Международный семинар “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” (пятнадцатая сессия совместных заседаний семинара им. И. Г. Петровского и Московского математического общества 19–22 января 1993 года), *УМН*, 1993, том 48, выпуск 4, 171–226

1993 г. июль — август *т. 48, вып. 4(292)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ» (пятнадцатая сессия совместных заседаний семинара им. И.Г.Петровского и Московского Математического Общества 19–22 января 1993 года)

Международный семинар проводился как пятнадцатая традиционная сессия семинара им. И.Г. Петровского и Московского Математического Общества, посвящённая 92-летию со дня рождения И.Г. Петровского. Организаторами этой конференции выступили Московский государственный университет, Московское математическое общество и кафедра дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ. Сессия открылась 19 января 1993 г. в здании МГУ на Воробьевых горах.

В работе сессии приняло участие более 300 человек, было заслушано и обсуждено более 190 докладов, их них 60 докладов сделали участники из стран СНГ и стран ближнего зарубежья. Темы докладов охватывали широкий круг проблем теории уравнений с частными производными, обыкновенных дифференциальных уравнений, спектральной теории операторов, теории вероятностей, математической физики и алгебраической геометрии.

Утреннее заседание 19 января 1993 г.

1. Заседание открыла председатель Оргкомитета Сессии академик РАН О.А. Олейник. От имени Оргкомитета она приветствовала участников конференции.

Со вступительным словом к участникам конференции обратился ректор МГУ профессор В.А. Садовничий. Он сказал, что по его мнению открывающаяся сессия – это уникальное явление, единственное в наше время в России. Это чудо, которое соединяет более двухсот ученых со всех концов России, а также стран СНГ и ближнего зарубежья. Оно проходит в МГУ уже в пятнадцатый раз благодаря самоотверженным усилиям сотрудников кафедры дифференциальных уравнений мех.-мат. факультета МГУ. Успех в проведении этих совместных сессий достигнут верным выбором стиля в работе Оргкомитета. Несомненно влияние на работу этих сессий личности И.Г. Петровского, весьма разностороннего математика и человека. Известен его глубокий интерес к разнообразным проблемам науки и жизни. Московский университет рад приветствовать в своих стенах всех участников сессии. Будьте как дома. Мы готовы и впредь оказывать любое содействие в проведении совместных заседаний семинара им. И.Г. Петровского и ММО.

С приветствием к участникам семинара обратился Президент РАН академик Ю.С. Осипов. Он сказал, что нас всех соединила здесь не только математика, но и личность Ивана Георгиевича Петровского. Он был горячим поборником единения вузовской и академической науки. Этой цели прекрасно служат совместные заседания семинара им. И.Г. Петровского и ММО, проводимые уже в пятнадцатый раз подвижническими усилиями сотрудников кафедры дифференциальных уравнений и ее заведующей Ольги Арсеньевны Олейник. Российская академия наук, как и в прошлом, будет оказывать и в будущем всяческое содействие в проведении этих традиционных научных форумов.

Об истории совместных заседаний рассказала О.А.Олейник. Первая Международная конференция была проведена в 1976 г. Она была приурочена к 75-летию со дня рождения И.Г. Петровского и прошла весьма успешно при участии большого числа выдающихся математиков из многих стран. Проводимые нами конференции не посвящены одной области математики, они посвящены всем тем ее разделам, в которые И.Г. Петровский внес существенный вклад: дифференциальные уравнения, теория вероятностей, алгебраическая геометрия, математическая физика.

В 1991 г. мы провели в рамках совместных заседаний широкую международную конференцию с приглашением многих выдающихся ученых из разных стран. Она была посвящена 90-летию со дня рождения И.Г. Петровского.

На нашей конференции, как и на предшествовавших, представлены различные разделы математики. Отбор докладчиков мы старались проводить очень демократично: отобрано более 190 докладов. Заседания должны стимулировать работу ученых, способствовать их творческой активности, в особенности молодых ученых. Это является одной из основных целей проводимых нами заседаний.

Иван Георгиевич всю жизнь стремился к развитию контактов между различными областями математики и ее приложений, а также между различными научными школами. В последние годы своей жизни совместно с И.М. Лифшицем он вел семинар, посвященный математическим проблемам теоретической физики. Он считал чрезвычайно важными контакты математиков с механиками и физиками, представителями других областей естествознания. Поэтому мы стараемся приглашать на пленарные доклады крупнейших ученых, представителей естественных наук.

Мы ставим своей целью расширение контактов с самыми различными научными школами. Всякая ограниченность контактов вредна и противоречит самому духу науки. Мы приветствуем ученых, приехавших на наши заседания из Азербайджана, Белоруссии, Казахстана, Латвии, Молдовы, Украины, Узбекистана и других стран, а также со всех концов России. Благодарим всех участников Конференции, преодолевших трудности дальней дороги и приехавших на наши заседания.

Большое число участников Конференции, множество интереснейших докладов показывает, что наша наука живет и развивается. И скоро, несмотря на все потери, наша наука достигнет прежних передовых позиций, так как таланты народов России неисчерпаемы, и это показывает наша Конференция.

Далее состоялись пленарные доклады:

1. Ю.С. Осипов "Обратные задачи теории дифференциальных уравнений";
2. Б.Б. Кадомцев "Сложные физические системы"

Ниже публикуются подготовленные авторами резюме докладов, прочитанных на заседаниях.

Секция "Уравнения с частными производными"

Абдуллаев У.Г. (Баку) *"Неограниченные решения нелинейных параболических уравнений"*

Основные результаты доклада опубликованы в [1]–[3].

[1] Абдуллаев У.Г. О неограниченных решениях нелинейного уравнения теплопроводности со стоком // ЖВМ и МФ. 1992. Т. 32. №8. С. 1244–1257. [2] Абдуллаев У.Г. О существовании неограниченных решений нелинейного уравнения теплопроводности со стоком // ЖВМ и МФ. 1993. Т. 33. №2. С. 232–245. [3] Абдуллаев У.Г. О локализации неограниченных решений нелинейного уравнения теплопроводности с переносом // ДАН. 1993 (в печати).

Асланов Г.И. (Баку) *"О разрешимости и асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве"*

Пусть $H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_m$ – семейства гильбертовых пространств, причем все вложения компактные.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha D^\alpha u = f(x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $f(x) \in H_0, u(x) \in H_m, D^\alpha u \in H_{m-|\alpha|}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_n$, $A_\alpha : H_{m-|\alpha|} \to H_0$ – линейные ограниченные операторы. Через $R(\lambda)$ обозначим оператор

$$R(\lambda) = \left[\sum_{|\alpha| \le m} (i\lambda)^\alpha A_\alpha \right]^{-1},$$

действующий из H_0 в H_m.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет решение из* H_m *при любом* $f(x) \in H_0$ *тогда и только тогда, когда* $R(\lambda)$ *существует при всех* $\lambda \in R^n$ *и*

$$(2) \qquad \|R(\lambda)\|_{H_0 \to H_{m-j}} \le c(1 + |\lambda|)^{j-m}, \qquad j = 0, 1, \dots, m,$$

$c = \mathrm{const}$ *от* λ *не зависит. При этом* $\|u(x)\|_{H_m} + \|u(x)\|_{H_0} \le c\|f(x)\|_{H_0}$.

Теорема 2. *Если* $R(\lambda)$ *аналитична в области* $|\mathrm{Im}\,\lambda_k| \le c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $c_k > 0$ *и в этой области имеет место неравенство* (2), *а* $\|f(x)\|_{H_0} c' e^{-c''|x|}$, $u(x) \in H_0$, *то* $e^{a|x|} u(x) \in H_m$, *где* a *определяется только числами* $c_k (k = 1, 2, \dots, n)$, c' *и* c''

Атласов И.В., Крейн С.Г. *"Интерполяция линейных трасформаторов"*

Интерполяционным функтором называется функтор, действующий из категории банаховых пар A_0, A_1 в категорию банаховых пространств, промежуточных между пространствами A_0 и A_1 с естественными морфизмами. Простейшими из таких функторов являются функторы пересечения и суммы пространств пары. Имеется множество функторов сложной структуры, имеющие приложения в различных разделах анализа. Пусть M – фиксированное банахово пространство. Через $\frac{A}{M}$ $\left(\frac{M}{A}\right)$ обозначается пространство всех линейных ограниченных операторов из M в A (из A в M). Эти пространства называются *операторными* (верхними и нижними соответственно).

Нашей целью является проследить как действуют те или иные интерполяционные функторы на пару операторных пространств. При этом исследовании существенную роль играют пары, называемые здесь дополняемыми: пара A_0, A_1 называется *дополняемой*, если подпространство пространства $A_0 \times A_1$, состоящее из всех элементов вида $(z, -z)$, где $z \in A_0 \cap A_1$, дополняемо в $A_0 \times A_1$. Для простейших функторов

$$\frac{A_0}{M} \cap \frac{A_1}{M} = \frac{A_0 \cap A_1}{M},$$

для регулярной пары

$$\frac{M}{A_0 + A_1} = \frac{M}{A_0} \cap \frac{M}{A_1}.$$

Для дополняемых пар

$$\frac{A_0 + A_1}{M} = \frac{A_0}{M} + \frac{A_1}{M}.$$

Для регулярных дополняемых пар

$$\frac{M}{A_0 \cap A_1} = \frac{M}{A_0} + \frac{M}{A_1}.$$

Основной целью работы является изучение функторов средних и констант на операторных пространствах. Одним из результатов является следующий:

Теорема. *Пусть* A_0, A_1 *– банахова пара,* B_0, B_1 *– регулярная банахова пара,* F_0, F_1 *– пространства* L_∞ *с весами,* E_0, E_1 *– пространства* L_1 *с весами, если* $e \equiv 1 \in E_0' + E_1'$, $e \in F_0 + F_1$ *– банаховы пары* $F_0(A_0), F_1(A_1)$ *и* $E_0(B_0), E_1(B_1)$ *дополняемы. Функтор* $[\cdot,\cdot]^K_{E_0' E_1'}$ *регулярен. Тогда справедлив изоморфизм*

$$\left[\left[\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_0} \right]^K_{F_0 F_1}, \left[\frac{A_0}{B_1}, \frac{A_1}{B_1} \right]^K_{F_0 F_1} \right]^K_{E_0' E_1'} = \frac{[A_0, A_1]^K_{F_0 F_1}}{[B_0 B_1]^J_{E_0 E_1}}.$$

Бадерко Е.А. *"О потенциале простого слоя в решении задачи Дирихле"*

Пусть $\Omega \subset R^3$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Рассматривается задача Дирихле для уравнения Гельмгольца:

$$(1) \qquad \Delta u - Au = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = \Psi \text{ на } \lambda\Omega,$$

где постоянная $A \geq 0$, функция Ψ принадлежит пространству Гёльдера $C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ $(\alpha \in (0,1))$.

С помощью потенциала простого слоя задача (1) редуцируется к граничному интегральному уравнению первого рода:

$$(2) \qquad \int_{\partial\Omega} \frac{\exp\{-\sqrt{A}|x-y|\}}{4\pi|x-y|}\Phi(y)\,ds(y) = \Psi(x) \quad (x \in \partial\Omega).$$

Теорема. *Для любой $\Psi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ уравнение (2) имеет единственное решение $\Phi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ и справедлива оценка*

$$\|\Phi;\partial\Omega\|^{(0,\alpha)} \leq C\|\Psi;\partial\Omega\|^{(1,\alpha)}.$$

Базалий Б.В., Телеев А.Ф. (Донецк) *"Симметризация и нелинейные нестационарные задачи"*

Для ограниченной области $\Omega \in R^n$, $n \leq 2$, в цилиндре $D_T = \Omega \times (0,T)$ рассматривается задача

$$(1) \qquad u_t = L_i(u) + b(u), \quad i = 1,2; \quad u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega; \quad u(x,0) = u_0(x),$$

где $L_1(u) = \div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $L_2(u) = \Delta(|u|^{m-1}u)$, $b(u) = |u|^{r-1}u$, $r \geq 1$.

Пусть $u^*(\sigma,t)$ – невозрастающая перестановка функции $u(x,t)$ по переменной x и $u^\#(x,t) = u^*(C_n|x|^n,t)$ – ее сферическая симметризация по Шварцу. Пусть $v(x,t)$ – сферически симметричное решение задачи

$$v_t = L_i(v) + b(v), \quad (x,t) =\in \Omega^\# \times (0,T), \quad v(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega^\#; \quad v(x,0) = v_0^\#(x),$$

где $\Omega^\#$ – шар в R^n с центром в нуле и $|\Omega^\#| = |\Omega|$. Тогда для обобщенного решения задачи (1) из класса $C([0,T];L_2(\Omega)) \cap L_p(0,T);\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \cap L_\infty(D_T)$ при $u_0(x) \in L_\infty(\Omega) \cap W_q^1(\Omega)$, $q > \max(2,p)$ для $i = 1$ и соответственно из класса $u \in C([0,T);L_2(\Omega)) \cap L_\infty(D_T)$, $|u|^{m-1}u \in L_2((0,T);\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega))$, $u_0 \in L_\infty(\Omega)$ для $i = 2$ справедлива теорема сравнения (в линейной ситуации см. работы [1], [2]).

Теорема. *При $i = 1$, $1 < p \leq 2$, для почти всех $t \in [0,T)$ выполняется неравенство*

$$\int_0^s u^*(\sigma,t)\,d\sigma \leq \int_0^s v(\sigma,t)\,d\sigma, \qquad s \in (0,|\Omega|].$$

При $i = 1,2$ для $p > 2$ и $m \geq 1$ соответственно выполняются неравенства

$$\|u^*(\cdot,t)\|_{L_p(\Omega\#)} \leq \|v^*(\cdot,t)\|_{L_p(\Omega\#)}$$

при всех $p \in [1,\infty)$.

Из теоремы следует, что во всех указанных случаях

$$\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x,t)| \leq \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega^\#} v(x,t).$$

[1] Alvino A., Trombetti G., Lions P.-L. Comparison results for elliptic and parabolic equations via schwarz symmetrization // Ann. Inst. Henri Poincare 1990. V. 7. №2. P. 37–65.
[2] Mossino J., Rakotoson J. Isoperimetric uneqaulities in parabolic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1986. V. 19. №1. P. 51–73.

Боговский М.Е., Масленникова В.Н. *"Существование слабых решений в целом для системы Навье–Стокса с зависящим от времени разрывом в типе граничных условий"*

Доклад продолжает работу авторов "Об одной краевой задаче с разрывными краевыми условиями в динамике океана под влиянием урагана". ДАН СССР, Т. 318, № 5, 1991.

Изучается математическая модель динамики урагана над поверхностью суши, которая сводится к решению начально-краевой задачи для системы Навье–Стокса в области $Q_T = \mathbb{R}^3_+ \times (0,T]$ с граничными условиями, имеющими разный тип на подмножествах $S_1(t)$ и $S_2(t)$, зависящих от времени так, что $\partial\mathbb{R}^3_+ = S_1(t) \cup S_2(t)$, $t \in [0,T]$; при этом на $S_1(t)$ задается условие прилипания, а на $S_2(t)$ задаются условия Навье вида:

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_3} - Ev_j\right)\Bigg|_{x_3=0} = 0, \quad x' \in S_2(t), \quad t \geq 0, \quad v_3|_{x_3=0} = 0,$$

где E – коэффициент трения воздуха о твердую поверхность. При заданной гладкой эволюции подмножества $S_2(t)$:

$$A^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad S_2(t) = A^t(S_2(0)),$$

где A^t – гладкий по параметру t диффеоморфизм, методом Галёркина доказывается теорема существования обобщенного решения нелинейной задачи в целом. При этом базисные вектор-функции зависят от времени и строятся с помощью заданного диффеоморфизма A^t.

