Снова согласно замечанию 1 рациональные кривые, задающие связность, поднимаются как кратные сечения на любое разрешение или даже раздутие каждой компоненты пространства E_N . Последнее надо проверить для связности в слоях Y_N/S покомпонентно. Это вытекает из того, что $K_{Y_N} + E_N$ лог-терминален и индуцирует стягивание теоремы 1 на каждой компоненте в E_N .

ТЕОРЕМА 2. *Если в условиях теоремы 1 $K + B$ Кавамата лог-терминален, то мы можем усилить условие 4) гипотезы до следующих условий:*

- 1) $-(K + B)$ численно эффективен и объем $/S$;
- 2) выполнена теорема о свободе [1, 2.2].

В характеристике 0 достаточно условия 2) теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО-ЗАМЕЧАНИЕ. Как и для теоремы 1, с заменой леммы 1 на [1, лемма 3].

Отметим также, что согласно условию 2) или [10, замечание 3-1-2] в характеристике 0 имеется сдвиг $X \rightarrow Y/S$. Слои Y/S рационально связны по теореме 1, а слои X/Y – по следствию 3. Это влечет требуемое с точностью до существования кратных кривых-сечений (ср. вопросы 1, 2). Последнее выполнено по замечанию 1.

СЛЕДСТВИЕ 4 (ср. [4, следствие 3.11]). Пусть (X, D) – слабое многообразие лог-Фано, лог-терминальное по Кавамате, т.е. дивизор $-(K + D)$ численно эффективен, обжемен и $K + D$ лог-терминален по Кавамате. Тогда пространство X рационально связно при выполнении предположений 1), 2) теоремы 1.

В характеристике 0 достаточно условия 2) теоремы 1.

Теперь мы можем уточнить результат [1, теорема 10] о точках неопределенности рационального морфизма $g: X \dashrightarrow Y$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Предположим, что $K + B$ лог-терминален при некоторой границе B . Тогда образ $g(x)$ замкнутой точки точки $x \in X$ рационально связан при выполнении предположений 1), 2) теоремы 1. (Для связности $g(x)$ достаточно нормальности X .)

В характеристике 0 достаточно условия 2) теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменим X на разрешение неопределенности рационального морфизма g :

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ X & & Y \end{array}.$$

Тогда $g(x) = q(p^{-1}x)$ и $p^{-1}x$ рационально связно по следствию 3.

Как и следствие 2, выводим

СЛЕДСТВИЕ 6. В характеристике 0 рациональная связность в следствиях 3–5 верна при $\dim X \leq 3$ без дополнительных предположений 1), 2) теоремы 1.

Чтобы обобщить следствие 5 до отображения рационально связных множеств (см. следствие 7), надо уметь поднимать рациональные кривые до подобных кратных сечений. Более прямолинеен (ср. с замечанием 6)

ВОПРОС 1 (ср. [4, вопрос (2)]). Пусть $f: X \rightarrow S$ – стягивание, удовлетворяющее условиям 1)–4) гипотезы. Всякая ли кривая на $C \subseteq S$ имеет сечение над общей точкой?

В случае утвердительного ответа [4, теорема 2.13] дает следующее усиление.

УТВЕРЖДЕНИЕ А (аналог китайской теоремы об остатках). Точнее, существует такое сечение через конечное число точек пространства X в разных гладких слоях f над гладкими точками C .

ПРИМЕР 2. По теореме Тзена вопрос 1 имеет утвердительный ответ для $\mathbb{P}^m$ -расслоений и моноидальных преобразований в неособых центрах.

Кое-где выше мы строили подобные сечения для рациональных кривых по замечанию 1.

Чтобы построить рациональные кратные сечения в стиле замечания 1, мы проводим редукцию к относительным многообразиям Фано над кривой $C = P$. Этот подход плохо работает и в случае сечений. Желательна и довольно правдоподобна

ФОРМУЛА ПРИСОЕДИНЕНИЯ. Если подпространство Y имеет лог-отличие 0, то

$$(K + B)|_Y = K_Y + B_Y \quad (1)$$

для некоторого эффективного дивизора B_Y , при этом $K_Y + B_Y$ лог-каноничен там, где лог-каноничен $K + B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При выполнении формулы присоединения, предположений 1), 2) теоремы 1, и лишь 2) в характеристике 0, утвердительность ответа на вопрос 1 в размерности $\leq n = \dim X$ достаточно проверить для расслоений Фано размерности $\leq n - 1$ над (общей точкой) кривой $C = S$.

