



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, О наилучших совместных приближениях,
УМН, 1996, том 51, выпуск 6, 213–214

<https://www.mathnet.ru/rm1033>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:42:15



О НАИЛУЧШИХ СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

Н. Г. Мошевитин

1. Введение и формулировки.

Рассматривается набор вещественных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$. *Наилучшим совместным приближением* (сокращенно н.п.) к набору α называется целая точка $\zeta = (p, a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$ такая, что

$$D(\zeta) = \max_{j=1, \dots, s} |p\alpha_j - a_j| < \max_{j=1, \dots, s} |q\alpha_j - b_j|, \\ \forall q: 1 \leq q \leq p; \quad \forall (b_1, \dots, b_s) \in \mathbb{Z}^s \setminus \{(a_1, \dots, a_s)\}.$$

Всюду далее в этом пункте все α_j иррациональны. Все н.п. к α можно расположить в виде бесконечной последовательности $\zeta^\nu = (p^\nu, a_1^\nu, \dots, a_s^\nu)$, $\nu = 1, 2, \dots$, так, что $p^1 < \dots < p^\nu < p^{\nu+1} < \dots$ и $D(\zeta^1) > \dots > D(\zeta^\nu) > D(\zeta^{\nu+1}) > \dots$. Положим

$$M_\nu[\alpha] = \begin{pmatrix} p^\nu & a_1^\nu & \dots & a_s^\nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{\nu+s} & a_1^{\nu+s} & \dots & a_s^{\nu+s} \end{pmatrix}$$

и через $\text{rk } M_\nu[\alpha]$ будем обозначать ранг квадратной матрицы $M_\nu[\alpha]$. Определим натуральное число $R(\alpha)$, $2 \leq R(\alpha) \leq s+1$, из условия

$$R(\alpha) = \min \{ n : \text{найдется решетка } \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^{s+1}, \dim \Lambda = n \\ \text{и натуральное } \nu_0 \text{ такое, что } \zeta^\nu \in \Lambda \quad \forall \nu > \nu_0 \}.$$

Величина $\dim_{\mathbb{Z}} \alpha$ определяется как максимальное количество чисел $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}$, которое можно выбрать из набора $(\alpha_0 = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^{s+1}$ так, чтобы они были линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $s = 1$. Тогда для любого ν выполнено $\det M_\nu[\alpha] = \pm 1$ (т.е. $\text{rk } M_\nu[\alpha] = 2 \quad \forall \nu$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. При произвольном $s \geq 1$ выполнено $R(\alpha) = \dim_{\mathbb{Z}} \alpha$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $s = 2$ и α_1, α_2 линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Z}$. Тогда найдется бесконечно много натуральных ν таких, что $\text{rk } M_\nu[\alpha] = 3 = \dim_{\mathbb{Z}} \alpha$ (т.е. для бесконечно многих ν выполнено $\det M_\nu[\alpha] \neq 0$).

Утверждения 1, 2, 3 общеизвестны и легко проверяются. Следующая теорема представляет собой новый результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $s \geq 3$. Тогда существует континуальное семейство наборов α чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, линейно независимых вместе с единицей над $\mathbb{Z}$, таких, что $\text{rk } M_\nu[\alpha] \leq 3 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$. (В частности, для всех ν выполнено $\det M_\nu[\alpha] = 0$, хотя $\dim_{\mathbb{Z}} \alpha = s+1$.)

Замечания. 1) Сформулированная теорема представляет собой контрпример к гипотезе Лагариса [1].

2) На возможность получения результатов типа данной теоремы автору указал Н. П. Долбилин. В связи с этим автор предлагает называть конструкцию из доказательства теоремы *спиралью Долбилина*.

3) Аналогичные результаты для *линейных форм* наименее уклоняющихся от нуля были получены автором в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00378).

2. Лемма.

Рассматривается евклидово пространство $\mathbb{R}^{s+1}$, отнесенное к декартовой системе координат $(x, y_1, \dots, y_s)$. Через ℓ мы будем обозначать луч, исходящий из начала координат в полупространство $x > 0$. Для луча ℓ и положительного числа ε конус $K_\varepsilon(\ell)$ определим состоящим из всех лучей ℓ' таких, что угол между ℓ и ℓ' меньше ε . Для точки ξ из полупространства $x > 0$ обозначим $\ell(\xi)$ луч $[0; \xi)$. Будем называть плоскость $\pi \subseteq \mathbb{R}^{s+1}$ *вполне рациональной*, если содержащаяся в ней решетка $\Lambda = \pi \cap \mathbb{Z}^{s+1}$ такова, что $\dim \Lambda = \dim \pi$. Наилучшим приближением к лучу ℓ с направляющим вектором $(1, \beta_1, \dots, \beta_s)$ мы будем называть точку $\zeta \in \mathbb{Z}^{s+1}$, являющуюся н.п. к набору β в смысле, определенном выше. Если считать, что β_j при каждом j не есть полуцелое число, то последовательность н.п. $\zeta^\nu = (p^\nu, a_1^\nu, \dots, a_s^\nu), p^1 < \dots < p^\nu < p^{\nu+1} < \dots$ к лучу ℓ (конечная или бесконечная, в зависимости от того, имеется ли на луче ℓ целая точка, отличная от начала координат, или нет) определена однозначно, и мы будем обозначать ее $\mathcal{B}(\ell) = \{\zeta^1, \zeta^2, \dots, \zeta^\nu, \dots\}$. Также мы будем использовать обозначение $\mathcal{B}_k^t(\ell) = \{\zeta^k, \zeta^{k+1}, \dots, \zeta^t\}$.