В случае негладкой эволюции подмножества A^t сначала рассматривается линеаризованная система Навье–Стокса, для которой модифицированным методом Галёркина доказывается теорема существования обобщенного решения из некоторого, определенного задачей, функционального пространства, после чего решение нелинейной задачи находится методом итераций. При этом коэффициенты модифицированных галёркинских приближений будут не функциями времени, а числами.

Бокало Н.М. (Львов) *"Задача Фурье с нелокальными граничными условиями для нелинейных параболических уравнений"*

Пусть $Q = (0,1)^k \times \Omega \times (-\infty, T)$, где $0 \leq k \leq n$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-k}$, $0 < T \leq +\infty$. Рассматривается задача

$$u_t - D_i a_i(x,t,\delta u) + a_0(x,t,\delta u) = f(x,t) \quad \text{в } Q, \tag{1}$$

$$u|_{x_i=0} = u|_{x_i=1}, \quad i = 1,\dots,k, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$a_i(x,t,\delta u)|_{x_i=0} = a_i(x,t,\delta u)|_{x_i=1}, \qquad i = 1,\dots,k. \tag{3}$$

Здесь по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n, а дальше – от 0 до n, и приняты обозначения $D_i v = \partial V/\partial x_i, i = 1,\dots,n, D_0 v = v, \delta u = (D_0 u,\dots,D_n u)$. Допустим, что $a_i(x,t,\eta), i = 0,\dots,n,$ – каратеодориевские функции ($\eta = (\eta_0,\dots,\eta_n)$), растущие по η_i как степень $|\eta_i|^{\alpha_{ij}}$, $\alpha_{ij} = p_j/p_i', p_i > 1, p_i' = p_i/(p_i - 1), i = 0,\dots,n$; $f \in L^{p_0'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$. *Обобщенным решением задачи* (1)–(3) назовем функцию $u(x,t) \in L^{p_0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $D_i u \in L^{p_i}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = 1,\dots,n$, которая удовлетворяет условию (2) и соответствующее интегральное тождество для любых $\psi \in C^1(\overline{Q})$ таких, что для них выполнены условия (2) и $\psi = 0$ в окрестности $t = T$ и при достаточно больших $|t|$.

Теорема. *Пусть хотя бы для одного $m \in \{0, k+1,\dots,n\}$ $p_m > 2$ и*

$$(a_i(x,t,\eta) - a_i(x,t,\xi)) \cdot (\eta_i - \xi_i) \geq \lambda(t) \cdot |\eta_m - \xi_m|^{p_m},$$

а также

$$a_i(x,t,\eta) \cdot \eta_i \geq \beta_i(t)|\eta_i|^{p_i} - \gamma(x,t),$$

где $\lambda, \beta_i \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(-\infty,T)$, $\lambda(t) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^0 \lambda(t)\,dt = +\infty$, $\beta_i > 0$, $\gamma \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\gamma \geq 0$. Тогда задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение.

Получены априорные оценки обобщенного решения задачи (1)–(3).

Борок В.М. *"Корректные краевые задачи в слое с интегральным граничным условием"*

С позиций общей теории дифференциальных уравнений с частными производными изучена следующая задача

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}\times[0,Y], \tag{1}$$

$$Au(x,0) + Bu(x,Y) + C\int_0^Y u(x,y)\,dy = u_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

где $P(s)$ – любой полином с постоянными коэффициентами, $Y > 0$, A, B, $C \in \mathbb{C}$, $|A| + |B| + |C| \neq 0$. Свойства решений задачи (1)–(2) во многом определяются расположением нулей целой функции

$$\Delta_Y(s) = A + B\exp\{YP(is)\} + C\big[\exp\{YP(is)\} - 1\big] \;/\; P(is).$$

Определение 1. Задача (1)–(2) называется *корректной*, если для любой функции $u_0(x) \in C^n(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ существует единственное решение $u(x,y)$ задачи (1)–(2) такое, что $u(x,y) \in C^m(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ при каждом $y \in [0,Y]$, причем

$$\sup_{[0,Y]} \|u(x,y)\|_{C^m(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|u_0(x)\|_{C^n(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})} \qquad (\forall m\in\mathbb{N},\ n = n(m)).$$

Определение 2. Условие (2) называется *регулярным*, если для любого уравнения (1) из единственности решения задачи (1)–(2) в классе ограниченных функций следует ее корректность.

Теорема 1. *Задача (1)–(2) корректна тогда и только тогда, когда $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$.*

Теорема 2. *Любое условие (2), кроме условия Коши ($C = AB = 0$), регулярно.*

Установлены также критерии асимптотической корректности задачи (1)–(2) при $Y \to 0$ и при $Y \to \infty$, т.е. ее корректности при всех достаточно малых $Y > 0$ или, соответственно, при всех достаточно больших значениях $Y > 0$.

Борсук М.В. (Львов) *"О разрешимости задачи Дирихле для линейных эллиптических уравнений второго порядка в области с коническими точками"*

Пользуемся обозначениями [1]. В n-мерной области G, ограниченной ляпуновской поверхностью ∂G, содержащей коническую точку O, вблизи которой, она является конической поверхностью Γ_0^d с вершиной в O ($d > 0$ – некоторое число) рассматривается задача Дирихле

$$\begin{aligned} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x), \qquad x\in G;\\ u(x) = \varphi(x), \qquad x \in \partial G, \end{aligned} \tag{1}$$

при условиях: уравнение – равномерно эллиптическое с постоянными эллиптичности $\mu \geq \nu > 0$; $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$; $a_{ij}(0) = \delta_i^j$;

$$\left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|^2\right)^{1/2} \leq \mathcal{A}(|x-y|) \;\; \forall x\in\overline{G}, y\in\partial G;$$

$$|x|\left(\sum_{i=1}^n a_i^2(x)\right)^{1/2} + |x|^2|a(x)| \leq \mathcal{A}(|x|); \;\; a(x)\leq 0, x\in G,$$

$\mathcal{A}(t)$ – неотрицательная монотонно возрастающая, непрерывная по Дини функция, определенная при $t \geq 0$, $\mathcal{A}(0) = 0$; $a_i(x) \in L_n(G)$, $i = 1,\dots,n$; $a(x), f(x) \in L_p(G)$, $\varphi(x) \in V_{p,0}^2(G)$, $p \geq n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2(x)\right)^{1/2} + |a(x)| + |f(x)| + |\varphi_{xx}| \leq kd^{\lambda-2}(x),$$

$x \in G_\varepsilon$ $\forall\varepsilon > 0$, $k \geq 0$, $d(x) = \operatorname{dist}(x; \partial G \setminus O)$, λ определено в [1].

Теорема. *Пусть* $1 < \lambda < 2$; $p \geq n/(2-\lambda)$, $\partial G \setminus \Gamma_0^d \in C^\lambda$ *и выполнены неравенства* (35), (57) [1]. *Тогда задача* (1) *однозначно разрешима в классе* $C^\lambda(\overline{G}) \cap W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(G)$ *и для ее решения справедлива оценка*

$$\|u\|_{C^\lambda(\overline{G})} \leq c\left(n, \nu, \mu, p, \lambda, s, k, k_1, k_2, \|f\|_{p,G}, \|\varphi\|_{V^2_{p,0}(G)}, \int_0^d \frac{\mathcal{A}(t)}{t}dt\right).$$

[1] Борсук М.В. // Матем. сб. 1991. Т. 182. №10. С. 1446–1462.

Бронштейн М.Д. (Казань) *“О задаче Неймана для полулинейных эллиптических уравнений”*

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается задача Неймана

$$(1) \qquad \sum_{i,j} \partial_i a_{ij} \partial_j u + c(x, \partial_j u, u) = \lambda, \qquad \left.\frac{\partial}{\partial n} u\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

где a_{ij} и c – гладкие функции.

В докладе описывается множество значений параметра λ, при которых задача (1) имеет классическое решение. В частности, установлены

Теорема 1. *Пусть с некоторой константой* $M > 0$ *для функции* $c(x, v, u)$ *справедливы неравенства*

$$(2) \qquad -M < c(x,v,u) < M\left(|v|^{\frac{d}{d-1}} + |u|\right)^{1-\frac{1}{M}},$$

$$(3) \qquad c'_u(x,v,u) \leq 0, \qquad \forall (x,v,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^d \times \{u \in \mathbb{R} \mid u < -M\}.$$

Тогда задача (1) *разрешима хотя бы при одном значении* λ.

Теорема 2. *Пусть выполнено неравенство* (2) *и для некоторого интервала* $[a, b]$ *неравенство*

$$\alpha \equiv \min_{u \in [a,b]} \max_{x \in \overline{\Omega}} c(x, 0, u) < \min_{x \in \overline{\Omega}} c(x, 0, a) \equiv \beta.$$

Тогда задача (1) *имеет решение для каждого* $\lambda \in [\alpha, \beta[$.

В случае когда a_{ij}, c *и* Ω *обладают некоторой симметрией, условия* (2) *на рост* c *могут быть ослаблены.*

Доказательства основаны на применении функционалов, содержащих идемпотентное интегрирование в пространствах Маслова.

Бутузов В.Ф. *“О сингулярно возмущенных уравнениях типа “реакция-диффузия-перенос”*

Построены асимптотики погранслойных решений начально-краевой задачи для системы уравнений

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 b_1(x)\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon^m a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -p(x,t)u + q(x,t)v + \varepsilon f_1(x,t,\varepsilon),$$
$$\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^2 b_2(x)\frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon^m a_2(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = k(x)p(x,t)u - k(x)q(x,t)v + \varepsilon f_2(x,t,\varepsilon),$$

$(x,t) \in \Omega = (0 < x < 1) \times (0 < t \leq T)$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $m > 0$, $a_i > 0$, $b_i > 0$, $p > 0$, $q > 0$, $k > 0$. Структура пограничных слоев существенно зависит от величины m. Для целых положительных m различаются четыре случая: $m = 1$, $m = 2$ или 3, $m = 4$, $m \geq 5$. В первых трех случаях пограничные слои в окрестностях $x = 0$ и $x = 1$ имеют одинаковый характер и описываются стандартным погранслойным методом. В четвертом случае (пусть, например, $m = 5$) особенности следующие: пограничный слой в окрестности $x = 0$ имеет два масштаба (погранслойные переменные $\xi = x/\varepsilon$ и $\zeta = x/\varepsilon^2$), а в окрестности $x = 1$ – один масштаб ($\eta = (1-x)/\varepsilon^3$).

Угловой погранслой в окрестности точки $(0,0)$ в отличие от стандартного подхода описывается с помощью погранслойных переменных $\tau = t/\varepsilon$ и $\sigma = (\varepsilon bt - x)/\varepsilon^{5/2}$, $b = b_1(0) = b_2(0)$. Это позволяет построить равномерное в $\overline{\Omega}$ асимптотическое приближение решения с точностью $O(\varepsilon)$. В области с исключенными зонами пограничных слоев построено асимптотическое приближение с произвольной точностью.

Веретенников А.Ю. *"О больших уклонениях для диффузионных процессов"*

Рассматривается однородный d-мерный марковский процесс $(X_t, t \geq 0)$, удовлетворяющий уравнению Ито $dX_t = \sigma(X_t)\,dw_t + b(X_t)\,dt$ с неслучайным начальным значением $X_0 \in E^d$ Здесь σ и b – борелевские функции, $\sigma(x)$ – $d_1 \times d$-мерная матрица, $(d_1 \geq d)$ $b(x)$ – d-мерный вектор, $(w_t, t \geq 0)$ – d_1-мерный винеровский процесс. Функция σ предполагается ограниченной и локально равномерно невырожденной, функция b – локально ограниченной. Пусть $\varphi\colon R^d \to R^l$ – борелевская функция. Изучается асимптотическое поведение процесса $\zeta_t := \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \varphi(X_s)\,ds$, $t \to \infty$. Скажем, что процесс X удовлетворяет условию (F_φ), если для любого $\beta \in R^l$ существует независящий от начального условия предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln E \exp\left(\beta \int_0^t \varphi(X_s)\,ds\right) = G(\beta).$$

Положим $L(\alpha) = \sup\limits_{\beta}(\alpha\beta - G(\beta))$, $\alpha \in R^l$. Говорят, что семейство $(\zeta_t, t \to \infty)$ удовлетворяет принципу больших уклонений с функцией действия L и нормирующим множителем t^{-1}, если для любого $s > 0$ множество $(z \in R^d : L(z) \leq s)$ компактно, для любого открытого множества $A \subset R^l$

$$\liminf_{t\to\infty} t^{-1} \ln P(\zeta_t \in A) \geq -\inf_{\alpha\in A} L(\alpha),$$

и для любого замкнутого множества $B \subset R^l$

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-1} \ln P(\zeta_t \in B) \leq -\inf_{\alpha\in B} L(\alpha).$$

Теорема 1. *Пусть функция φ ограничена и*

$$\limsup_{x\to\infty} \left(b(x), \frac{x}{|x|}\right) \|\sigma\sigma^*(x)\|^{-1} < 0, \qquad \limsup_{x\to\infty} \left(b(x), \frac{x}{|x|}\right) = -\infty.$$

Тогда процесс X удовлетворяет условию F_φ и семейство $(\zeta_t, t \to \infty)$ удовлетворяет принципу больших уклонений с функцией действия L и нормирующим множителем t^{-1}

Вишик М.И., Чепыжов В.В. *"Оценка хаусдорфовой размерности сечений ядер неавтономных уравнений математической физики"*

После исключения давления неавтономная двумерная система Навье–Стокса с зависящей от t внешней силой $\varphi(x,t)$ имеет вид:

$$(1) \qquad \partial_t u = -\nu A u - B(u,u) + \varphi(x,t), \qquad (\nabla, u) = 0, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$u = (u^1, u^2), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \Subset \mathbb{R}^2, \quad -Au = \Pi\Delta u, \quad -B(u,u) = -\Pi \sum_{i=1}^{2} u_i \lambda_i u,$$

Π – оператор проектирования на подпространство H соленоидальных векторных полей: $H = \Pi(L_2(\Omega))^2$. Предполагается, что $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, H)$. *Ядром* K уравнения (1) называется совокупность всех его ограниченных в H полных траекторий u: $K = \{u(\cdot,\cdot) : \|u(\cdot,t)\| \leq M_u, \forall t \in \mathbb{R}\}$. *Сечением* $K(s)$ ядра K называется множество значений траекторий $u \in K$ в момент времени $t = s$: $K(s) = \{u(s) : u(\cdot,\cdot) \in K\}$.

Теорема. *Для любого $s \in \mathbb{R}$ хаусдорфова размерность $K(s)$ в пространстве H удовлетворяет неравенству:*

$$\dim K(s) \leq \left(\frac{C}{\nu^2}\right) M_{-1}\left(|\varphi|^2\right)^{1/2} \tag{2}$$

где

$$M_{-1}\left(|\varphi|^2\right) = \liminf_{T\to+\infty} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} |\varphi(s)|^2_{-1} ds.$$

Константа C в (2) не зависит от ν и от $\tau \in \mathbb{R}$.

Аналогичные оценки размерности сечений $K(s)$ ядер K получены для неавтономной системы уравнений реакции-диффузии и для неавтономного диссипативного гиперболического уравнения с зависящими от t функциями $f(u,t)$ и $\varphi(x,t)$. Кроме того, оценка вида (2) установлена для функционального неавтономного эволюционного уравнения, удовлетворяющего некоторым условиям.

