Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, Ограниченность исключительных факторособенностей, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 5, 786–789

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm999>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:08:18

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ФАКТОРОСОБЕННОСТЕЙ

Ю. Г. Прохоров

1. Введение. Настоящая заметка является продолжением работы [1] и посвящена изучению исключительных факторособенностей. Всюду на протяжении заметки основное поле предполагается полем $\mathbb{C}$. Мы будем пользоваться основными понятиями лог-программы минимальных моделей (см. [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (см. [3, 5.6]). Пусть $(X \ni P)$ – нормальная особенность и пусть $D = \sum d_i D_i$ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что пара (X, D) имеет лишь логканонические особенности. Говорят, что пара (X, D) *исключительна*, если существует не более одного дивизора E поля функций $\mathcal{K}(X)$ с дискрепантностью $a(E, D) = -1$. Логканоническая особенность $(X \ni P)$ называется *исключительной*, если пара (X, D) исключительна всякий раз, когда она логканонична.

Мы рассмотрим с точки зрения исключительности один специальный класс особенностей – факторособенности по конечным группам. Эти особенности логтерминальны [2, 20.3.3]. Согласно хорошо известной теореме Шефarda–Тодда–Шевалле (см., например, [4, 4.2.5]) при изучении факторособенностей мы без ограничения общности можем ограничиться группами $G \subset GL_n(\mathbb{C})$, не содержащими отражений (т.е. элементов g таких, что $\text{rk}(g - \text{id}) = 1$). Основной результат настоящей заметки – следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. *Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда множество конечных подгрупп $G \subset GL_n(\mathbb{C})$, не содержащих отражений и таких, что $\mathbb{C}^n/G$ – исключительная ε -логтерминальная особенность, является конечным с точностью до сопряжений.*

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Множество конечных подгрупп $G \subset GL_n(\mathbb{C})$, не содержащих отражений и таких, что $\mathbb{C}^n/G$ – исключительная каноническая особенность, является конечным с точностью до сопряжений.*

Аналогичный результат для гиперповерхностных особенностей получен в [5].

2. Исключительные группы примитивны. В настоящем пункте мы докажем теорему 1.1. Утверждение является следствием предложения 2.1 и классической теоремы Жордана (см. теорему 2.1).

Обозначения. Положим $V := \mathbb{C}^n$. Пусть $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ – конечная подгруппа, не содержащая отражений, и пусть $\pi: V \rightarrow X = V/G$ – морфизм факторизации. Пусть $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$ – раздутье точки 0 и пусть $E := \sigma^{-1}(0)$ – исключительный дивизор. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X} \\ \sigma \downarrow & & f \downarrow \\ V & \xrightarrow{\pi} & X \end{array},$$

где $\tilde{X} := X/G$, и положим $S := \varphi(E)$.

ЛЕММА 2.1. *В принятых обозначениях пусть B – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что пара (X, B) логканонична, но не логтерминальна по Кавамате, и пусть $B' := \pi^* B$. Предположим, что особенность $(X \ni o)$ исключительна. Тогда дискрепантность (см. [2, гл. 2]) дивизора E относительно B' равна $a(E, B') = -1$.*

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS-OPEN, грант № 97-2072, Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01132, и программы ПВНШ, грант № 96-15-96146.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По [2, 20.3] пара (V, B') логканонична, но не логтерминальна по Кавама-те. Так как особенность $(X \ni o)$ исключительна, $a(S, B) = -1$ (см. [1, 2.7]). Следовательно, $a(E, B') = -1$ (см. [2, доказательство 20.3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ – конечная неприводимая подгруппа. Она называется *импримитивной*, если существует нетривиальное разложение $\mathbb{C}^n = \bigoplus_i V_i$ такое, что $g \cdot V_i = V_j$ для всех $g \in G$. В противном случае говорят, что G *примитивна*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (ср. [1, 3.4]). Пусть $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ – конечная подгруппа, не содержащая отражений. Предположим, что особенность $\mathbb{C}^n/G$ исключительна. Тогда группа G примитивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем придерживаться принятых обозначений. Согласно [1, 3.6] представление $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ неприводимо. Предположим, что группа G импримитивна. Пусть $V = \bigoplus_{j=1}^m V_j$ – разложение из определения 2.1 и пусть $G_0 \subset G$ – максимальная нормальная подгруппа такая, что $G_0 \cdot V_j = V_j$ для всех $j = 1, \dots, m$. Пусть H_1 – гиперплоское сечение в $\mathbb{C}^n$, содержащее $V_2 \oplus \dots \oplus V_m$, и пусть $\{H_1, \dots, H_r\}$ – его G -орбита. Положим