УТВЕРЖДЕНИЕ В. Вопрос 1 имеет утвердительный ответ в размерности ≤ 3 (с заменой сечений на чисто несепарабельные кратные сечения в положительной характеристике).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Увеличивая лог-особенность X над C , можно добиться появления лог-отличия 0 вдоль подпространства Y/C , сохранив при этом лог-каноничность и отрицательность $K + B$ над общей точкой C . Применяя формулу присоединения (1), сводим задачу к многообразию Фано и даже Кавамата, лог-терминальному над общей точкой C . При ограничении получаем стягивание над общей точкой C , как в [11] (ср. [7, лемма 3.6]). В частности, оно задает сечение, когда бирационально.

Утверждение В в случае неособых дель Пеццо или рационально связанных поверхностей справедливо согласно Кольо-Телену [12]. Общий случай дель Пеццо с лог-терминальными особенностями по теореме 2 (приведенную компоненту границы можно немного уменьшить) сводится после минимального раздутия к неособым рационально связанным поверхностям, а потому неособым дель Пеццо или расслоению на коники. Далее, согласно известным рассуждениям база расслоения на коники будет геометрически (приведена) неприводима и рациональна (ср. определение 1; см. также замечание 9). Заметим, что в случае бирационального стягивания-сдутия дивизора E на сечение C дивизор E будет иметь сечение как $\mathbb{P}^1$ -расслоение.

В случае расслоения на коники дважды применяем теорему Тзена.

В случае не лог-терминальности лог-каноническая особенность и задает сечение [7, теорема 6.9].

(Ниже в следствиях 7–9 X предполагается неприводимым, по существу нормальным; о полунормальном варианте см. в замечании 4.) Из методов доказательства следствия 5 получаем

СЛЕДСТВИЕ 7. В предположениях следствия 5 и

- 1) при утвердительном ответе на вопрос 1 в размерности $\leq n - 1$, где $n = \dim X$,

для рационально связанного $P \subseteq X$ образ $g(P)$ тоже рационально связан.

СЛЕДСТВИЕ 8. В предположениях следствия 5 и условии 1) следствия 7 любая модель пространства X/S рационально связна над точкой базы S , когда последнее верно для X/S . Значит, рациональная связность слоя не зависит от модели с лог-терминальными особенностями.

До размерности 4 вопрос 1 можно опустить по утверждению В (ср. с замечанием 6).

По замечанию 1 рациональная связность относительного многообразия лог-Фано индуцирована кривыми произвольного разрешения. Откуда получаем

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Последнее утверждение о независимости рациональной связности верно для общего слоя относительного многообразия лог-Фано, т.е. при условиях 1)–4) гипотезы, условиях теоремы 1 и предположении о лог-терминальности особенностей. Отсюда вытекает, что все известные рациональные связности в данной ситуации эквивалентны. В частности, тогда согласно [4, теорема 2.1] две общие точки одной неприводимой компоненты общего слоя можно соединить одной рациональной кривой, а не только их цепочкой. Имеется аналог данного утверждения и для слабого относительного многообразия Фано в стиле теоремы 2.

В характеристике 0 достаточно условия 2) теоремы 1.

По существу, указанные результаты относятся к случаю относительного (слабого) многообразия лог-Фано, т.е. $S = \text{pt}$. Однако они могут быть не верны для специальных слоев. Простейший пример – вырожденные слои расслоения на коники. Более интересен пример раздутия трехмерной точки с эллиптическим конусом E в качестве исключительного дивизора. Такое раздутие получится раздутием неособой точки, затем неособой кубики на раздутом дивизоре с последующим сдутием в точку первого. Полученная особенность лог-терминальна. Может быть, имеется подобный пример и с терминальными особенностями. Тем не менее две точки на поверхности E можно соединить двумя рациональными кривыми C_i ограниченной степени: $(K_i.C_i) > -1$ (ср. с замечанием 8). Подобный пример до сдутия с границей, сосредоточенной в двух посроенных исключительных дивизорах, показывает, что неприводимая компонента, отвечающая E , не рационально связна, а таков лишь слой в целом.