Гладков А.Л. (Витебск) *"Задача Коши в классах растущих функций для уравнений нелинейной теплопроводности с переносом"*

Рассматривается уравнение

$$u_t = (u^\mu)_{xx} + c(u^\nu)_x, \tag{1}$$

где $1 < \nu \leq \mu$, c – положительная постоянная. Для уравнения (1) в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = (0,\infty)\times\mathbb{R}$ изучается задача Коши с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{2}$$

где неотрицательная непрерывная функция $u_0(x)$ может быть неограниченной. Обозначим через K_α класс неотрицательных непрерывных функций $u(t,x)$, для которых выполняются неравенства $u(t,x) \leq a\exp(-cx/\mu)$ при $x < 0$ и $u(t,x) \leq b(1+x)^\alpha$ при $x > 0$ $(a > 0, b > 0)$.

Теорема. *Пусть $\nu = \mu$ и $u_0(x) \in K_\alpha$. Тогда минимальное решение задачи (1), (2) существует в $\mathbb{R}^2_+$ при $\alpha < 1/(\nu-1)$ и в некоторой полосе при $\alpha = 1/(\nu-1)$. В классе функций $v(t,x)$, принадлежащих K_α с $\alpha = 1/(\nu-1)$ и удовлетворяющих неравенству*

$$v(t,x) \leq \varepsilon(x)\exp(-cx/\mu) \qquad \text{при } x < 0,$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, решение задачи (1), (2) является единственным в любой полосе.

Показана точность условий теоремы. Исследуется характер поведения решений при $t \to \infty$. Аналогичные утверждения доказаны для случаев $1 < \nu \leq (\mu+1)/2$ и $(\mu+1)/2 < \nu < \mu$.

Горбачук В.М. (Киев) *"О представлении и асимптотической единственности решений абстрактного параболического уравнения"*

Рассмотрим уравнение

$$(1) \qquad y'(t) + Ay(t) = 0, \quad t \in (0, \infty),$$

где A – генератор голоморфной с углом $\varphi \leq \pi/2$ полугруппы e^{tA} в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Сильно непрерывно дифференцируемая на $(0,\infty)$ вектор-функция $y(t)\colon (0,\infty) \to \mathcal{D}(A)$, удовлетворяющая (1), называется *решением уравнения* (1). Положим

$$(2) \quad C_{(n!)}(A) = \left\{ f \in \bigcap \mathcal{D}(A^n) \mid \forall \alpha > 0\ \exists c = c(\alpha) > 0 : \|A^k f\| \leq c\alpha^k m_k\ (k = 0, 1, 2, \dots) \right\}.$$

На $C_{(n!)}(A)$ введем локально-выпуклую топологию проективного предела банаховых пространств $C_\alpha \langle n! \rangle (A)$, состоящих из всех векторов, удовлетворяющих (2) при фиксированном α, с нормой

$$\|f\|_\alpha = \sup \left(\alpha^{-n} n!^{-1} \|A^n f\| \right).$$

Теорема. *Вектор-функция $y(t)$ является решением уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда*

$$y(t) = e^{-tA} f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k A^k f}{k!}, \qquad f \in C_{(n!)}(A).$$

Если $\|y(t)\| \leq c \exp(at^\beta)$, $\beta < 2^{-1}\pi(\pi - \varphi)^{-1}$ с некоторыми постоянными $a > 0$ и $c > 0$, то $y(t) \equiv g \in \operatorname{Ker} A$

Из теоремы следует, что всякое решение уравнения (1) допускает продолжение до целой функции, причем задача Коши $y(0) = f$, $f \in C_{(n!)}(A)$, для уравнения (1) корректно разрешима в топологии $C_{(n!)}(A)$.

Горбачук М.Л., Горбачук В.И. (Киев) *"Пространства бесконечно дифференцируемых векторов замкнутого оператора и их применение к вопросам аппроксимации"*

Пусть A – замкнутый оператор в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, $\bigcap \mathcal{D}(A^n) = \mathfrak{B}$, и $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неубывающая последовательность положительных чисел. Для $\alpha > 0$ положим

$$C_\alpha \langle m_n \rangle = \{ f \in \bigcap \mathcal{D}(A^n) \mid \exists c > 0 : \|A^k f\| \leq c\alpha^k m_k\ (k = 0, 1, \dots,) \},$$
$$C_{\{m_n\}} = \bigcup C_\alpha \langle m_n \rangle, \quad C_{(m_n)} \bigcap C_\alpha \langle m_n \rangle.$$

Произвольный элемент f пространства $C_{\{1\}}$, соответствующего последовательности $m_n \equiv 1$, называется *вектором экспоненциального типа* оператора A, а число $\sigma = \sigma(f) = \inf \alpha$ по $\alpha\colon f \in C_\alpha \langle 1 \rangle$ – *типом* f. В случае, когда $\mathfrak{B} = L_2([0, 2\pi])$, A – оператор, порожденный выражением $i\, d/dx$ и условием $y(0) = y(2\pi)$, пространство $C_{\{1\}}$ совпадает с множеством всех тригонометрических полиномов. Если же $\mathfrak{B} = L_2(R^1)$, A – минимальный оператор, порожденный выражением $i\, d/dx$, то $C_{\{1\}}$ – множество целых функций экспоненциального типа, суммируемых с квадратом на всей оси.

Предположим, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ – гильбертово пространство, а A – нормальный оператор в нем. Тогда множество $C_{\{1\}}$ плотно в $\mathfrak{H}$. Обозначим

$$\mathcal{E}_r(f) = \inf_{g \in C_{\{1\}}, \sigma(g) < r} \|f - g\|.$$

Теорема. $f \in \bigcap \mathcal{D}(A^n) \iff \forall\alpha > 0 \;\; r^\alpha \mathcal{E}_r(f) \to 0,\; r \to +\infty$; $f \in C_{\{m_n\}}(f \in C_{(m_n)}) \iff \exists\alpha > 0\; \exists c > 0\; (\forall\alpha > 0\; \exists c = c(\alpha) > 0)$: $\mathcal{E}_r(f) \le c\rho^{-1}(\alpha r)$, *где* $\rho(\lambda) = \sup(m_0\lambda^n m_n^{-1})$.

Эта теорема в указанных выше конкретных ситуациях превращается в известные теории приближений теоремы Джексона, Бернштейна и др. Поскольку при $A = A^* \ge 0$ для $f \in C_{\{1\}}$

$$\left\| e^{-At} f - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} f \right\| \le c\alpha^n n!^{-1},$$

теорема позволяет строить полиномиальные приближения задачи Коши для уравнения $y'(t) + Ay(t) = 0$, скорость сходимости которых определяется "гладкостью" начального данного.

Демидов А.С. (Москва), Яценко Е.С. (г. Истра, Моск. обл.) *"Задача о межфазном разделе при тепломассопереносе в капиллярной структуре"*

Частично результаты опубликованы в [1].

[1] Демидов А.С, Яценко Е.С. Математический эксперимент по исследованию тепломассопереноса в зоне испарения тепловых труб // Теплофизика высоких температур. 1992. Т. 3. С. 566–572.

Ивочкина Н.М. (Санкт-Петербург). *"Принцип Дирихле в теории уравнений Монжа–Ампера"*

Основные результаты доклада опубликованы в [1].

[1] Ивочкина Н.М. Принцип Дирихле в теории уравнений Монжа–Ампера // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. №6. С. 131–156.

Ильясов Я.Ш. *"О периодических решениях нелинейных эллиптических уравнений"*

Рассматривается следующая задача

$$(1)\qquad \begin{gathered} -\Delta u(z,x) = g(u(z,x)), \quad (z,x) \in (-l,l) \times \mathbb{R}^n, \quad u \in H^1(-l,l), \\ N \ge 3, \quad 0 < l < +\infty. \end{gathered}$$

По переменной $z \in (-l,l)$ накладываются периодические граничные условия

$$(2)\qquad u(-l,x) = u(l,x), \quad u_z(-l,x) = u_z(l,x) \quad x \in \mathbb{R}^N$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}, \qquad u_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

$H^1(-l,l) \equiv H^1\left((-l,l) \times \mathbb{R}^N\right)$ – соболевское пространство обобщенных функций. Функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ предполагается, что непрерывна, нечетна и удовлетворяет следующим трем условиям:

i) $-\infty < \liminf\limits_{s\to 0} g(s)/s \le \limsup\limits_{s\to 0} g(s)/s = -m < 0$;

ii) $\limsup\limits_{s\to\infty} |g(s)|/|s|^k = 0$, где $k = (N+3)/(N-1)$;

iii) существует такое $\zeta_0 > 0$, что

$$G(\zeta_0) \equiv \int_0^{\zeta_0} g(s)\, ds > 0.$$

Исследуется вопрос существования решений задачи (1), (2) типа ground state – доставляющих среди всех решений этой задачи минимум соответствующего функционала действия. Доказано существование биффуркационной точки $l_0 > 0$ так, что при всех $l > l_0$ существует неотрицательное, сферически симметричное по $x \in \mathbb{R}^N$, убывающее на бесконечности нетривиальное ($u_z \not\equiv 0$) ground state решение (1), (2), а при $0 < l < l_0$ доказано, что существуют только тривиальные ($u_z \equiv 0$) решения ground state.

Кажихов А.В. (Новосибирск) *"Корректность начально-краевых задач для уравнений сжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса"*

Рассматриваются две приближенные модели баротропных движений сжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса: квазистационарная аппроксимация

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0, \qquad \rho = \rho(p), \tag{1}$$
$$\nabla p = \mu\Delta\vec{u} + (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div}\vec{u})$$

и приближение Стокса

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0, \qquad \rho = \rho(p), \tag{2}$$
$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \nabla p = \mu\Delta\vec{u} + (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div}\vec{u}).$$

В классе потенциальных течений, когда

$$\vec{u} = \nabla\varphi, \tag{3}$$

уравнения импульса в (1) и (2) интегрируются и возникают системы для потенциала φ и плотности ρ:

в первом случае

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\nabla\varphi) = 0, \qquad \rho = \rho(p), \tag{4}$$
$$p = (2\mu+\lambda)\Delta\varphi + P_0(t),$$

а во втором

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\nabla\varphi) = 0, \qquad \rho = \rho(p), \tag{5}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + p = (2\mu+\lambda)\Delta\varphi + P_0(t).$$

В данной работе исследуются вопросы существования, единственности и стабилизации решений начально-краевых задач для систем (4) и (5).

Калашников А.С. *"О параболических уравнениях с нелинейностями, исчезающими на бесконечности"*

Доклад посвящен краевым задачам в неограниченных областях для параболических уравнений, содержащих искомые решения под знаками степенных функций с переменными показателями, которые могут стремиться к единице при стремлении аргументов к бесконечности. Сформулируем два типичных результата. Обозначим через $u(x,t)$ ограниченное решение задачи Коши для уравнения $u_t = u_{xx} - q(x)|u|^{p(x,t)}\operatorname{sgn} u$ в полуплоскости $S + \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

где $p \in C^2(S)$, $0 < p(x,t) < 1$, $q \in C^1(\mathbb{R})$, $\inf\limits_{\mathbb{R}} q(x) > 0$, $u_0 \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, $u_0(x) > 0$.

Теорема 1 (о затухании за конечное время). *Пусть $p(x,t) = 1 - \alpha(t)$, $\alpha'(t) \leq 0$, $t\alpha(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$. Тогда существует такое $T > 0$, что $u(x,t) = 0$ при всех $(x,t) \in \mathbb{R} \times [T, +\infty)$.*

Теорема 2 (о мгновенном сжатии носителя). *Пусть выполняются следующие предположения*

1) $p(x,t) = 1 - \beta(x)$;
2) $x\beta'(x) \leq 0$;
3) $\sup\limits_{\mathbb{R}}\{[\beta(x)]^{-2}|\beta'(x)| + [\beta(x)]^{-1}|\beta''(x)|\} < +\infty$;
4) $\sup\limits_{\mathbb{R}}(1+|x|)^m u_0(x) < +\infty$ *для некоторого* $m = \text{const} > 0$;
5) $|x|^m\{\varepsilon q(x)[\beta(x)]^2\}^{1/\beta(x)} \to +\infty$ $(|x| \to +\infty)$ *для любого* $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Тогда при всех достаточно малых $t > 0$ функция $u(x,t)$ финитна по x.

Условия обеих теорем являются точными.

Калита Е.А. (Донецк) *"О существовании фундаментального решения для эллиптических уравнений и систем высокого порядка с разрывными коэффициентами"*

Для квазилинейных эллиптических уравнений и систем произвольного порядка, как дивергентного, так и недивергентного вида, установлены существование и точные двусторонние оценки фундаментального решения при определенных ограничениях, аналогичных условию Кордеса.

в частности, для дивергентного уравнения в $\mathbb{R}^n$

$$(1)\qquad \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha A_\alpha(x, D^m u) = \delta(x-y),$$

где функции $A_\alpha(x,\xi)$ измеримы по x и непрерывны по ξ,

$$\sum_\alpha A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \ge |\xi|^2, \qquad \sum_\alpha |A_\alpha(x,\xi)|^2 \le \lambda|\xi|^2,$$
$$\sum_\alpha \big(A_\alpha(x,\xi) - A_\alpha(x,\eta)\big)(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \ge 0,$$

получен следующий результат.

Теорема. *Пусть* $2 \le m \le \frac{n}{2}$, $1 - \frac{1}{\lambda} < \left(1 - \left(\frac{n-2m}{n-2}\right)^2\right)^m$. *Тогда уравнение* (1) *имеет решение* $u \in W^m_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus y)$ *такое, что*

$$0 < c_1 \le r^{n-2m} \int_{r<|x-y|<2r} \left|D^m u(x)\right|^2 dx \le c_2 \quad \forall r > 0.$$

Канель Я.И. *"Задача Неймана для систем уравнений реакции-диффузии"*

Рассмотрим задачу

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial t}u_i = \lambda_i \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad i = 1, \dots, n, \lambda_i = \mathrm{const} > 0,\ t > 0,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

$$(2)\qquad u_i(0,x) = \varphi_i(x), \quad x \in \Omega, \quad 0 \le \varphi_i \le C.$$

Ω – ограниченная область с гладкой границей,

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial n}u_i = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

$f_i(u)$ – локально непрерывна по Липшицу в $\mathbb{R}^n$, $\varphi_i(x)$ – непрерывны в Ω.

Теорема 1. *Пусть* $n = 2$, $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, Ω *– выпуклая область,*

$$(4)\qquad f_1 = -f_2 = -u_1 f(u_2), \qquad f(s) \ge 0 \quad \text{при } 0 \le s < \infty.$$

Тогда существует единственное решение u_1, u_2 *задачи* (1)–(3) *в* $Q = \Omega \times [0,\infty)$ *и при* $t \to \infty$ $u_1 \to c_1$, $u_2 \to c_2$ *в* $C(\overline{\Omega})$, $c_1 f(c_2) = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $n = 2$ *и выполняются условия* (4) *и*

$$|f(u)| \le K \cdot (1 + |u|^r), \qquad r \text{ – любое, } 1 \le r < \infty.$$

Тогда существует в Q *единственное решение задачи* (1)–(3).

Теорема 3. *Пусть* $f_1 + \dots + f_n = 0$, $f_i \ge 0$ *при* $u_i = 0$, $u_j \ge 0$, $i \ne j$,

$$|f_i(u)| \le K \cdot \left(1 + |u|^{2-\varepsilon}\right),$$

ε *– любое,* $0 < \varepsilon < 1$. *Тогда существует в* Q *единственное решение задачи* (1)–(3).