$$D := \frac{n}{r} \sum_{i=1}^r H_i.$$

Мы покажем, что пара $(\mathbb{C}^n, D)$ логканонична и неискл. Мы имеем

$$a(E, D) = a(E, 0) - \text{mult}_E(D) = n - 1 - \frac{n}{r} \sum_{i=1}^r \text{mult}_E(H_i) = -1.$$

Если пара $(\mathbb{C}^n, D)$ не логканонична, то пара $(\mathbb{C}^n, \alpha D)$ логканонична, но не логтерминальна по Кавама-те для некоторого $0 < \alpha < 1$. Поэтому $a(E, \alpha D) > -1$. Ясно что, $\alpha D = \pi^* B$ для некоторого $\mathbb{Q}$ -дивизора B на X . По лемме 2.1 имеем $a(E, \alpha D) = -1$; противоречие.

Далее, пусть $\sigma_1: X_1 \rightarrow V$ раздутие V_1 и пусть E_1 – исключительный дивизор. Достаточно показать, что $a(E_1, D) = -1$. Действительно,

$$\begin{aligned} a(E_1, D) &= a(E_1, 0) - \text{mult}_{E_1} D = n - \dim V_1 - 1 - \frac{n}{r} \sum_{H_i \supset V_1} \text{mult}_{E_1}(H_i) \\ &= n - \frac{n}{m} - 1 - \frac{n}{r} (\text{Card}\{i \mid H_i \supset V_1\}) = n - \frac{n}{m} - 1 - \frac{n(m-1)}{m} = -1, \end{aligned}$$

где

$$\text{Card}\{i \mid H_i \supset V_1\} = \frac{1}{m} \text{Card}\{(i, j) \mid H_i \supset V_j\} = \frac{r}{m} \text{Card}\{j \mid H_1 \supset V_j\} = \frac{r(m-1)}{m}.$$

Таким образом, мы построили логканоническую границу D на V и, по крайней мере, два дивизора E, E_1 с дискрепантностями, что противоречит исключительности. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. В условиях предложения 2.1 любая нормальная абелева группа $A \subset G$ содержится в центре G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathbb{C}^n = \bigoplus_i V_i$ – разложение в сумму максимальных собственных подпространств для группы A , то оно является импримитивным разложением для G .

Согласно следующей классической теореме число примитивных групп в каждой фиксированной размерности ограничено с точностью до сопряжений и добавлений скалярных матриц.

ТЕОРЕМА 2.1 (Жордан [6]). *Существует функция $J: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что всякая конечная подгруппа $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ обладает нормальной абелевой подгруппой, индекс которой не превосходит $J(n)$.*

Таким образом, для того чтобы закончить доказательство теоремы 1.1, мы должны показать, что порядок N центра $Z(G)$ группы G ограничен константой, зависящей от ε и n . Это может быть сделано с использованием аргументов [1, доказательство 3.15]. Для удобства читателя мы воспроизведем эти соображения. Разложим морфизм π как $\pi: V \xrightarrow{\pi_1} X'' \xrightarrow{\pi_2} X$, где $X'' := V/Z(G)$. Тогда $-1 + \varepsilon < \text{discr}(X) \leq \text{discr}(X'')$ (см., например, [2, 20.3]). Торическая особенность X'' может быть разрешена при помощи единственного раздутия, задающего исключительный дивизор с дискрепантностью $-1 + n/N$. Следовательно, $-1 + \varepsilon < -1 + n/N$. Таким образом, $N < n/\varepsilon$, что и доказывает теорему.