Можно ожидать также, что рационально связна во всех смыслах неприводимая компонента слоя, которая входит в лог-особенности $K+B$, и $K+B$ лог-терминален. По формуле присоединения это эквивалентно предыдущему (ср. доказательство следствия 3 и замечание 4).

По утверждению В имеем

СЛЕДСТВИЕ 9. *В характеристике 0 следствия 7, 8 верны при $\dim X \leq 3$ без дополнительных предположений 1), 2) теоремы 1 и не зависят от ответа на вопрос 1.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ-ПРИМЕРЫ. Алгебраическое пространство будем называть *сильно унилинейчатым*, если унилинейчат его образ при любом рациональном морфизме.

В размерности 1 это равносильно рациональности. В характеристике 0 и размерности ≤ 2 верно то же самое.

Однако в размерности 3 лишь в характеристике 0 сильная унилинейчатость равносильна тому, что все образы рациональных морфизмов имеют кодаинову размерность $-\infty$ (в последнем случае можно говорить об абсолютной кодаиновой размерности $-\infty$) [13, теорема 6.1]. Предположительно то же самое верно и в высших размерностях.

В положительной характеристике уже унилинейчатость неравносильна отрицательности кодаировой размерности в размерности ≥ 2 . Например, существуют унилинейчатые, даже унирациональные КЗ поверхности [14].

Отметим, что всякий рациональный морфизм сохраняет унилинейчатость и сильную унилинейчатость (ср. следствие 7).

Вопрос 2 (ср. [4, вопрос (1)]). Верно ли, что алгебраическое пространство X рационально связано при лог-терминальности его особенностей или $K + B$, если и только если оно сильно унилинейгато? Относительная версия может быть верна лишь для общих слоев, отчасти, в силу бирациональности самого утверждения (ср. с замечаниями 2 и 4).

Равносильно, если X не рационально связано, то имеется ли рационально собственный и доминирующий $X \dashrightarrow Y$, где Y не унилинейгато? В частности, $\dim Y \geq 1$ и в характеристике 0 кодаирова размерность Y неотрицательна (см. утверждение 1) предложения 2). Последний морфизм задается отношением рациональной связности [4], [5].

Предложение 2. *В характеристике 0 утвердительный ответ на вопрос 2 в размерности $\leq n$ вытекает из утвердительного ответа на вопрос 1 и предположения 2) теоремы 1, если помимо того в размерности $\leq n$ выполнено утверждение:*

- 1) *унилинейчатость равносильна отрицательности кодаировой размерности.*

Доказательство. Из рациональной связности пространства вытекает унилинейчатость его образов для регулярных морфизмов. По следствию 8 это верно и для рациональных морфизмов.

Предположим обратное, что X сильно унилинейгато. Тогда по Хиронаке, СГЛМ и следствию 8 можно считать, что пространство X имеет лишь лог-терминальные и даже терминальные особенности. Более того, (лог-) терминальные перестройки в СГЛМ сохраняют рациональную связность. С другой стороны, по предположению 1) X имеет отрицательную кодаирову размерность и по предположению 2) теоремы 1 (после перестроек) расслаивается на многообразия Фано стягиванием $X \rightarrow Y$ с $\dim Y < \dim X$.

По предположению Y тоже сильно унилинейгато. Значит, по индукции рационально связано. Отсюда по теореме 1 при утвердительном ответе на вопрос 1 X тоже рационально связано. Здесь негласно добавлена гипотеза о полуобильности к СГЛМ.

Следствие 10 (ср. [4, предложение 2.12]). *В характеристике 0 при лог-терминальности X или $K + B$ и $\dim X \leq 3$ рациональная связность X эквивалентна сильной унилинейчатости.*

Замечание 3. Катсура проверил утверждение следствия 10 в положительной характеристике и размерности 2.

Замечание 4. В относительном случае утверждение 1) предложения 2 следует заменить на подходящую лог-версию, поскольку при индукции возникнут полунормальные многообразия с кодаировой размерностью в лог-смысле. По-существу это – полунормальный случай (ср. замечание 2). При этом 1) неверно, если унилинейчатость понимать классически.