Карвовский В. (Польша), Кошманенко В.Д. (Киев), Ота С. (Япония) *“Операторы Шрёдингера с сингулярным возмущением сосредоточенным на нуль-множестве”*

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(\Omega, dx)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, изучаются операторы Шрёдингера, заданные формальным выражением

$$H = H_0 + \mu, \quad \operatorname{supp} \mu = N, \ |N| = 0,$$

где $H_0 = -\Delta$ – оператор Лапласа с условием Дирихле на границе, а μ – положительная борелева мера с носителем $N \subset \Omega$, имеющим нулевую лебегову меру. Пусть α-$\operatorname{cap}(N)$ обозначает емкость множества N, определенную по норме графика оператора $(-\Delta+1)^{\alpha/2}$. Предположим, что

$$0 = \alpha\text{-}\operatorname{cap}(N) < \beta\text{-}\operatorname{cap}(N) < \infty, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2.$$

Более того, пусть мера μ удовлетворяет условию $G_z * \mu \in \mathcal{H}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, где G_z – ядро резольвенты оператора H_0. Тогда справедливы следующие построения.

Обозначим через γ_μ замыкание формы $\varphi, \psi \in C_0^\infty$ $\displaystyle\int \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,d\mu(x)$ в пространстве $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(H_0)$ с нормой графика H_0. Пусть $F_0 := \operatorname{Ker} \gamma_\mu$, $F = \mathcal{H}_+ \ominus F_0$, $F_{00} := F_0 \cap ((H_0+1)F_0)$. Сужение γ_μ на $F_{00} \oplus F$ оказывается замыкаемой в $\mathcal{H}$ формой, замыкание которой обозначим через $\gamma_{\mu,r}$. Пусть $\gamma_r := \gamma_{\mu,r} \restriction (\operatorname{Ker} \gamma_{\mu,r})^\perp$ в $\mathcal{H}$.

Теорема. *Прямая сумма форм $\widetilde{\gamma} = \gamma_{H_0} \dotplus \gamma_r$ замкнута в $\mathcal{H}$. Для самосопряженного оператора H, ассоциированного с $\widetilde{\gamma}$ ($\widetilde{\gamma} = \gamma_H$) справедливо равенство*

$$H \restriction C_0^\infty(\Omega \setminus N) H_0 \restriction C_0^\infty(\Omega \setminus N).$$

Если $\alpha > 1$, а $\beta = 2\alpha$, то проведенные построения и утверждение теоремы остаются справедливыми с заменой H_0 и H на H_0^α и H^α.

Кондратьев В.А., Олейник О.А. *“Об асимптотике решений нелинейных эллиптических уравнений”*

Здесь мы рассмотрим вопрос об асимптотике на бесконечности решения в цилиндрической области уравнения вида

$$\Delta u - e^u = 0, \tag{1}$$

которое возникает в различных задачах химической физики, механики, геометрии. Положим

$$S(0,\infty) = \{x : \widehat{x} \in \omega, 0 < x_n < \infty\}, \quad \sigma(0,\infty) = \{x : \widehat{x} \in \partial\omega, 0 < x_n < \infty\},$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, ω – ограниченная гладкая область в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ является решением уравнения (1) в $S(0,\infty)$ с граничным условием $u = 0$ на $\sigma(0,\infty)$. Тогда либо*

$$u(x) = Cz(\widehat{x}) \exp\{\sqrt{\lambda_1}\, x_n\} + O(1) \quad \text{при } x_n \to \infty,$$

либо

$$u(x) = u_0(\widehat{x}) + O\left(\exp\{-\sqrt{\lambda_1}\, x_n\}\right) \quad \text{при } x_n \to \infty,$$

где λ_1 – первое собственное значение задачи

$$\Delta z + \lambda z = 0 \quad \text{в } \omega, \ z = 0 \text{ на } \partial\omega,$$

$z(\widehat{x})$ – соответствующая λ_1 положительная в ω собственная функция, постоянная $C < 0$; $u_0(\widehat{x})$ – отрицательное в ω решение задачи

$$\Delta u_0 - e_0^u = 0 \quad \text{в } \omega, \ u_0 = 0 \text{ на } \partial\omega.$$

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ является решением уравнения* (1) *в* $S(0,\infty)$ *с граничным условием* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ *на* $\sigma(0,\infty)$, *где* ν – *направление внешней нормали на* $\sigma(0,\infty)$. *Тогда либо*

$$u(x) = Cx_n + o(x_n), \qquad C = \text{const} < 0,\ x_n \to \infty,$$

либо

$$u(x) = -2\ln x_n + o(\ln x_n), \qquad x_n \to \infty.$$

Коньков А.А. ***"О единственности решения задачи Дирихле для нелинейных уравнений второго порядка в неограниченных областях"***

Пусть Ω – произвольное, возможно неограниченное, открытое подмножество R^n;

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

где $a_{ij}(x)$ – измеримые ограниченные функции, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, и выполняются условия:

$$\gamma|\xi|^2 \le \sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \frac{1}{\gamma}|\xi|^2, \qquad \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n),\ \gamma > 0.$$

Пусть также $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ – измеримая функция, $f(t) > 0$ при $t > 0$, $f(t_2) \ge f(t_1)$ при $t_2 \ge t_1$. Обозначим $Q_r(x_0)$ – шар радиусом r с центром в точке x_0.

Теорема 1. *Предположим, что для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\infty dt\,\frac{f(t)^{-\frac12+\varepsilon}}{t} < \infty,$$

$Lu = f(|u|)u$ *в* Ω, $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, *тогда* $u(x) \equiv 0$. *Более того, если* $u(x) \in C\left(\overline{\Omega \cap Q_r(x_0)}\right)$, $Lu \ge f(|u|)u$ *в* $Q_r(x_0) \cap \Omega$, $u\big|_{\partial\Omega} \le 0$, $u(x_0) = M_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ *такое, что* $\lambda = \varepsilon - \frac12\varepsilon_1(\varepsilon - \frac12) > 0$, *то*

$$r \le C(\varepsilon_1, n, \gamma)\left(\int_{M_0/2l}^\infty dt\,\frac{f(t)^{-\frac12+\varepsilon}}{t}\right)^{1+\frac{\varepsilon_1}{2}} f\left(\frac{M_0}{2}\right)^{-\lambda}.$$

Теорема 2. *Пусть* $u(x) \in C\left(\overline{\Omega \cap Q_r(x_0)}\right)$, $Lu \ge f(|u|)u$ *в* $\Omega \cap Q_r(x_0)$, $u\big|_{\partial\Omega} \le 0$, $M_0 = u(x_0) > 0$, $M = \sup\limits_{\Omega\cap Q_r(x_0)} u(x)$, $H(t) = f\left(\frac{t}{2}\right)\frac{t}{2}$, $0 < \lambda > 1$, *тогда найдутся* C_1, C_2, C_3, C_4, *зависящие от* λ, γ, n *такие, что*

$$H(M) \ge \exp\left\{C_4 r^\lambda \left(f\left(\frac{M}{2}\right)\right)^{\lambda/2}\right\} H(M_0),$$

$$\inf_{x\in(0,1)} f\left(C_1 r^2 x^2 \exp\left(C_2 x^{-\lambda}\right) H(M_0)\right) r^2 x^2 \le C_3.$$

[1] Кондратьев В.А., Ландис Е.М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 135(177). №3. С. 366–358.

Кружков С.Н., Барсов О.Н. *"Нелинейные параболические уравнения второго порядка на плоскости"*

В прямоугольнике Q (или полосе Π) $\subset \mathbb{R}^2$ рассматриваются основные краевые задачи (или задача Коши) для уравнений вида

$$(1) \qquad u_t = a(t,x,u,u_x,u_{xx}), \qquad a_r(t,x,u,p,r) > 0.$$

Как известно, теоремы глобальной разрешимости этих задач (в классическом смысле) являются следствием соответствующих априорных оценок. Оценки максимума модуля решений можно получить при естественных предположениях, например, при помощи принципа максимума. Главные априорные оценки для $|u_x|$ и $|u_{xx}|$ тоже могут быть получены по принципу максимума при соответствующих (как правило – довольно жестких) требованиях на функцию $a(\dots)$, $(\dots) \equiv (t,x,u,p,r)$; в частности, при выпуклости функции $a(\dots)$ по совокупности переменных (u,p) и ограниченности сверху функции

$$a_{xx}(\dots) + a_{xu}(\dots)p + a_{xp}(\dots)r + a_{uu}(\dots)p^2 + 2a_{up}(\dots)pr + a_{pp}(\dots)r^2$$

на множествах

$$\Omega_m\left\{(t,x) \in Q \ (\text{или } \Pi), |u| \le M = \text{const}, p \in \mathbb{R}^1, r \in \mathbb{R}^1\right\}$$

возможен следующий "неестественный" порядок оценок: сначала оцениваются сверху $\sup|u(t,x)|$, и $\sup u_{xx}(t,x)$, а затем (по интерполяции) $\sup|u_{xx}(t,x)|$ (см. также работу С.Н. Кружкова в журнале "Матем. заметки". 1969. Т. 6. № 3).

Главные результаты данного доклада основываются на развитии методики оценок $|u_x|$ и $|u_{xx}|$ С.Н. Кружкова (см. "Труды ММО", 1967, Т. 16 и "Труды сем. им. Г.И. Петровского, 1979, вып. 5). Рассматриваются два случая: для уравнения (1) а) выполняются или б) не выполняются условия типа С.Н. Бернштейна, что означает расходимость или сходимость интегралов $I[\varphi] = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\rho/\varphi(\rho))\,d\rho$ и $I[\psi]$, где $\varphi(\rho)$ и $\psi(\rho)$ – такие монотонные положительные функции, что на множестве Ω_M (соответственно) $\pm a(t,x,u,p,\pm\varphi(|p|)) \ge 0$ и

$$|ra_p(\dots)| + |pa_u(\dots)| + |a_x(\dots)| \le \psi(|r|)a_r(\dots).$$

В случае а) априорные оценки $|u_x|$, $|u_{xx}|$ и теоремы разрешимости при любом M, а в случае б) для получения оценки $|u_x|$ достаточно потребовать выполнения условия $2M < I[\varphi]$ и (далее) для получения оценки $|u_{xx}|$ достаточно предположить, что

$$2M \le \int_0^c (\rho/\psi(\rho))\,d\rho,$$

где $c = I[\varphi]/2$, при этих же предположениях на нелинейности уравнения (1) доказываются теоремы разрешимости краевых задач и задачи Коши.

Леликова Е.Ф. (Екатеринбург) *"Об асимптотике фундаментального решения параболического уравнения высокого порядка"*

Исследуется поведение при $t \to \infty$ фундаментального решения (ФР) $G(x,s,t)$ задачи Коши для уравнения

$$u_t + (-1)^n D_x^{2n} u + a(x)u = 0, \qquad x \in R^1,\ t > 0,\ a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1).$$

Предполагается, что уравнение

$$(-1)^n D_x^{2n} u + a(x)u = 0$$

не имеет нетривиальных решений из $L_2(\mathbb{R}^1)$ при действительных $\lambda > 0$. Кроме того, предполагается, что для коэффициента $a(x)$ при $x \to \pm\infty$ справедливо представление

$$a(x) = a_{2n}^{\pm} x^{-2n} + \varphi(x),$$

где $a_{2n}^{\pm} \ge -\beta_n^2$ (β_n – постоянная Кнезера, $\beta_n = (2n-1)!!\,2^{-n}$), а функция $\varphi(x)$ при $x \to \pm\infty$ разлагается в некоторый ряд по отрицательным степеням x^{-1}, $\varphi(x) = o(x^{-2n})$ при $x \to \pm\infty$.

Построено и обосновано асимптотическое разложение ФР при $t \to \infty$ для всех $x, s \in \mathbb{R}^1$. При всех указанных значениях коэффициента $a_{2n}^{\pm}$ в области $|x| + |s| < Ct^{(1/2n)-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1/2n)$, ФР $G(x,s,t)$ при $t \to \infty$ убывает степенным образом. Кроме того, при некоторых значениях коэффициента $a_{2n}^{\pm}$ ФР осциллирует.

Малышев В.А., Манита А.Д., Петрова Е.Н. *“Гидродинамика нелинейной модели голосования”*

Пусть $\xi_t(x)$, $t \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{Z}^\nu$ – условный независимый марковский процесс [1] со значениями $\xi_t(x) = 0, 1$ и условными вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi_{t+1}(x) = 1 \mid \xi_t(\cdot)\} = (1-\varepsilon) \sum_{y \in Q} a_y \xi_t(x+y) + \varepsilon\big(F(\xi_t(x+\cdot)) + \beta\big),$$

где $\varepsilon > 0$, $Q \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|Q| < \infty$, $a_y > 0$, $\sum a_y = 1$, $\beta \geq 0$, $F(\xi(\cdot))$ – полином от величины $\xi(x)$ с положительными коэффициентами без свободного члена. Пусть $\langle\cdot\rangle$ – среднее по распределению процесса $\xi_t(x)$, где в качестве начального распределения взята независимая мера со средним

$$\langle \xi_0(x) \rangle = \rho_0\left(\varepsilon^\delta x\right), \qquad \rho_0 \in C^1(\mathbb{R}\nu),\ 0 \leq \rho_0(\cdot) \leq 1,\ \delta > 0.$$

Теорема 1. *Пусть $\nu \geq 1$, $\delta = 1$. Тогда $\left\langle \xi_{[\tau/\varepsilon]}([r/\varepsilon]) \right\rangle \to \rho(\tau, r)$ $(\varepsilon \to 0)$ $\forall \tau \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}^\nu$, где $\rho(\tau, r)$ есть решение гидродинамического уравнения*

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = (a, \nabla_r \rho) + f(\rho) + \beta, \qquad \rho(0, r) = \rho_0(r),$$

где $f(\cdot)$ – полином, явно выписываемый через $F(\cdot)$, $a = \sum y a_y \in \mathbb{R}^\nu$.

Теорема 2. *Пусть $\nu \geq 1$, $a = 0$, $\delta = 1/2$. Тогда $\forall \nu, \tau, r$ $\left\langle \xi_{[\tau/\varepsilon]}\left([r/\varepsilon^{1/2}]\right)\right\rangle$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению $\rho(\tau, r)$ параболического уравнения типа КПП*

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{1}{2}(B\nabla_r, \nabla_r)\rho + f(\rho) + \beta, \qquad \rho(0, r) = \rho_0(r),$$

где $B = (b_{ij})$ – матрица ковариаций:

$$b_{ij} = \sum y^i y^j a_y, \qquad y = (y^1, \ldots, y^\nu).$$

Аналогичные утверждения доказаны для случая полинома F с коэффициентами произвольного знака. Установлено соответствие между числом инвариантных мер описанного марковского процесса при малых фиксированных $\varepsilon > 0$ и количеством стационарных решений гидродинамического уравнения, имеющих вероятностный смысл.

[1] Malyshev V.A., Petrova E.N. Scacciatelli E. Marginally closed processes with local interaction // Stoch. Processes and Appl. 1992. V. 43. P. 47–63.

