Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Иванов, Q -преобразования и Q -эквивалентность, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 783–785

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm998>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 11:31:09

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Q -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И Q -ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

С. Г. Иванов

Обобщенными нильсеновскими преобразованиями генетического кода группы называются нильсеновские преобразования списка соотношений и сопряжения соотношений любыми словами в образующих кода [1]. Конечная последовательность обобщенно нильсеновских преобразований кода называется Q -преобразованием [2]. Два кода называются Q -эквивалентными, если один из них можно преобразовать в другой Q -преобразованием. Q -тривиализацией называется Q -преобразование, преобразующее код в тривиальный код $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \parallel a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Каждое обобщенно нильсеновское преобразование стирает одно соотношение кода и пишет вместо него другое соотношение. Стертое соотношение не запоминается, в этом заключается самое существенное отличие Q -преобразований от преобразований Типе [3].

Знаки “=” и “ $\equiv$ ” будут обозначать соответственно равенство в свободной группе и графическое равенство слов.

Код группы называется *сбалансированным*, если число образующих равно числу соотношений. Пока неизвестно решение следующей проблемы Эндрюса–Кэртиса: всякий ли сбалансированный код единичной группы имеет Q -тривиализацию? Истоки этой проблемы лежат в топологии. В данной заметке мы докажем, что за счет чуть большего использования сопряжений в Q -преобразовании сбалансированного кода единичной группы можно ограничить применение преобразований типа $R_i \rightarrow R_i R_j, i \neq j, R_k \rightarrow R_k$ при $k \neq i$. А именно, преобразование этого типа достаточно применять только тогда, когда несократимое слово R_i имеет вид $R R_j^{-1}$, причем слово R циклически несократимо. Идею доказательства этого замечания подсказывает следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть F – свободная группа, U и $V = S V_1 S^{-1}$ – свободно несократимые слова в свободных образующих группы F , где V_1 циклически несократимо. Если $UV \neq VU$, то существует целое положительное число k такое, что $V^k U V^{-k}$ равно несократимому слову вида $S V_1 W V_1^{-1} S^{-1}$.

Лемма 1 фактически доказана в [3, предложение 2.27].

ЛЕММА 2. Пусть код $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \parallel R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$ определяет единичную группу. Тогда $R_i R_j \neq R_j R_i$ при $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $R_i R_j = R_j R_i$ при некоторых $i \neq j$. Тогда существуют слово R и целые числа k, l такие, что $R_i = R^k, R_j = R^l$. Пусть d – наибольший общий делитель чисел k, l . Пара R^k, R^l Q -эквивалентна паре $R^d, 1$. Следовательно, данный код определяет не единичную факторгруппу по коммутанту. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Два сбалансированных кода единичной группы Q -эквивалентны тогда и только тогда, когда один из них можно преобразовать в другой конечной последовательностью следующих преобразований:

- (1) $R_i \rightarrow R_i^{-1}, R_k \rightarrow R_k$ для $k \neq i$ (обращение);
- (2) $R_i \rightarrow WR_iW^{-1}, R_k \rightarrow R_k$ для $k \neq i$ (сопряжение);
- (3) если несократимое слово R_i имеет вид $RR_j, i \neq j$, и R циклически несократимо, то $R_i \rightarrow R, R_k \rightarrow R_k$ при $k \neq i$ (отсечение).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_i, R_j, i \neq j$, – пара соотношений сбалансированного кода единичной группы. Достаточно доказать, что преобразование $R_i, R_j \rightarrow R_iR_j, R_j$ можно заменить на конечную последовательность обращений, сопряжений и отсечения.