ЛЕММА. Пусть $\Lambda = \mathbb{Z}^{s+1} \cap \pi$ – решетка во вполне рациональной плоскости π размерности $\dim \pi \geq 2$. Пусть $\zeta \in \Lambda$ – целая точка такая, что

$$\mathcal{B}(\ell(\zeta)) = \{\zeta^1, \zeta^2, \dots, \zeta^\tau, \dots, \zeta^t\},$$

$\zeta^t = \zeta$, и, кроме того, $\mathcal{B}_\tau^t(\ell(\zeta)) = \{\zeta^\tau, \dots, \zeta^t\} \subset \Lambda \subset \pi$. Пусть, вдобавок, $D(\zeta^\tau) < D(\xi)$ для любой целой точки ξ , не принадлежащей плоскости π . Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого луча $\ell' \subset K_\varepsilon(\ell)$ выполняется 1) $\mathcal{B}(\ell') \supset \mathcal{B}(\ell)$; 2) последовательность н.п. к лучу ℓ' , расположенных между приближениями ζ^τ и ζ^t (содержащая по крайней мере все приближения из $\mathcal{B}_\tau^t(\ell(\zeta))$) целиком лежит во вполне рациональной плоскости π .

Доказательство леммы основано на следующих соображениях.

1. При небольшом шевелении ℓ' луча ℓ начальные н.п. к ℓ остаются н.п. и к ℓ' , хотя кроме этих наилучших приближений, вообще говоря, могут появиться новые наилучшие приближения.

2. Небольшое шевеление луча ℓ не позволяет появиться между приближениями ζ^τ и ζ^t наилучшим приближениям, не находящимся во вполне рациональной плоскости π .

3. Схема доказательства теоремы.

3.1. Многократно применяя лемму, строим вполне рациональные плоскости $\pi_1, \rho_1, \pi_2, \rho_2, \dots, \pi_s, \rho_s$ размерностей $\dim \pi_j = 2$, $\dim \rho_j = 3$ и луч $\ell = \ell(\zeta)$, $\zeta \in \pi_s$, так, чтобы, во-первых, $\pi_j, \pi_{j+1} \subset \rho_j$, во-вторых,

$$\mathcal{B}(\ell) = \{\zeta^1, \dots, \zeta^{\tau_1}, \zeta^{\tau_1+1}, \dots, \zeta^{t_1}, \zeta^{t_1+1}, \dots, \zeta^{\tau_2}, \dots, \zeta^{\tau_s+1}, \dots, \zeta^{t_s}\},$$

где $\zeta^{t_s} = \zeta$, $t_0 = 1$, причем $t_j - \tau_j \geq s + 1$, $\tau_j - t_{j-1} \geq s + 1 \quad \forall j$ и $\zeta^{\tau_j+1}, \dots, \zeta^{t_j} \in \pi_j \quad \forall j$, $\zeta^{t_j+1}, \dots, \zeta^{\tau_{j+1}} \in \rho_j \quad \forall j$, и, в-третьих, $\mathcal{B}(\ell)$ (равно как и объединение $\bigcup_{j=1}^s \rho_j$) не лежало бы ни в каком s -мерном подпространстве пространства $\mathbb{R}^{s+1}$.

3.2. Многократно применяя процедуру пункта 3.1, строим последовательность лучей $\ell^k = \ell(\xi^k)$, $\xi^k \in \mathbb{Z}^{s+1}$, $k = 1, 2, \dots$, так, что для каждого луча ℓ^k множество н.п. $\mathcal{B}(\ell^k)$ состоит из k штук подряд идущих блоков, каждый из которых обладает свойствами, описанными выше в пункте 3.1.

Предельный луч для последовательности лучей ℓ^k и будет задавать числа, удовлетворяющие условию теоремы: все наборы подряд идущих $s + 1$ н.п. для них в силу построения и леммы будут лежать в некоторых дву- или трехмерных плоскостях, а утверждение 2 и опять же процедура построения обеспечивают линейную независимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Lagarias J. S. // Pac. J. Math. 1982. V. 102. № 1. P. 61–88. [2] Мошевитин Н. Г. О геометрии наилучших приближений // Докл. РАН. (в печати).