Микушин Н.В. *"О корректности краевых задач в полупространстве для линейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений с частными производными"*

На множестве $\{(t,x) \mid t \in Z_*, x \in R^k\}$ рассматривается задача:

$$u(t+p,x) + \sum_{n=1}^{p} a_n(id_x)u(t+p-n,x) = 0; \tag{1}$$

$$\widetilde{u}(m,y) = c_m(y) \ \ \forall y \in Y_m \quad (m \in M_p); \tag{2}$$

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^{-s}(R^k)} = O(t^{p-1}) \qquad \text{при } t \to +\infty. \tag{3}$$

Здесь $Z_* = \{0\} \cup N$; $a_1(\cdot), \ldots, a_p(\cdot)$ – многочлены, $a_p(\cdot) \neq 0$; $\widetilde{u}(t,y)$ – преобразование Фурье $u(t,x)$ по x: $M_p = \{0, \ldots, p-1\}$; $Y_{p-1} \subseteq Y_{p-2} \subseteq \cdots \subseteq Y_0 \subseteq R^k$ (если Y_m пусто, то условие из (2) на Y_m несущественно); $s \in Z_*$.

Решением задачи называется функция $u(t,x)$, принадлежащая

$$U = \{d_x^q f(x) \mid f(\cdot) \in L_2(R^k), q \in Z_*^k\}$$

при каждом $t \in Z_*$ и удовлетворяющая (1)–(3) (в смысле теории распределения).

Пусть

$$J_m = \Big\{ y \in R^k \ \Big| \ \lambda^p + \sum_{n=1}^{p} a_n(y)\lambda^{p-n} = \prod_{n=1}^{\sigma} (\lambda - \lambda_n)^{\omega_n},$$
$$|\lambda_1| \leq 1, \ldots, |\lambda_\nu| \leq 1, |\lambda_{\nu_1}| > 1, \ldots, |\lambda_\sigma| > 1, \sum_{n=1}^{\nu} \omega_n \geq m + i \Big\}$$

($m \in M_p$); $\mu(\cdot)$ – мера Лебега в R^k.

Теорема. *Пусть* $\{c_0(\cdot), \ldots, c_{p-1}(\cdot)\} \subset \widetilde{U} = \{\rho(\cdot)f(\cdot) \mid \rho(\cdot)$ – *многочлен*, $f(\cdot) \in L_2(R^k)\}$. *Тогда*

1) *если* $\mu(Y_m \triangle J_m) = 0$ *для любого* $m \in M_p$, *то задача* (1)–(3) *корректно поставлена в классе* U;
2) *если* $\mu(Y_m \setminus J_m) > 0$ *при некотором* $m \in M_p$, *то решение* (1)–(3), *вообще говоря, не существует;*
3) *если* $\mu(J_m \setminus Y_m) > 0$ *при некотором* $m \in M_p$, *то решение* (1)–(3) *неединственно.*

Аналогичные теоремы доказаны при условии периодичности по x в случаях как дискретно, так и непрерывно изменяющегося t. Указанные результаты распространены на неоднородные уравнения и начальные условия более общего вида.

Нестеров А.В. *"Асимптотика решения параболического уравнения с сингулярно возмущенным краевым условием"*

Рассматривается краевая задача для параболического уравнения

$$\begin{cases} \varepsilon u_t - \varepsilon^2 a(x,y,t)\Delta u + c^2(x,y,t)u = 0, & x,y,t \in \Omega = \{x > 0, y > 0, t > 0\}, \\ u|_{y=0} = u|_{t=0} = 0, \quad -\varepsilon^2 u_x + h(y,t)u|_{x=0} = \varphi(y,t), & u \to 0, \ x + y \to \infty, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Особенность задачи состоит в наличии ε^2 при старшей производной в краевом условии. Асимптотика решения построена в виде

$$u = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \big(R_i(\xi,y,t) + P_i(\xi,\eta,t,\varepsilon) + S_i(\xi,\tau,y,\varepsilon) + M_i(\xi,\eta,\tau,\varepsilon)\big) + r_n,$$

где $\xi = \varepsilon^{-1}x$, $\eta\varepsilon^{-1}y$, $\tau = \varepsilon^{-1}t$, R, P, S, M – погранфункции, r_n – остаточный член. Сингулярное возмущение краевого условия порождает неэкспоненциальные погранслои в окрестности ребер и угловых точек границы $\partial\Omega$, поэтому при построении погранфункций P, S, M в краевых условиях при $\xi = 0$ оставлены малые слагаемые $-\varepsilon\partial/\partial\xi$. Например, угловые погранфункции M_i есть решения задач

$$\begin{cases} M_{i,\tau} = a\Delta_{\xi\eta}M_i - c^2M_i + m_i^{\mathrm{I}}, & \xi > 0, \eta > 0, \tau > 0, a = a(0,0,0), c^2 = c^2(0,0,0), \\ -\varepsilon M_{i,\xi} + hM_i\big|_{\xi=0} = m_i^{\mathrm{II}}, & M_i\big|_{\eta=0} = -S_i\big|_{y=0}, M_i\big|_{\tau=0} = -P_i\big|_{t=0}, h = h(0,0). \end{cases}$$

Справедливы оценки

$$|R_i| \le C\exp(-\varkappa\xi), \qquad |P_i| \le C\exp(-\varkappa(\xi+\eta))\big(1 + \operatorname{arctg}((\xi+\varepsilon\varkappa)/\eta)\big),$$

$$|S_i| \le C\exp\left(-\varkappa\left(\xi^2/\tau + \tau\right)\right)\left(\tau/\left(\tau+\varepsilon^2\right)\right)^{1/2},$$

$$|M_i| \le C\exp(-\varkappa(\xi+\eta+\tau))\left(\tau/(\tau+\varepsilon^2)\right)^{1/2}, \qquad \varkappa > 0.$$

Теорема. *Пусть* $a, c^2, h \ge \mathrm{const} > 0$, a, c^2, h, φ *– достаточно гладкие,* φ *– финитная. Тогда* $r_n = O(\varepsilon^{n+1})$ *равномерно в* $\overline{\Omega}$.

Нефедов Н.Н. *“Решения с внутренними слоями у нелинейных сингулярно возмущенных уравнений с частными производными”*

Для задачи вида

$$\varepsilon^2\Delta = f(u,x,\varepsilon), \quad x \in D \subset R^2, \qquad u\big|_{\partial D} = g(x) \tag{1}$$

построено асимптотическое разложение по малому параметру решения с внутренним слоем типа всплеска (контрастной структуры). Замкнутая кривая, в окрестности которой происходит всплеск решения, заранее не известна и находится в ходе построения асимптотики. Асимптотика решения ищется в виде

$$u(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i(\overline{u}_i + \pi_i + Q_i),$$

где $\overline{u}_i$ – коэффициенты регулярной части асимптотики, π_i – погранслойной, Q_i – функции всплеска, зависящие от растянутой переменной $\tau = r/\varepsilon$ (r – расстояние от искомой кривой).

Пусть выполнены следующие условия:

1. Вырожденное уравнение $f(\overline{u}, x, 0) = 0$ имеет два корня $\overline{u} = \varphi_1(x)$ и $\overline{u} = \varphi_2(x)$ ($\varphi_1 < \varphi_2$), причем, $f_u(\varphi_1(x), x, 0) > 0$, $f_u(\varphi_2(x), x, 0) < 0$.
2. Существует $\psi(x)$ такая, что $I(s) = \displaystyle\int_{\varphi}^{s} f(u,x,0)\,du > 0$, $I(\psi) = 0$.
3. Существует единственное 2π-периодическое решение уравнения

$$\frac{\sigma'' + \sigma}{(1 + (\sigma'/\sigma)^2)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial Q_0}{\partial\tau}\right)^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_2\left(\overline{u}_0(0,\theta) + Q_0, 0, \theta, 0\right)\tau Q_0'\,d\tau,$$

где $\sigma = 1/R(\theta)$ – функция, задающая главную часть кривой всплеска в полярных координатах, $Q_0(\tau,\theta)$ – функция всплеска, нетривиальное решение задачи

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial\tau^2}f\left(\overline{u}_0(0,\theta) + Q_0, 0, \theta, 0\right), \quad -\infty < \tau < \infty, \qquad Q_0'(0,\theta) = 0, \quad Q_0(\pm\infty,\theta) = 0.$$

Теорема. *При выполнении условий* 1–3 *для достаточно малых* ε *существует решение типа контрастной структуры задачи* (1), *причем выполнено неравенство*

$$\max_{\overline{D}}|u - U_n| \le c\varepsilon^{n+1},$$

где U_n *– частичная сумма порядка* n *построенного асимптотического ряда.*

Никишкин В.А. *"Об асимптотике вблизи ребер и конических точек сингулярных решений полулинейных эллиптических уравнений"*

Рассматривается задача

$$(1)\qquad Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x)u_{x_i} - a(x)u = p(x)u^k, \qquad u > 0,\ x \in G,$$
$$u(x) = +\infty, \qquad x \in \partial G,$$

где G – ограниченная область с гладкой границей всюду, кроме точки A. Точка A является конической, т.е. в окрестности точки A область совпадает с конусом. L – равномерно эллиптический оператор в $\overline{G}$, коэффициенты уравнения из $C^2(\overline{G})$, $p(x) > 0$, $a(x) \geq 0$, $k > 1$, $m \geq 2$.

Пусть (r, ρ, φ) – координаты точки x, где r – расстояние до вершины конуса, а (ρ, φ) – соответственно, расстояние до границы и координаты вдоль границы области Ω, полученной пересечением конуса с единичной сферой. Пусть, наконец, $\vec{n}(\varphi) = \{n_1, \dots, n_m\}$ – единичная нормаль к конусу в точке $(r, 0, \varphi)$,

$$a_0(\varphi) = a_{11}(A)n_1^2 + a_{12}(A)n_1 n_2 + \dots + a_{mm}(A)n_m^2.$$

Теорема. *Для любого решения задачи* (1) *в достаточно малой конической окрестности границы с центром в точке A справедливо представление*

$$u(x) = M_0(r\rho)^{-2/(k-1)}(1 + H_1(x)\rho + H_2(x)r) + H_3(x)r^{-2/(k-1)},$$

где $|H_i(x)| \leq c$, $(i = 1, 2, 3)$, $c = \mathrm{const}$ *– не зависит от решения,*

$$M_0 = \left(\frac{(k-1)^2 p(A)}{2a_0(\varphi)(k+1)}\right)^{1/(k-1)}.$$

Аналогичный результат справедлив в окрестности ребра.

Оруджев Г.Д. (Баку) *"Полиномиальное приближение решений некоторых дифференциальных уравнений"*

В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши

$$(1)\qquad \left(\frac{d}{dt} - \alpha A\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta A\right) y(t) = 0, \qquad t \in [0, T] \quad (0 < T < \infty),$$

$$(2)\qquad y(0) = f, \qquad y'(0) = g,$$

где A – замкнутый линейный оператор в E, $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$.

Пусть m_n – неубывающая последовательность положительных чисел,

$$C_{\{m_n\}}(C_{(m_n)}) = \left\{ f \in \bigcap \mathcal{D}(A^n) \mid \exists \alpha > 0\ (\forall \alpha > 0) \exists c > 0 : \|A^k f\| \leq c\alpha^k m_k\ (k = 0, 1, \dots) \right\},$$

$$P_n^t(A) = \frac{1}{\beta - \alpha}\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}A^k, \qquad Q_n^t(A) = \frac{1}{\beta - \alpha}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}A^k \qquad (\alpha \neq \beta).$$

Теорема. *Если αA и βA генерируют полугруппы класса C_0, а $y(t)$ – решение задачи* (1), (2) *с* $f, g \in C_{\{m_n\}}$ $(f, g \in C_{(m_n)})$, *то* $\exists c > 0$ $\exists \rho > 0$ $(\forall \rho > 0 \quad c > 0)$: $\forall t \in [0, T]$

$$\left\| y(t) - \beta P_n^t(\alpha A)f + \alpha Q_n^t(\beta A)f - \beta Q_n^t(\beta A)g + \alpha P_n^t(\alpha A)g \right\| \leq c\rho^n \frac{m_n}{n!}.$$

Из теоремы следует, что если αA или βA генерирует ограниченную аналитическую полугруппу, то приближение решения получим для $f, g \in C_{(n!)}$, а в силу плотности последнего в E – для $f, g \in E$. При $\alpha = \mp\beta$ имеет место обратное утверждение.

Все сказанное верно и для некоторых уравнений высоких порядков.

Петрова В.В. *"Об обратной задаче со свободной границей в теории равновесной плазмы"*

Задача связана с магнитной диагностикой в токамаках [1]. В R^2 задана аналитическая кривая Γ, гомеоморфная окружности, константа $\varepsilon > 0$ и функция $\sigma \in C(\Gamma)$, причем $\sigma > \varepsilon > 0$.

Теорема.

1) $\exists M^* > 0$, *что* $\forall M \in]0, M^*[$ *найдется спрямляемая кривая* γ, *гомеоморфная окружности, лежащая внутри* Γ, *и функция* u, *гармоническая в области, заключенной между кривыми, что:*

$$u\big|_\Gamma = 0, \qquad u\big|_\gamma = -M, \qquad \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \sigma \right\|_{C(\Gamma)} \le \varepsilon.$$

2) γ *– аналитическая, расположена между кривыми* γ^+ *и* γ^-, *лежащими внутри* Γ, *для которых* $u^\pm\big|_{\gamma^\pm} = -M$, *где* $u^\pm$ *– гармоническая функция в области, заключенной между* Γ *и* $\gamma^\pm$, *причем*

$$u^\pm\big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial u^\pm}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma = \sigma_\pm \pm \varepsilon, \qquad \text{где } \sigma_+ \max_\Gamma \sigma, \quad \sigma_- = \min_\Gamma \sigma.$$

3) *На свободной границе* γ *верна следующая оценка:*

$$(\sigma_- \varepsilon)\exp(-MC) \le \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_\gamma \le (\sigma_+ + \varepsilon)\exp(\hat{M}C + 2\pi M),$$

где ν *– нормаль к* γ, $C > 0$ *– константа, определяемая явно по функции* σ *и кривой* Γ. *Поточечная оценка выписывается через параметризацию, связанную с решением нелинейной краевой задачи Римана–Гильберта* [1].

Доказательство использует методы теории функций комплексного переменного и теорему Коши–Ковалевской.

[1] Демидов А.С., Захаров Л.Е. Прямая и обратная задачи в теории равновесия плазмы // УМН. 1974. Т. 29. №6(180). С. 203.

Романов А.В. *"О размерности инерциальных многообразий полулинейных параболических уравнений"*

Рассматривается уравнение $\dot{u} = -Au + F(u)$ в гильбертовом пространстве E. Здесь A – линейный самосопряженный оператор в E с компактной резольвентой и собственными числами $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$ (E_θ – соответствующая гильбертова шкала пространств), а F – равномерно-липшицева нелинейность: для $u, u' \in E_\theta$ ($\theta \in [0, 1)$)

$$\left\| F(u) - F(u') \right\|_E \le \|u - u'\|_{E_\theta}.$$

Гомеоморфное R^k инвариантное многообразие $H \subset E_\theta$ называем *инерциальным* (ИМ), если оно притягивает E_θ при $t \to +\infty$ с асимптотической фазой и состоит из траекторий решений с ограниченным экспоненциальным ростом при $t \to -\infty$.

Теорема. *Если* $k \ge 1$ *и* $\lambda_{k+1} - \lambda_k > \left(\lambda_{k+1}^\theta + \lambda_k^\theta\right) L$, *то в* E_θ *существует единственное* k*-мерное* ИМ.

Полученное условие позволяет сводить описание устойчивых предельных режимов исходного уравнения к аналогичной задаче для его сужения на H, т.е. фактически, для некоторого ОДУ в R^k; это условие оказывается в определенном смысле неулучшаемым.

[1] Романов А.В. Условия асимптотической k-мерности полулинейных параболических уравнений // УМН. 1991. Т. 46. №1. С. 213–214. [2] Романов А.В. Точные оценки размерности инерциальных многообразий для нелинейных параболических уравнений // Изв. РАН. 1993. Т. 57. №4 (в печати).