По лемме 2 $R_iR_j \neq R_jR_i$. Пусть $R_j \equiv SVS^{-1}$, где V циклически несократимо. Пусть k – целое положительное число такое, что $R_j^k R_i R_j^{-k}$ равно свободно несократимому слову вида $SVWV^{-1}S^{-1}$. Заменим преобразование $R_i, R_j \rightarrow R_iR_j, R_j$ следующей цепочкой преобразований:

$$\begin{aligned} R_i, R_j &\rightarrow R_j^k R_i R_j^{-k}, R_j = SVWV^{-1}S^{-1}, SVS^{-1} \rightarrow VWV^{-1}, V^{-1} \\ &\rightarrow VW, V^{-1} \rightarrow SVWS^{-1}, SV^{-1}S^{-1} = R_j^k R_i R_j^{1-k}, R_j^{-1} \rightarrow R_iR_j, R_j. \end{aligned}$$

Все преобразования в этой цепочке, кроме $VWV^{-1}, V^{-1} \rightarrow VW, V^{-1}$, являются сопряжениями и обращениями. Это последнее преобразование похоже на отсечение, но, вообще говоря, им не является, так как слово VW может быть циклически сократимым. Слово R_i равно несократимому слову вида PUP^{-1} , где U циклически несократимо. Так как W сопряжено с R_i , то $W \equiv TU_1T^{-1}$, где U_1 – циклический сдвиг U . Мы будем писать U вместо U_1 , а прежнее обозначение U упраздним. Следовательно, VWV^{-1} имеет вид $VTUT^{-1}V^{-1}$, где слово T может быть и пустым. Интересующее нас преобразование имеет вид

$$(4) VTUT^{-1}V^{-1}, V^{-1} \rightarrow VTUT^{-1}, V^{-1}.$$

Докажем, что его можно заменить на конечную последовательность обращений, сопряжений и отсечение одного из следующих трех типов:

- (5) $V_0T_0UT_0^{-1}V_0^{-1}, V_0^{-1} \rightarrow V_0T_0UT_0^{-1}, V_0^{-1}$;
- (6) $AU_0B^{-1}A^{-1}, B^{-1}A^{-1} \rightarrow AU_0, B^{-1}A^{-1}$;
- (7) $DC^{-1}V_0^{-1}C, C^{-1}V_0^{-1}C \rightarrow D, C^{-1}V_0^{-1}C$,

где V_0 и AB – циклические сдвиги слова V , T_0 – конец (возможно, пустой) слова T , U_0 – отрезок слова U , причем $A \neq 1$, если $U_0 = 1$, $DC^{-1}V_0^{-1}C$ – циклический сдвиг слова U и, наконец, слова $V_0T_0UT_0^{-1}, AU_0, D$ циклически несократимы.

Пусть $VTUT^{-1}$ циклически сократимо. Пусть $T \neq 1$. Тогда $V = xV_1, T = xT_1$, где x – некоторая образующая в степени ± 1 . Заменим преобразование (4) следующей цепочкой преобразований:

$$\begin{aligned} VTUT^{-1}V^{-1}, V^{-1} &= xV_1xT_1UT_1^{-1}x^{-1}V_1^{-1}x^{-1}, V_1^{-1}x^{-1} \rightarrow V_1xT_1UT_1^{-1}x^{-1}V_1^{-1}, x^{-1}V_1^{-1} \\ &\rightarrow V_1xT_1UT_1^{-1}, x^{-1}V_1^{-1} \rightarrow xV_1xT_1UT_1^{-1}x^{-1}, V_1^{-1}x^{-1} = VTUT^{-1}, V^{-1}. \end{aligned}$$

Все преобразования в этой цепочке, кроме преобразования

$$(8) V_1xT_1UT_1^{-1}x^{-1}V_1^{-1}, x^{-1}V_1^{-1} \rightarrow V_1xT_1UT_1^{-1}, x^{-1}V_1^{-1},$$

являются сопряжениями и обращениями. Преобразование (8) полностью аналогично преобразованию (4), только вместо V мы имеем в (8) циклический сдвиг V_1 слова V и вместо T – конец T_1 слова T . Если $V_1xT_1UT_1^{-1}$ циклически сократимо и $T_1 \neq 1$, то мы заменим (8) аналогичной вставкой и будем так делать до тех пор, пока не придем к случаю (5) либо пока не исчерпается T .