Следствия 7–9 тоже можно обобщить на полунормальный случай в подходящей лог-категории (регулярность рациональных морфизмов в общих точках ненормальности).

СЛЕДСТВИЕ 11. *В предложении 1, предполагая выполненным утверждение 1) предложения 2 и формулу присоединения (1), можно ограничиться случаем первой специи: $\rho(X/C) = 1$ и считать, что X имеет лишь терминальные особенности в общем слое над C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совместим доказательства утверждения В и предложения 2. В случае лог-терминальных особенностей рациональная связность слоев X/C , а потому и сильная унилинейчатость вытекает из следствия 1 и 8.

В не лог-терминальном случае надо использовать формулу присоединения на лог-особенности и тот факт, что стягивание $X \rightarrow C$ индуцирует стягивание на минимальном центре лог-особенностей (ср. [7, лемма 3.6]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В следствии 11 можно опустить формулу присоединения и предположение 1) предложения 2, когда $\dim X/S \leq 2$, воспользовавшись для этого теоремой 1 и [12] (ср. [4, предложение 2.12]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Согласно следствию 11 возможные контрпримеры к утвердительному ответу на вопросы 1 и 2 следует искать для четырехмерных расслоений Фано первой специи X/C над кривой $C = \mathbb{P}^1$ с терминальными особенностями в общем слое $/C$. Они могут рассматриваться как трехмерное многообразие Фано над полем $k(C) = k(x)$ рациональных функций одной переменной x . Всякое ли такое многообразие Фано имеет (геометрическую) точку над $k(x)$?

Однако, может быть, имеется рациональное кратное сечение: точка над $k(x') \supset k(x)$.

Если такой контрпример существует в размерности n для вопроса 1 (значит, и в размерности $\geq n$; как мы уже знаем, $n \geq 4$), то конус над ним с подходящим раздутием вершины приведет к контрпримеру для вопроса 2 в размерности $n + 1$ (значит, и в размерности $\geq n + 1$; ср. пример-замечание и пример 1). Откуда можно усмотреть эквивалентность вопросов 1 и 2. Отсюда также следовало бы нарушение независимости рациональной связности в размерности $\geq n + 1$ уже при Кавамата лог-терминальных особенностях, а возможно, и при терминальных (ср. следствие 8).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Задача о сечении (вопрос 1) и ее усиление (утверждение А) (в случае базы кривая $C = S$, как в предложении 1) напоминают соответственно следствие принципа Хассе и китайскую теорему об остатках для (лог-) многообразия Фано X над функциональным полем $K = k(C)$, где k – основное поле, предполагаемое пока алгебраически замкнутым.

В аналогичном случае для арифметического поля K (конечном расширении $\mathbb{Q}$) принцип Хассе не выполнен даже для гладких многообразий Фано X/K с $\rho_K(X) = 1$ в размерности ≥ 2 [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Для метода Фано важна неприводимость и ограниченность степени (например, относительно поляризации $-K$ или ее лог-версии $-K - B$) рациональной цепочки C , соединяющей две общие точки в X (или соответственно общую с некоторой). Общие методы нетеровой индукции позволяют утверждать лишь ограниченность

числа d (соответственно d') неприводимых компонент C , а именно $d \leq 2n - 1$ (соответственно $d' \leq n$), где $n = \dim X$, при неприводимости X , и суммой таковых оценок по неприводимым компонентам X (или по неприводимым компонентам слоя X/S) в полунормальном случае. Более того, по замечанию 2 следует ожидать, что общие две и более точек можно соединить одной рациональной кривой C . Однако ее степень $d = -(K.C)$ неограничена, если мы потребуем лишь лог-терминальность особенностей, что видно уже на рациональных конусах в размерности 2. Конечно, это связано с неограниченностью семейства таких многообразий Фано. Согласно гипотезе Алексеева–Борисова при ε -лог-терминальности с $\varepsilon > 0$ семейство соответствующих многообразий лог-Фано размерности n ограничено. Откуда бы следовала ограниченность степеней для границы $d(\varepsilon, n)$ в зависимости от ε и n ? Какова она? Возможно $d(\varepsilon, n) \leq c/\varepsilon$, где c зависит лишь от n . В общем случае также возможно, что d ограничено при фиксированном индексе и граница линейна по индексу.