Свиридюк Г.А. (Челябинск) *“Фазовые пространства линейных уравнений типа Соболева с относительно ограниченными или относительно секториальными операторами”*

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{A},\mathfrak{F})$, а оператор $M\colon \operatorname{dom} M \to \mathfrak{F}$ линеен и замкнут ($\operatorname{dom} M \subset \mathfrak{U}$). Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1}$$

для линейного уравнения типа Соболева

$$L\dot{u} = Mu. \tag{2}$$

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F},\mathfrak{A})$, то уравнение (2) тривиально редуцируется к уравнению

$$\dot{u} = Tu \tag{3}$$

с линейный, замкнутым оператором $T = L^{-1}M$. Если оператор T ограничен или секториален, то единственное решение задачи (1), (3) представимо в виде

$$u(t) = U^t u_0, \tag{4}$$

где $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ – полугруппа разрешающих операторов уравнения (3). Если оператор L необратим, в частности, $\ker L \neq \{0\}$, но оператор M L-ограничен [1] или L-секториален [2], то единственное решение задачи (1), (2) существует в виде (4), причем в данном случае полугруппа $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ разрешающих операторов уравнения (1) обладает нетривиальным ядром $\ker U^{\cdot} \neq \{0\}$ и образом $\operatorname{im} U^{\cdot}$. Основной результат – совпадение образа $\operatorname{im} U^{\cdot}$ с фазовым пространством [3] уравнения (2).

[1] Свиридюк Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором // ДАН СССР. 1991. Т. 318. №4. С. 828–831. [2] Свиридюк Г.А., Бокарева Т.А. Число Деборы и один класс полулинейных уравнений типа Соболева // ДАН СССР. 1991. Т. 319. №5. С. 1082–1086. [3] Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений типа Соболева // Дифференц. уравнения 1990. Т. 26. №2. С. 250–258.

Слюсарчук В.Е. (Ривнэ) *“Устойчивость решений уравнений в частных производных гиперболического типа с операторными коэффициентами”*

Пусть H – гильбертово пространство, $A\colon H \to H$ – ограниченный самосопряженный положительный оператор, $B, C, D, E\colon H \to H$ – линейные непрерывные операторы, $\{-1,1\}\cap\sigma(B) = \varnothing$, $K = (B+I)^{-1}(B-I)$ (I – единичный оператор) и S_τ ($\tau \in \Delta$) – спектральная функция оператора A.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}, \\ A\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (x,t) \in [0,l]\times[0,+\infty), \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} u(0,t) + Bv(0,t) = 0, \\ C\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} + DU(l,t) + Ev(l,t) = 0, \qquad t \geq 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Теорема. *Нулевое решение задачи* (1)–(2) *устойчиво* (*экспоненциально устойчиво, экспоненциально устойчиво для всех* $l > 0$) *тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает нулевое решение дифференциально-функционального уравнения*

$$\begin{aligned} C\left(\frac{dy(t)}{dt} + \int_\Delta dS_{\tau_1} K \int_\Delta dS_{\tau_2} \frac{dy(t-(\tau_1+\tau_2)l)}{dt}\right) \\ = (E-D)y(t) - (E+D)\int_\Delta dS_{\tau_1} K \int_\Delta dS_{\tau_2} y(t-(\tau_1+\tau_2)l), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Туваев М.В. *"Устранимые особые множества для параболических уравнений"*

Пусть ограниченная область $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 2$, $\Pi = (0,T] \times G$, где $T > 0$. Пусть K – компактное дифференцируемое многообразие из Π размерности m. Значение τ назовем *критическим*, если существует $\xi \in G$ такая, что $(\tau,\xi) \in K$, и для любого $\varepsilon > 0$ в $\mathbb{R}^n$ существует окрестность $Q(\tau,\xi)$ точки (τ,ξ) такая, что для всех (t,x) из $K \cap Q$ выполняется: $|t-\tau| \leq \varepsilon(x-\xi|^2$.

Теорема. *Пусть функция $u(t,x) \in C^{1,2}(\Pi \setminus K)$ является классическим решением уравнения*

$$a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(t,x,u) \tag{1}$$

в области $\Pi \setminus K$. Число критических значений на K конечно, и для всех $x \in G$, $t \in (0,T]$, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ выполняется:

$$\lambda^{-1}|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \lambda|\xi|^2, \qquad \lambda = \mathrm{const} > 0.$$

Кроме того, предположим, что $f(t,x,0) = 0$,

$$(f(t,x,u_1) - f(t,x,u_2))(u_1 - u_2) \geq 0, \quad |f(t,x,u)| \geq |u|^\beta, \qquad \beta > 1.$$

Тогда, если $a_{ij}(t,x) \in C^{1,2}(\Pi)$, $f(t,x,u) \in C^1(\Pi \times \mathbb{R})$,

$$0 \leq m < n - 2\beta/(\beta - 1), \tag{2}$$

то существует $\widetilde{u} \in C^{1,2}(\Pi)$ такая, что $\widetilde{u} = u$ в $\Pi \setminus K$ и $\widetilde{u}$ – классическое решение уравнения (1) в Π.

Если особое многообразие K лежит в плоскости $t = \mathrm{const}$, то для справедливости теоремы вместо неравенства (2) достаточно потребовать:

$$0 \leq m < n + 1 - 2\beta/(\beta - 1) \equiv n - (\beta + 1)/(\beta - 1).$$

Филимонов А.М. (Москва) *"Континуальные модели конечных линейных дискретных цепочек"*

Рассматриваются следующие задачи о свободных колебаниях:

$$m\ddot{y}_j = c(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}), \quad y_j(0) = \alpha(j), \quad \dot{y}_j(0) = 0, \tag{1}$$

$$mu_{tt} = 2c\sum_{n=1}^{M}\frac{h^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}}, \qquad u(x,0) = \beta(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

с краевыми условиями $y_0(t) = y_N(t) = u(0,t) = u(Nh,t) = 0$.

Теорема. *Пусть*

$$\beta = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\alpha(j)\left(D\left(j - \frac{x}{h}\right) - D\left(j + \frac{x}{h}\right)\right), \qquad D(a) = \frac{\sin(a\pi k(N-0{,}5)/N)}{\sin(a/2)}.$$

Тогда для любого нечетного M имеет место оценка:

$$|u(jh,t) - y_j(t)| \leq \frac{2c\max|\alpha(j)|}{m(2M+2)!}t^2\pi^{2M+2}$$

Замечание. Уравнение (2) при $M = 1$ совпадает с волновым уравнением, которое не отражает некоторых свойств решений цепочки (1) [1]. При нечетном $M \geq 3$ эти свойства отражаются уравнением (1) точнее.

[1] Filimonov A.M., Kurchanov P.F., Myshkis A.D. Some unexpected results in the classical problem of the string with N beads when N is large // C.R. Acad. Sci. Paris. 1991. V. 313. №1. P. 961–965.

Хлуднев А.М. *"Контактные упругопластические задачи для пластин и стержней"*

Частично результаты доклада опубликованы в [1]–[3].

[1] Khludnev A.M. Contact viscoelastoplastic problem for a bar // Free boundary problems in continuum mechanics. Ed.: Antontsev S.N., Hoffmann K.-H., Khludnev A.M. Intern. Series of Numer Math. V. 106. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser. Verlag. 1992. [2] Khludnev A.M., Hoffmann K.-H. A rational inequality in a contact elastoplastic problem for a bar // Adv. Math. Sciences Appl. 1992. V. 1. №1. [3] Хлуднев А.М. Контактная задача для упругопластической балки в условиях ползучести // Сибирск. матем. журн. 1993. Т. 34. №1.

Чесноков И.Ю. *"Об устранимых особенностях решений линейных дифференциальных уравнений, допускающих степенную оценку роста вблизи множества особенностей"*

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, A – компакт в Ω и в Ω задан линейный дифференциальный оператор P порядка m с гладкими коэффициентами. Обозначим $F_d(A < \Omega)$, $d > 0$ – класс функций из $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, допускающих оценку $|u(x)| \leq c \cdot \mathrm{dist}\,(x, A)^{-d}$ с константой c от x не зависящей. Здесь $\mathrm{dist}\,(x, A)$ – расстояние в $\mathbb{R}^n$ от x до A. Множество A назовем (P, d)-*устранимым*, если любая функция u из $F_d(A, \Omega)$, удовлетворяющая уравнению $Pu = 0$ в $\Omega \setminus A$ в смысле распределений, удовлетворяет уравнению $Pu = 0$ в Ω. Обычно вводятся ограничения на малость A в терминах меры Хаусдорфа $\Lambda_\gamma(A)$ или объемов Минковского $M^\gamma(A)$ и $M_\gamma(A)$. Известно, что:

1) если $M_{n-m-d}(A) = 0$, то A – (P, d)-устранимо;
2) если P – эллиптический оператор и $\Lambda_{n-m-d}(A) > 0$, то A не является (P, d)-устранимым (см. Polking J. A survey of removable singularities //Seminar Nonlinear Partial Differential Equations. N.Y. 1984. P. 261).

Докладчик построил пример, показывающий, что условие $M_{n-m-d}(A) = 0$ в первом утверждении нельзя заменить на условие $\Lambda_{n-m-d}(A) = 0$. Дополнительную информацию можно получить, зная структуру A или учитывая как $\Lambda_\gamma(A)$, так и $M^\gamma(A)$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A лежит на C^1-многообразии коразмерности $k > 0$. Тогда, если $d < k$ и $\Lambda_{n-m-d}(A) = 0$, то A – (P, d)-устранимо.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $M^\gamma(A) < \infty$, где $n - m - d \leq \gamma < n - d$, $d < n$ и $\Lambda_\delta(A)$ для некоторого $\delta < n - m - \dfrac{md}{n-\gamma-d}$. Тогда A – (P, d)-устранимо.*

Чуешов И.И. (Харьков) *"Теоремы о регулярности решений и приближенные инерциальные многообразия для эволюционной системы Кармана"*

В пространстве $H = L^2(\Omega)$, где Ω – гладкая ограниченная двумерная область, рассматривается автономное эволюционное уравнение

$$u_{tt} + \gamma u_t + (L + M)u + \left[u, L^{-1}([u, u])\right] = 0. \tag{1}$$

Здесь L – бигармонический оператор с условиями Дирихле на $\partial\Omega$, M – линейный дифференциальный оператор не выше второго порядка с гладкими коэффициентами, $[u, v] = u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy}$, $\gamma > 0$. Установлены необходимые и достаточные условия регулярности сильных решений о их существовании см. в [1]). Показано, что глобальный аттрактор состоит из гладких элементов. Полученные результаты используются для построения бесконечной серии приближенных инерциальных многообразий, задаваемых аналитическими отображениями h_n и l_n из $PH \times PH$ в $(I - P)H$, P – ортопроектор в H, отвечающий первым $(N - 1)$ собственным функциям оператора L. Функции h_n и l_n вычисляются с помощью достаточно простой итерационной процедуры, причем $h_0 = l_0 = 0$. Для них, в частности, имеет место

ТЕОРЕМА. *Для любой траектории $(u(t); u_t(t))$; системы (1), лежащей в аттракторе, справедлива оценка:*

$$\left\|L^{1/2}\left(q_t(t) - \overline{q}_n(t)\right)\right\| + \|L\left(q(t) - q_n(t)\right)\| \leq c_n \lambda_N^{-n/2},$$

где $t \in \mathbb{R}$, $q_n(t) = h_n(p(t), p_t(t))$, $\overline{q}_n(t) = l_n(p(t), p_t(t))$, $q(t) = (I-P)u(t)$, $p(t) = Pu(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, λ_N – N*-ое собственное число оператора* L, c_n – *константы, независящие от* N.

[1] Чуешов И.Д. Сильные решения и аттрактор системы уравнений Кармана // Матем. сб. 1990. Т. 181. №1. С. 25–36.

Ширикян А.Р. *"Почти-периодические решения нелинейного гиперболического уравнения"*

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^\infty$, $\partial = \{\partial_i, 0 \le i \le n\}$, $\partial^2 = \{\partial^\alpha, |\alpha| = 2\}$, $\partial_0 = \partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, $\partial^\alpha = \partial_0^{\alpha_0} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$. В области $\Omega \times R$ рассматривается задача

$$u_{tt} + \gamma u_t - \Delta u + \varepsilon f(u, \partial u, \partial^2 u, x, t) = g(x, t), \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon \in R$ – малый параметр, $\gamma \in R \setminus \{0\}$. Пусть $AP(\mathcal{H})$ – пространство почти-периодических по Бору функций со значениями в метрическом пространстве $\mathcal{H}$. Обозначим

$$H_m = \left\{ u(x,t) : \partial_t^j u \in AP(H^{m-j}(\Omega)),\ 0 \le j \le m \le m \right\},$$

$$\overset{\circ}{H}_m = H_m \cap \{u(x,t) : u|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad m \ge 1,$$

$$C_m = \{f(p, x, t) : \partial_t^j f \in AP(C^{m-j}(R^d \times \overline{\Omega})),\ 0 \le j \le m\},$$

где $p \in R^d$, $d = \frac{1}{2}(n+2)(n+3)$, $H^k(\Omega)$ – пространство Соболева порядка k, $C^k(R^d \times \overline{\Omega})$ – пространство Фреше k раз непрерывно дифференцируемых в $R^d \times \overline{\Omega}$ функций.

Теорема. *Пусть* $f \in C_m$, $g \in H_m$. *Тогда для достаточно больших* m *существует такое* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m) > 0$, *что при* $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ *задача* (1), (2) *имеет почти-периодическое решение* $u(x,t) \in \overset{\circ}{H}_k$, *причем* $k = k(m) \to +\infty$ *при* $m \to +\infty$. *Если* f *и* g – *квазипериодические функции с частотным базисом* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$, *то* $u(x,t)$ *также является квазипериодической с указанным базисом частот.*

[1] Мозер Ю. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // УМН. 1968. Т. 23. №4. С. 179–238. [2] Rabinovitz P.H. Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations. II // Comm. Pure Appl. Math. 1969. V. 22. №1. P. 15–39.

Шишкин Г.И. (Екатеринбург) *"Аппроксимация решений краевых задач для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений с параболическими пограничными слоями"*

Задача Дирихле для уравнения эллиптического типа

$$\varepsilon \Delta u(x) + b(x) \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) = f(x), \qquad x \in D, \tag{1}$$

где $b(x) \ge b_0 > 0$, D – прямоугольник, ε – параметр из полуинтервала $(0, 1]$, является бисингулярной [1]. При $\varepsilon \to 0$ в окрестности множества Γ_0 – сторон, параллельных оси x_1, появляются параболические пограничные слои. В [2] для решения краевой задачи построена специальная разностная схема (классическая разностная аппроксимация уравнения [1] на специальной прямоугольнсй сетке $\overline{D}_h^c$, сгущающейся в пограничных слоях). В докладе рассмотрена краевая задача для уравнения (1) с граничным условием Неймана на Γ_0:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_2} u(x) &= \Psi(x), \qquad x \in \Gamma_0, \\ u(x) &= \Phi(x), \qquad x \in \Gamma \setminus \Gamma_0. \end{aligned} \tag{2}$$

ТЕОРЕМА. *Решение специальной разностной схемы (классической разностной аппроксимации задачи* (1), (2) *на специальной сетке* $\overline{D}_h^c$ *из* [2]) *сходится к решению краевой задачи* (1), (2) *равномерно относительно параметра.*

[1] Il'in A.M. Method of matched asymptotic expansions // Proc. BAIL IV. Dublin: Boole Press. 1986. P. 98–109. [2] Шишкин Г.И. Разностная аппроксимация сингулярно возмущенной краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений, вырождающихся в уравнение первого порядка // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 23. №4. С. 550–556.