Пусть $T = 1$. Если VU циклически несократимо, то мы имеем случай (5), T_0 пусто. Если VU циклически сократимо, то возможна такая же вставка: $V = xV_1, U = U_1x^{-1}$

$$\begin{aligned} VUV^{-1}, V^{-1} &= xV_1U_1x^{-1}V_1^{-1}x^{-1}, V_1^{-1}x^{-1} \rightarrow V_1U_1x^{-1}V_1^{-1}, x^{-1}V_1^{-1} \\ &\rightarrow V_1U_1, x^{-1}V_1^{-1} \rightarrow xV_1U_1x^{-1}, V_1^{-1}x^{-1} = VU, V^{-1}. \end{aligned}$$

Если $V_1 U_1$ циклически сократимо и $V_1 \neq 1$, то вместо

$$V_1 U_1 x^{-1} V_1^{-1}, x^{-1} V_1^{-1} \rightarrow V_1 U_1, x^{-1} V_1^{-1}$$

опять возможна такая же вставка и так далее, пока мы не придем к случаю (6), причем в этом случае U_0 будет началом слова U , либо пока не исчерпается слово V или слово U . Концом первой компоненты преобразуемой пары всегда будет циклический сдвиг слова V^{-1} .

Каждая вставка этого типа отнимает одну букву слева от слова V и одну букву справа от слова U . Слова V и U не могут исчерпаться одновременно, так как слово VU несократимо и по отношению к VU этот процесс отнятия букв является циклическим сокращением. Если сначала исчерпается U , то мы придем к случаю (6) с $U_0 = 1$, $A \neq 1$.

Более подробно, если прежде исчерпается U , то слово V имеет вид $U^{-1} V_1$, $V_1 \neq 1$. Так как V циклически несократимо, то слова U и V_1 имеют разные окончания. Слово V_1 представим в виде $LV_2 L^{-1}$, где V_2 циклически несократимо и слово L , возможно, пусто. В этих обозначениях V есть $U^{-1} LV_2 L^{-1}$, указанная в случае (6) циклическая перестановка слова V есть $V_2 L^{-1} U^{-1} L$, A совпадает с V_2 , B есть $L^{-1} U^{-1} L$.

Если прежде исчерпается V (слева), то мы придем к преобразованию

$$(9) U_2 V^{-1}, V^{-1} \rightarrow U_2, V^{-1},$$

где $U_2 V^{-1}$ есть U . Если U_2 циклически несократимо, то, переобозначив U_2 через D и V через V_0 мы получим случай (7) с $C = 1$.

Если U_2 циклически сократимо, то обозначим $V = V_0$, $U_2 = CDC^{-1}$, где D циклически несократимо, и заменим преобразование (9) следующей цепочкой преобразований:

$$CDC^{-1} V_0^{-1}, V_0^{-1} \rightarrow DC^{-1} V_0^{-1} C, C^{-1} V_0^{-1} C \rightarrow D, C^{-1} V_0^{-1} C \rightarrow CDC^{-1}, V_0^{-1}.$$

Слово $DC^{-1} V_0^{-1} C$ несократимо, так как оно является циклической перестановкой циклически несократимого слова U . Поэтому преобразование

$$DC^{-1} V_0^{-1} C, C^{-1} V_0^{-1} C \rightarrow D, C^{-1} V_0^{-1} C$$

является отсечением. Теорема доказана.

Теорема 1 сводит Q -тривиализацию сбалансированного кода единичной группы, составленного из циклически несократимых слов, к чередованию следующих шагов:

(10) замена R_i на $WR_i^{\pm 1} W^{-1}$;

(11) отсечение от $WR_i^{\pm 1} W^{-1}$ циклического сдвига соотношения $R_j^{\pm 1}$ либо соотношения $W_1 R_j^{\pm 1} W_1^{-1}$; в последнем случае слово $WR_i^{\pm 1} W^{-1}$ должно быть циклическим сдвигом слова $R_i^{\pm 1}$ и $W_1 R_j^{\pm 1} W_1^{-1}$ должно быть несократимым подсловом этого циклического сдвига.

После каждого отсечения получается код, все слова которого циклически несократимы. Вся тяжесть отыскания Q -тривиализации сбалансированного кода единичной группы переносится теперь на выбор сопряжений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andrews J. J., Curtis M. L. // Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73. P. 21–28.
2. Hog-Angeloni C., Metzler W., Sieradski A. J. Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory. Cambridge: Univ. Press, 1993.
3. Линдон П., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.