Однако более привлекательно соединять точки ограниченными цепочками, т.е. общая длина $d = -(K.C)$ или $d = -(K + B.C)$ в лог-версии (соответственно d') цепочки C ограничена. Точнее, ограничено число m (соответственно m') компонент цепочки C и степень ее компонент d (соответственно $d' = d$) для общих двух точек (ср. [3, определение 5.1]). (В таком варианте данный вопрос обобщается на слабые многообразия лог-Фано теоремы 2.) Например, $m \leq 2n - 1$ (соответственно $m' \leq n$) и $d \leq 2n$? (Заметим, что общая длина тогда не превосходит $4n^2 - 2n$; соответственно $2n^2$, что отвечает неособому случаю.) Случай поверхностей хорошо известен: $m \leq 3$ ($m' \leq 2$) и $d \leq 3$. Для трехмерий $m \leq 5$ ($m' \leq 3$) и d ограничено константой. Какой? Автору пока не известно. Известно лишь, что почти всегда (по-видимому с точностью до ограниченного семейства) $d \leq 6$. Последнее далеко не тривиально и заслуживает специального рассмотрения, вероятно в одном из последующих писем. Доказательство использует помимо СГЛМ технику дополнений и формулу присоединений для расслоений Фано.

В неособом случае ограниченность $d \leq n + 1$ известна по деформационным методам Мори [16]. Это влечет и существование ограниченных неприводимых кривых в неособом случае [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Большая часть утверждений верна над произвольным (не алгебраически замкнутым) основным полем k , если под цепочкою рациональных кривых понимать кривую $C \subseteq X$, определенную над k , для которой ее алгебраическое замыкание $C_{\bar{k}}$ таково.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В размерности ≤ 2 можно опускать предположение 1) теоремы 1; то же самое в размерности 3 и характеристике $\neq 2, 3$ и 5 по Абьянку [17].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Shokurov V. V. Letters of a bi-rationalist. I. A projectivity criterion // Cont. Math. 1997. V. 207. P. 143–152.
- [2] Манин Ю. И. Кубические формы. М.: Наука, 1972.
- [3] Campana F. On twistor spaces of the class C // J. Diff. Geometry. 1991. V. 33. P. 541–549.
- [4] Kollár J., Miyaoka Y., Mori S. Rationally connected varieties // J. Algebraic Geometry. 1992. V. 1. P. 429–448.

- [5] Campana F. Connexité rationnelle des variétés de Fano // Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 1992. V. 25. P. 539–545.
- [6] Campana F. Un théorème de finitude pour les variétés de Fano suffisamment uniréglées // Preprint, 1996.
- [7] Шокуров В. В. Трехмерные логперестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. С. 105–203.
- [8] Shokurov V. V. Anticanonical boundedness for curves. Appendix to V. V. Nikulin “Hyperbolic reflection group methods and algebraic varieties” // Higher Dimensional Complex Varieties. Proceedings of the International Conference held in Trento, Italy (June 15–24), 1994. P. 321–328.
- [9] Shokurov V. V. 3-fold log models // J. Math. Sciences. 1996. V. 81. P. 2667–2699.
- [10] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
- [11] Kollár J. et al. Flips and abundance for algebraic threefolds. Astérisque. V. 211, 1992.
- [12] Colliot-Thélène J.-L. Arithmétique des variétés rationnelles et problèmes birationnelles // Proc. Int. Conf. Math. 1986. P. 641–653.
- [13] Kollár J. Higher direct images of dualizing sheaves // Ann. of Math. 1986. V. 123. P. 11–42.
- [14] Katsura T. Theorem of Luroth and related topics // Algebraic Geometric Seminar. Singapore: World Scientific, 1987. P. 41–52.
- [15] Birch B. J., Swinnerton-Dyer H. P. F. The Hasse problem for rational surfaces // J. Reine Angew. Math. 1975. V. 274. P. 164–174.
- [16] Mori S. Projective manifolds with ample tangent bundles // Ann. Math. 1979. V. 110. P. 593–606.
- [17] Аббянкар Ш. Ш. On the problem of resolution of singularities // Тр. Международного Конгресса математиков. М., 1966. С. 469–481.

Математический институт им. А. В. Стеклова РАН

Поступило

25.05.1997

Исправленный вариант

04.02.1999