Шишков А.Е. *"Задача Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений высокого порядка с растущими на бесконечности начальными данными"*

Изучается следующая задача Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D_x^\alpha a_\alpha(x,t,u,\ldots,\nabla_x^m u) = 0, \qquad m \geq 1, (x,t) \in R^n \times (0,T), \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(R^n). \tag{2}$$

Здесь каратеодориевы функции $a_\alpha(x,t,\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(m)})$ удовлетворяют условиям коэрцитивности и монотонности:

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,t,\xi)\xi_\alpha^{(m)} \geq d_0|\xi^{(m)}|^p, \qquad d_0 > 0,\ p > 2;$$

$$\sum_{|\alpha|=m} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha^{(m)} - \eta_\alpha^{(m)}) \geq d_1|\xi^{(m)} - \eta^{(m)}|^p, \qquad d_1 > 0,$$

а также естественным условиям роста по ξ.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию:*

$$h(\tau) \equiv \int_{|x|<\tau} u_0^2(x)\,dx \leq \nu h_0(\tau) \equiv \nu\tau^{n+\frac{2mp}{p-2}} \quad \forall\tau > \tau_0 > 0. \tag{3}$$

Тогда $\exists T^* = T^*(\nu) > 0$ *такое, что задача* (1), (2) *имеет обобщенное решение*

$$u(x,t) \in W_{T^*,\mathrm{loc}}(R^n) \equiv \left\{v : v \in L_p\left(0,T^*;W_{p,\mathrm{loc}}^m(R^n)\right); \frac{\partial v}{\partial t} \in L_{p'}\left(0,T^*;W_{p',\mathrm{loc}}^{-m}(R^n)\right)\right\}.$$

(При более жестком ограничении на рост $h(\tau)$ доказана единственность решения. Если $h(\tau)/h_0(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, то решение существует $\forall T < \infty$).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $u_0 \in L_{2,\mathrm{loc}}(R^n)$, $u_0(x) = 0\ \forall x : x_n > 0$;

$$f(T) \equiv \sup\{x_n : x = (x', x_n) \in \operatorname{supp} u(x,T)\},$$

где $u(x,t)$ – *решение задачи* (1), (2). *Обозначим* $g(\tau) \equiv \tau^{-1}h(\tau)^{\frac{p-2}{2mp+n(p-2)}}$, $\widetilde{g}^{-1}(s) \equiv \inf\{\tau : g(\tau) = s\}$. *Имеет место следующая (в определенном смысле точная) оценка скорости изменения* $\operatorname{supp} u(x,t)$:

$$f(T) \leq c_1 \left[h\left(\widetilde{g}^{-1}\left(cT^{-\frac{2}{2mp+n(p-2)}}\right)\right)\right]^{\frac{p-2}{2mp+n(p-2)}} T^{\frac{2}{2mp+n(p-2)}}.$$

Секция "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

Азбелев Н.В., Малыгина В.В. (Пермь) *"Некоторые признаки устойчивости скалярных функционально-дифференциальных уравнений"*

Рассматривается скалярное функционально-дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) + \int_\tau^t x(s)\, d_s r(t,s) = 0, \qquad t \geq \tau, \tag{1}$$

где функция $r(\cdot, s) : [s, \infty) \to \mathbb{R}$ измерима, а функция $r(t, \cdot) : [\tau, t] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченное изменение $v(t) = \operatorname{var}_{s\in[\tau,t]} r(t,s)$. Интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса. Обозначим

$$h(t) = \sup\{s \in [\tau, t] : r(\xi, \eta) \equiv 0, \ \ \forall \xi \geq t, \ \ \forall \eta \leq s\}.$$

Теорема. *Пусть функция $r(t,\cdot)$ не убывает, $v \notin L_1[\tau, \infty)$,*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{h(t)}^t v(s)\, ds < 3/2.$$

Тогда для любого решения (1) *справедлива оценка:*

$$|x_\tau(t)| \leq N \exp\left\{-\alpha \int_\tau^t v(s)\, ds\right\} \qquad \forall t \in \tau \ (N, \alpha > 0).$$

Доказательство теоремы приведено в [1].

[1] Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости линейных скалярных уравнений с последействием // Функционально-дифференциальные уравнения. Межвуз. сб. научн. труды. Пермь 1992. С. 127–132.

Балтаг В.А., Вулпе Н.И., Николаев И.В. (Кишинев) *"Топологические структуры окрестности окружности круга Пуанкаре общей квадратичной дифференциальной системы"*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j + a^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta} x^\alpha x_\beta \qquad (j, \alpha, \beta = 1, 2), \tag{1}$$

с действительными коэффициентами.

В работе [1] доказано, что всевозможные наборы изолированных бесконечно удаленных особых точек данной кратности исчерпываются множествами M_k $(k = 1, \ldots, 36)$, где каждое M_i определяется аффинно–инвариантными условиями, заданными в виде конечного числа равенств или неравенств между полиномами от коэффициентов невырожденной системы (1). Нами исследованы всевозможные топологические структуры окрестности окружности круга Пуанкаре невырожденных систем (1), принадлежащих каждому из множеств M_k. При этом эквивалентные топологические структуры, принадлежащие различным множествам M_k, объединены в один топологический класс T_i. Пусть $N(T)$ – число таких топологических классов, а $\widetilde{\mathbb{E}}^{12}$ – пространство невырожденных систем (1) с изолированными удаленными особыми точками. Имеет место

Теорема. *$N(T) = 40$ и классы T_i образуют аффинно-инвариантное разбиение пространства $\widetilde{\mathbb{E}}^{12}$, т.е. $\widetilde{\mathbb{E}}^{12} = \bigcup_{i=1}^{40} T_i$, $T_i \bigcap_{i\neq j} T_j = 0$ и каждое T_i – аффинно-инвариантно.*

[1] Балтаг В.А., Вулпе Н.И. // Изв. АН республ. Молдова. 1993. №1(11). С. 39–48.

Беркович Л.М. (Самара) *"Прямые методы нахождения точных инвариантных решений для уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП) и связанных с ним нелинейных уравнений теплопроводности"*

Использованные в работе [1] методы преобразования переменных и факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для поиска точных инвариантных решений $u(\tau)$, где $\tau = ax + bt$, $a, b = \mathrm{const}$ уравнений КПП, Семенова и Зельдовича, распространяются на уравнения вида

$$u_t = \partial_x(\psi(u)u_x) + \varphi(u)u_x + f(u).$$

Теорема 1. *Эталонное ОДУ*

$$a^2\partial_\tau(\psi(u)u_\tau) + a\varphi(u)u_\tau - bu_\tau + f(u) = 0$$

преобразованием $\theta = \dot{u}$, $d\xi = 1/\psi(u)d\tau$ *приводится к уравнению Льенара*

$$\theta_{\xi\xi} + (a^{-1}\varphi(\theta) - ba^{-2})\theta_\xi + a^{-2}f(\theta)\psi(\theta) = 0$$

(при $\varphi(\theta) = 0$ *получается полулинейное ОДУ).*

Теорема 2. *Для уравнения Льенара*

$$y'' + \Phi(y)y'^2 + F(y) = 0, \qquad (') = d/dx,$$

существует факторизация $(D - g_2(y)/D - g_1(y))y = 0$, $D = d/dx$, *где* $g_1(y)$ *и* $g_2(y)$ *удовлетворяют уравнениям Абеля 2-го и 1-го рода соответственно:*

$$y^2 g_1 g_1^* + y g_1^2 + y\Phi(y)g_1 + F(y) = 0, \quad F(y)g_2^* = g_2^3 + \Phi(y)g_2^2 + F^*(y)g_2, \quad (^*) = d/dy.$$

[1] Беркович Л.М. Факторизация как метод нахождения точных инвариантных решений уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова и связанных с ним уравнений Семенова и Зельдовича // ДАН. 1992. Т. 322. №5. С. 823–827.

Бланк М.Л. (Москва) *"Явление локализации в хаотических динамических системах"*

Пусть $\{f_i\}_i$ – последовательность отображений единичного отрезка X в себя. Зафиксируем натуральное число d и квадратную матрицу $E = ((e_{ij}))$, $1 \le i, j \le d$, $|e_{ij}| \le 1$. *Решеткой слабо взаимосвязанных отображений* будем называть отображение d-мерного куба X^d в себя, i-я координата которого задается формулой

$$(F_{\varepsilon,d}x)_i = f_i x_i + \varepsilon\sum_j e_{ij} f_j x_j; \qquad \sum_j e_{ij} = 0.$$

Теорема. *Пусть отображения f_i являются кусочно растягивающими с константами растяжения большими 2. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система $(F_{\varepsilon,d}, X^d)$ имеет стохастический аттрактор с гладкой инвариантной мерой, относительно которой выполняется центральная предельная теорема и скорость убывания корреляций экспоненциальна.*

Покажем теперь, что кроме подобного "стохастического" поведения у слабо взаимосвязанных систем может возникнуть также явление локализации.

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 отбросить предположение, что константа растяжения больше 2, то при $d \ge 2$ найдется такое отображение f, что при $f_i = f$ и при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ все устойчивые инвариантные меры системы $(F_{\varepsilon,d}, X^d)$ сосредоточены на периодических траекториях конечного периода.*

Брюно А.Д. *"О сохранении инвариантных торов системы Гамильтона"*

Основное содержание доклада опубликовано в [1].

[1] Брюно А.Д. Об условиях невырожденности в теореме Колмогорова // ДАН. 1992. Т. 322. №6. С. 1028–1032.

Гельфрейх В.Г., Лазуткин В.Ф., Сванидзе Н.В. (Санкт-Петербург) *“Последние результаты по экспоненциально малому расщеплению сепаратрис в гамильтоновых системах”*

Рассматривается стандартное отображение $SM : (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \to (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$, задаваемое формулами $(X, Y) \mapsto (X + Y + \varepsilon \sin X, Y + \varepsilon \sin X)$. Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Стандартное отображение имеет неподвижную точку (0,0). Справедливо следующее асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ разложение для гомоклинического инварианта $\omega(\gamma)$ главной гомоклинической траектории (см. определение в [1]) этой точки:

$$\omega(\gamma) = \frac{4\pi}{h} e^{-\pi^2/h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n h^{2n} \right), \tag{1}$$

здесь $h = \log \lambda = \log(1 + \varepsilon/2 + \sqrt{\varepsilon^2/-4+\varepsilon}) \approx \sqrt{\varepsilon}$. Коэффициенты в разложении (1) вычисляются в процессе численного решения на компьютере рекуррентной последовательности задач, не зависящих от параметра ε. Для первых коэффициентов получено $\omega_0 = 1118.827706\ldots$, $\omega_1 = 18.59891\ldots$, $\omega_2 = -4.3441\ldots$, $\omega_3 = -4.1829\ldots$, $\omega = -4.88\ldots$. Подробное изложение имеется в препринте [2].

[1] Gelfreich V.G., Lazutkin V.F., Tabanov M.B. Exponentially small splitting in hamiltonian systms // Chaos 1991. V. 1. №2. P. 137–142. [2] Gelfreich V.G., Lazutkin V.F., Svanidze N.V. Refined formula to separatrix splitting for the standart map. Warwick preprints: 59/1992. P. 32.

Данилин А.Р., Ильин А.М. (Екатеринбург) *“О малом возмущении решения линейной задачи быстродействия”*

Для вполне управляемой линейной системы $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(t_0) = x_0$, $\|u\| \le 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\operatorname{rank} B = m \in [2, n-1]$ рассматривается задача оптимального быстродействия:

$$x(\theta_0) = 0, \quad \theta_0 \to \min.$$

Пусть x_0 таково, что соответствующее ему оптимальное управление $u_0(t) = B^* \exp(-A^*t)l \times \|B^* \exp(-A^*t)l\|^{-1}$ имеет единственную точку разрыва $\bar{t} \in (t_0, \theta_0)$, в которой $B^* \exp(-A^*\bar{t})l = 0$, а $B^*A^* \exp(-A^*\bar{t})l \ne 0$.

Рассмотрим малое возмущение вектора x_0 и соответствующую задачу быстродействия:

$$\begin{gathered} \dot{x}_\varepsilon = Ax_\varepsilon + Bu_\varepsilon, \\ x_\varepsilon(t_0) = x_0 + \varepsilon\overline{x}, \quad x_\varepsilon(\theta_0) = 0, \\ \|u_\varepsilon\| \le 1, \quad \theta_\varepsilon \to \min, \quad \text{где } x \text{ – фиксированный вектор, } 0 < \varepsilon \ll 1. \end{gathered} \tag{1}$$

Оказывается, что асимптотика оптимального управления $u_\varepsilon(t)$ и решения $x_\varepsilon(t)$ не может быть представлена в виде асимптотического ряда по последовательности калибровочных функций вида $\varepsilon^\lambda R(\ln \varepsilon)$, где R – рациональная функция. В действительности, калибровочные функции для этой задачи могут быть получены, исходя из решений уравнения типа $\varepsilon = \delta = (\ln \delta)^{-1}$. При некоторых дополнительных условия (которые, в частности, выполнены, если $A^2 = 0$) построено и обосновано асимптотическое разложение задачи (1) с точностью до любой степени ε.

Изобов Н.А., Прохорова Р.А. (Минск) *“Множества Конти–Коппеля линейных систем с суммируемыми возмущениями”*

Рассматриваем введенные В.Коппелем [1] в случае $p = 1$ и Р.Конти [2] в случае $p > 1$ множества $L^p S$ всех тех линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \ t \ge 0, \tag{1_A}$$

с вещественными кусочно-непрерывными, вообще говоря, неограниченными на полуоси матрицами коэффициентов $A(\cdot)\colon [0, +\infty) \to \operatorname{Hom}(R^n, R^n)$, для норм матриц Коши $X_A(t, s)$ которых выполнено условие

$$\int_0^t \|X_A(t, s)\|^p \, ds \le C_p(A) < +\infty, \qquad t \ge 0. \tag{2}$$

Эти системы полностью определяют [1], [2] ограниченность всех решений системы $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ с соответствующими неоднородностями. Распространим определение множества $L^p S$ в случае $p \ge 1$ с помощью условия (2) и на случай $p > 0$. Будем отождествлять систему (1_A) с ее матрицей коэффициентов A.

Теорема 1. *Если $A \in L^pS$ при $p > 1$ и выполнено неравенство*

$$\int_0^{+\infty} \|A(\tau) - B(\tau)\|^q \, d\tau < +\infty \tag{3}$$

для некоторого числа $q \geq p/(p-1)$, то и $B \in L^pS$.

Следствие. *Если $A \in \lim\limits_{p\to\infty} L^pS$ и выполнено неравенство* (3) *при некотором $q > 1$, то и $B \in \lim\limits_{p\to\infty} L^pS$.*

Теорема 2. *Для любого числа $p > 0$ существуют такие системы $A \in L^pS$ и $B \notin \lim\limits_{\gamma\to+\infty} L^\gamma S$, что неравенство* (3) *выполнено:*

1) *для всех $q \in (0, +\infty)$ в случае $p \leq 1$;*
2) *для всех $q \in (0, p/(p-1))$ в случае $p > 1$.*

[1] Coppel W.A. Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations.. Boston, 1965.
[2] Conti R. On the bounedness of solution of ordinary differential equations // Funcialay Ekvacioj. 1966. V. 9. P. 23–26.