3. Следствия. Следующее утверждение дает дополнительные ограничения на группы, факторы по которым – исключительные особенности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 (ср. [1]). *Пусть $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ – малая конечная подгруппа такая, что факторособенность $\mathbb{C}^n/G$ исключительна. Тогда G не имеет полуинвариантов степени $\leq n$.*

Напомним, что многочлен $\zeta \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ называется *полуинвариантом* группы $G \subset GL_n(\mathbb{C})$, если существует характер $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ такой, что $g \cdot \zeta = \chi(g)\zeta$ для всех $g \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используются принятые в п. 2 обозначения. Предположим, что G имеет *однородный* инвариант ζ степени $d \leq n$. Положим $F := \{x \in \mathbb{C}^n \mid \zeta(x) = 0\}$. Возьмем $\alpha \in \mathbb{Q}$ такой, что $K_V + \alpha F$ максимально логканоничен. Согласно [1, 2.6] достаточно показать, что $\alpha = 1$. Предположим, что $\alpha < 1$. Имеем

$$K_{\bar{V}} = \sigma^* K_V + (n-1)E, \quad \bar{F} = \sigma^* F - dF,$$

где $d = \deg F = \text{mult}_0(F) \leq n$. Это дает нам

$$\sigma^*(K_V + \alpha F) = K_{\bar{V}} + \alpha \bar{F} + (\alpha d + 1 - n)E.$$

Следовательно, $a(E, \alpha F) = -(\alpha d + 1 - n) > -1$. С другой стороны, по лемме 2.1 $a(E, \alpha F) = -1$, противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В [1] было доказано, что обратная импликация имеет место при $n \leq 3$. Пример ниже показывает что это неверно в высших размерностях.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{C})$ – бинарная группа икосаэдра. Рассмотрим подгруппу

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A, B \in \Gamma \right\} \subset SL_4(\mathbb{C}).$$

Тогда особенность $\mathbb{C}^4/G$ неисклительна (поскольку представление $G \hookrightarrow SL_4(\mathbb{C})$ приводимо [1, 3.6]). С другой стороны, кольцо инвариантов представляется в виде

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]^G \simeq \mathbb{C}[x_1, x_2]^\Gamma \otimes \mathbb{C}[y_1, y_2]^\Gamma.$$

Так как Γ не имеет полуинвариантов степени ≤ 4 (см. [4, 4.5.5]), это же верно и для G .

В заключение мы покажем, что при каждом фиксированном n существует лишь конечное число типов исключительных особенностей $\mathbb{C}^n/G$.

ЛЕММА 3.1. *Пусть $G, G' \subset GL_n(\mathbb{C})$ – конечные подгруппы, не содержащие отражений и такие, что их образы в $PGL_n(\mathbb{C})$ совпадают. Тогда исключительность особенностей $\mathbb{C}^n/G$ и $\mathbb{C}^n/G'$ эквивалентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях п. 2 имеем $K_{\tilde{V}} + E = \varphi^*(K_{\tilde{X}} + S)$. Следовательно, пара $(\tilde{X}, S)$ чисто логтерминальна [2, 20.3]. В [7] было доказано, что исключительность $\mathbb{C}^n/G$ определяется парой (S, Diff_S) , причем в нашей ситуации Diff_S находится из формулы ветвления $\varphi|_E^*(K_S + \text{Diff}_S) = K_E$. Таким образом, пара (S, Diff_S) полностью задается действием группы $G/(G \cap \mathbb{C}^*)$ на $E = \mathbb{P}(V)$ и не зависит от добавления скалярных матриц.

Используя лемму 3.1, из предложения 2.1 и теоремы 2.1 получаем.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Множество конечных подгрупп $G \subset GL_n(\mathbb{C})$, не содержащих отражений и таких, что $\mathbb{C}^n/G$ – исключительная особенность, является конечным с точностью до сопряжений и скалярных умножений.*

Исключительные факторособенности в размерности $n \leq 3$ классифицированы [1]. При $n \geq 4$ вопрос остается открытым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Markushevich D., Prokhorov Yu. G. // Amer. J. Math. 1999. V. 121. № 6. P. 1179–1189.
2. Kollár J. Flips and abundance for algebraic threefolds // Summer Seminar at the University of Utah (Salt Lake City, 1991). Astérisque. V. 211. Paris, 1992.
3. Шокуров В. В. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–203.
4. Спрингер Т. Теория инвариантов. М.: Мир, 1981.
5. Ishii S., Prokhorov Yu. G. Hypersurface exceptional singularities // <http://xxx.lanl.gov/abs/math/9910123>, 1999.
6. Jordan C. Traité des substitutions des equations algebriques. Paris, 1870.
7. Prokhorov Yu. G. // Proc. of Conf. in Memory of A. G. Kurosh. Berlin: de Gruyter, 2000. P. 301–317.