Клоков Ю.А. *"О правильных решениях системы 4-го порядка типа Эмдена–Фаулера"*

Изучаются положительные, правильные (определенные при $0 \leq t < \infty$) решения системы

$$\begin{gathered} x_i'' + t^{-1}k_i x_i' + a_i x_i t^{p_i-2} x_1^{n_i} x_2^{m_i} = 0, \\ x_i'(0) = 0, \quad x_i(t) > 0, \qquad 0 \leq t < \infty, \end{gathered} \tag{1}$$

$$a_i, n_i, m_i, p_i - 1, k_i + 1 > 0 \ (i = 1, 2), \quad n_i\gamma_1 + m_i\gamma_2 = p_i \ (i = 1, 2), \quad \Delta = n_1m_2 - m_1n_2.$$

Пусть $\Delta \neq 0$ и $k_i \geq 1 + 2\gamma_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда правильные решения системы (1) существуют.

Если $\Delta = 0$, то в зависимости от параметров таких решений вообще нет или их существует бесконечно много.

Мышкис А.Д. (Москва), Енсебаева М.З. (Алма-Ата) *"Качение поверхности по двум линиям"*

Пусть поверхность $Q \subset \mathbb{R}^3$ класса C^3 с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{g}(u, v)$ катится без проскальзывания по линиям $L_i \subset \mathbb{R}^3$ $(i = 1, 2)$ класса C^3 с уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{f}_i(s_i)$ (s_i – длина дуги). Процесс качения описывается однопараметрическим непрерывным семейством движений $K_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ таким, что: $K_\alpha Q \cap L_i = \{M_{i\alpha}\}$ $(i = 1, 2)$; $M_{i\alpha}$ непрерывно зависит от α; $K_{\alpha+\Delta\alpha}K_\alpha^{-1}$ при $\Delta\alpha \to 0$ представляет собой, с точностью до $o(\Delta\alpha)$, поворот вокруг оси $M_{1\alpha}M_{2\alpha}$. Отсюда вытекает, что в процессе качения должны выполняться дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered} |d\mathbf{g}(u_i, v_i)| = |d\mathbf{f}_i(s_i)|, \\ [\mathbf{g}(u_2, v_2) - \mathbf{g}(u_1, v_1)] \cdot d\mathbf{g}(u_i, v_i) = [\mathbf{f}_2(s_2) - \mathbf{f}_1(s_1)] \cdot d\mathbf{f}_i(s_i) \quad (i = 1, 2), \\ d\mathbf{g}(u_1, v_1) \cdot d\mathbf{g}(u_2, v_2) = d\mathbf{f}_1(s_1) \cdot d\mathbf{f}_2(s_2), \end{gathered} \tag{1}$$

где u_i, v_i – координаты точки $K_\alpha^{-1}M_{i\alpha}$.

Выберем за параметр α значение $s := s_1$; тогда $u_i = u_i(s)$, $v_i = v_i(s)$ $(i = 1, 2)$, $s_2 = \varphi(s)$ – искомые функции. Из уравнений (1) можно алгебраически исключить u_1', v_1', u_2'/φ', v_2'/φ' ($' = d/ds$) что приводит к конечному уравнению вида $B(u_1, v_1, u_2, v_2, s, \varphi) = 0$.

Теорема. *Пусть при некотором значении $s = s_0$ заданы значения всех функций u_i, v_i, φ и их производных 1-го порядка, при которых все уравнения* (1) *удовлетворяются и выполнены неравенства*

$$\varphi' \neq 0; \quad \{d\mathbf{g}(u_i, v_i) \times [\mathbf{g}(u_2, v_2) - \mathbf{g}(u_1, v_1)]\} \cdot [\mathbf{g}_u(u_i, v_i) \times \mathbf{g}_v(u_i, v_i)] \neq 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$B_\varphi \neq 0, \quad B_{u_1}u_1' + B_{v_1}v_1' + B_2 \neq 0, \quad B_{u_2}u_2' + B_{v_2}v_2' + B_\varphi\varphi' \neq 0.$$

Тогда при достаточно малых $|s - s_0|$ решение системы (1) *существует, единственно и непрерывно зависит от заданных функций и начальных данных.*

Система уравнений (1) имеет первый интеграл $[\mathbf{g}(u_2, v_2) - \mathbf{g}(u_1, v_1)]^2 - [\mathbf{f}_2(s_2) - \mathbf{f}_1(s_1)]^2 = C$ и ее решения имеют кинематический смысл только при $C = 0$.

Миллионщиков В.М. *"К общей теории устойчивости"*

Определение. Линейная система

$$\dot{u} = A(t)u \tag{1}$$

называется SECAP-*системой*, если для всякой непрерывной, непрерывно дифференцируемой по u функции $\varphi(t,u)$, такой, что $|\varphi(t,u)| \le C(|u|^{1+\varepsilon}$ (для некоторых $C > 0$, $\varepsilon > 0$, всех $t \ge 0$ и всех u из некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$) найдется подмногообразие $V_{A,\varphi}$ в $\mathbb{R}^n$, касающееся в нуле векторного пространства $V_{A,0}$, в котором начинаются экспоненциально убывающие при $t \to \infty$ решения системы (1), и такое, что

1) $\dim V_{A,\varphi} = \dim V_{A,0}$;
2) всякое решение системы

$$\dot{u} = A(t)u + \varphi(t,u), \tag{2}$$

начинающееся в $V_{A,\varphi}$, экспоненциально убывает при $t \to +\infty$;
3) существует $\eta > 0$ такое, что всякое решение $u(t)$ системы (2), удовлетворяющее при некотором $\alpha > 0$ и всяком $t \ge 0$ неравенству $|u(t)| \le \eta \exp(-\alpha t)$, начинается в $V_{A,\varphi}$.

Пусть на полном метрическом пространстве D задана динамическая система f^t. Обозначим через S множество всех непрерывных ограниченных отображений $A(\cdot)\colon D \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$, наделенное топологией равномерной сходимости.

Теорема. *Для всякого $x \in D$ множество тех $A(\cdot) \in S$, для которых $\dot{u} = A(f^t x)u$ есть* SECAP-*система, плотно в S.*

Миллионщиков В.М. *"Нерешенная задача о показателях Ляпунова нелинейных систем"*

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и V – компактное n-мерное гладкое многообразие класса C^{m+1}, F – векторное поле класса C^m на V, f^t – порожденный им поток.

Определение. Для всяких $k \in \{1,\dots,n\}$, $i \in \{0,\dots,m\}$, $x \in V$ положим

$$l_k^{(i)}(F,x) := \inf_{D \in \mathfrak{L}_i^{n-k+1}(x)} \inf_{r>0} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \sup_{\substack{x\in D,\\ d(y,x)\in(0,r)}} \ln \frac{d(f^{t'}y, f^t x)}{d(y,x)},$$

где $d(\cdot,\cdot)$ – расстояние на V, порожденное некоторой римановой метрикой, а $\mathfrak{L}_i^q(x)$ – множество образов q-мерного подпространства n-мерного евклидова пространства E^n при всевозможных диффеоморфизмах $E^n \to V$ (класса C^i), отображающих 0 в x, i-я производная которых удовлетворяет условию Липшица на каждом компакте.

Определение корректно, т.е. $l_k^{(i)}(F,x)$ не зависят от римановой метрики на V.

Задача. Сколько строгих неравенств может содержаться в цепочке

$$l_k^{(0)}(F,x) \le l_k^{(1)}(F,x) \le \dots \le l_k^{(m)}(F,x)$$

при данном $k \in \{2,\dots,n\}$?

Орочко Ю.Б. *"Примеры симметрических дифференциальных операторов на прямой с бесконечными индексами дефекта"*

Пусть

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{l} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

– произвольный действительный тригонометрический многочлен. Рассмотрим наряду с $q(x)$ алгебраический многочлен

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{l-1} \bar{c}_{l-k}\lambda^k + c_0\lambda^l + \sum_{k=l+1}^{2l} c_{k-l}\lambda^k, \qquad c_0 = a_0,\ c_k = a_k - ib_k.$$

Преобразование Фурье минимального оператора H в $L^2(R)$, порожденного дифференциальным выражением $s_{2n}[f] = (-1)^n \left(q(x) f^{(n)}\right)^{(n)}$, $n \geq 1$ переводит H в функционально-разностный оператор порядка $2l$. Вопрос об индексах дефекта последнего легко сводится к вопросу о поведении на бесконечности достаточно простого возмущения линейного однородного функционально-разностного уравнения с постоянными коэффициентами, характеристический многочлен которого совпадает с $P(\lambda)$. Этот факт используется для доказательства следующего утверждения.

ТЕОРЕМА. *Пусть все корни многочлена $P(\lambda)$ лежат на единичной окружности; обозначим через p наибольшую из их кратностей. Тогда при $n \geq p$ оператор H имеет бесконечные индексы дефекта.*

В случае дифференциального выражения $s_2[f]$ с действительным достаточно гладким знакопеременным или неотрицательным вырождающимся коэффициентом $q(x)$ установлена зависимость индексов оператора H от числа и характера нулей $q(x)$.

Пилюгин С.Ю. (Санкт-Петербург) *"Псевдотраектории и вычисление показателей Ляпунова"*

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм класса C^2, $D\varphi(x)$ – дифференциал φ в точке x. Пусть $\mu(p)$ – старший показатель Ляпунова траектории, проходящей через точку p:

$$\mu(p) = \max_{v\in\mathbb{R}^n, |v|=1} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln \left|D\varphi^m(p)v\right|.$$

Фиксируется отображения $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to L_n$ (L_n – пространство матриц $n \times n$). Для пары (ψ, Φ) и для точки $x \in \mathbb{R}^n$ определяются $x_k = \psi^k(x)$, $k = 0, 1, \ldots,$

$$\widetilde{\mu}(x) = \max_{v\in\mathbb{R}^n, |v|=1} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln \left|\Phi(x_{m-1}) \ldots \Phi(x_0)v\right|.$$

Обозначим $N_a(A)$ a-окрестность множества A.

ТЕОРЕМА. *Пусть Λ – локально максимальное гиперболическое множество для φ с одномерным неустойчивым слоением. Существуют такие L, Δ, $\varepsilon > 0$, что если при некотором $\delta \in (0, \varepsilon)$*

(a) $|\varphi(\xi) - \psi(\xi)| \leq \delta$, $\|D\varphi(\xi) - \Phi(\xi)\| < \delta$ *для* $\xi \in N_\Delta(\Lambda)$,

(b) *для точки* $x \in N_\delta(\Lambda)$ $x_k = \psi^k(x) \in N_\Delta(\Lambda)$, $k \geq 0$,

то найдется точка $p \in \Lambda$ *с* $|\mu(p)\widetilde{\mu}(x)| \leq L\delta$.

Этот результат – часть совместной работы с Р.Корлессом (Канада).

Родионова А.Г, Тонков Е.Л. (Ижевск) *"О свойствах функции быстродействия линейных управляемых систем"*

Мы рассматриваем управляемую систему

$$\dot{x} = A\left(f^t\omega\right)x + u, \quad u \in U\left(f^t\omega\right),\ t \in \mathbb{R}^1, \tag{1}$$

в предположениях работы [1]. Все обозначения также заимствованы из [1]. Будем говорить, что система (1) *дифференциально управляема вдоль потока* f^t, если для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $t \in \mathbb{R}^1$ имеет место включение $0 \in \operatorname{int} D_\varepsilon\left(f^t\omega\right)$ ($D_\varepsilon(\omega)$ – множество управляемости системы (1) на $[0,\varepsilon]$).

Теорема 1. *Функция $x \to T(x,\omega_0)$ непрерывна в эффективной области $D(\omega_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid T(x,\omega_0) < \infty\}$ в том и только в том случае, если система* (1) *дифференциально управляема вдоль потока f^t.*

Теорема 2. *Если функция $x \to T(x,\omega_0)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то функция $\omega \to T(x_0,\omega)$ непрерывна в точке $\omega = \omega_0$.*

Теорема 3. *Функция $(x,t) \to T(x, f^t\omega_0)$ непрерывна на множестве $D\left(f^t\omega_0\right) \times \mathbb{R}^1$ в том и только в том случае, если система* (1) *при $\omega = \omega_0$ дифференциально управляема вдоль потока f^t.*

Следствие 1. *Пусть $U\left(f^t\omega\right) = B\left(f^t\omega\right)V$, где $V = \{v = (v_1,\dots,v_m) \in \mathbb{R}^m \mid 0 \le v_i \le 1, i = 1,\dots,m\}$, $B\colon \Omega \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, $m \le n$. Тогда для любого $\omega \in \Omega$ и любого $\tau \ge 0$ найдется точка $x_0 \in \partial D_\tau(\omega)$, в которой функция $x \to T(x,\omega)$ разрывна.*

[1] Иванов А.Г., Тонков Е.Л. Метрические свойства линейных управляемых систем // УМН. 1991. Т. 27. №10. С. 1698–1699.

Розов Н.Х., Сушко В.Г. *"Барьерные функции и асимптотическое представление некоторых сингулярно возмущенных задач"*

Рассмотрим краевую задачу ($\varepsilon > 0$ – малый параметр)

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 y''' + \varepsilon r(x) y'' = p(x) y' + h(x,y), \quad a < x < b, \\ y(a) = a_0,\ \ y'(a) = a_1,\ \ y'(b) = b_1, \end{gathered} \tag{1}$$

в предположениях:

1) функция $p(x)$ имеет единственный нуль $\tau \in (a,b)$;
2) хотя бы одна из функций $r(x)$, $p(x)$, $h(x,y)$ (при каждом фиксированном y) имеет точку разрыва 1-го рода $\theta \in (0,b)$, $\theta \ne \tau$, а на отрезках $[a,\theta]$, $[\theta,b]$ они бесконечно дифференцируемы (по x);
3) $h(\tau,0) = 0$, $h'_y(x,y) \ge h_0 > 0$ при каждом y в некоторой окрестности точки τ.

Допустим, что для вырожденного уравнения

$$p(x)y' + h(x,y) = 0, \quad a < x < b, \tag{2}$$

существуют нижняя $\alpha(x)$ и верхняя $\beta(x)$ барьерные функции, т.е. такие функции, что на отрезке $[a,b]$ вне окрестности точки τ

$$\begin{gathered} [p(x)\alpha'(x) + h(x,\alpha(x))] \operatorname{sign} p(x) \le 0, \\ [p(x)\beta'(x) + h(x,\beta(x))] \operatorname{sign} p(x) \ge 0. \end{gathered}$$

Теорема. *Пусть выполнены указанные предположения. Тогда:*

1) *если $r(x) < 0$ при $a \le x \le \theta$ и $r(x) > 0$ при $\theta \le x \le b$, а $p(x) > 0$ при $x \ne \tau$, то существует решение задачи (1), стремящееся при $\varepsilon \to 0$ к непрерывному на отрезке $[a,b]$ решению уравнения (2), удовлетворяющему условию $y(a) = a_0$;*
2) *если $p(x) < 0$ и $r(x) < 0$ при $x \ne \tau$, то у задачи (1) не существует решения, имеющего поточечным пределом при $\varepsilon \to 0$ какое-либо решение уравнения (2).*

Аналогичные утверждения справедливы для всех случаев чередования знаков функций $r(x)$ и $p(x)$, а также при наличии конечного числа нулей и точек разрыва.

Росиков Ю.В. *"Нормализация гамильтоновых систем, близких к интегрируемым, в окрестности резонансов"*

Рассмотрим аналитическую 2π-периодическую по $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ функцию

$$H = H_0(I) + H_1(I,p,\varphi,q),$$

$I,\varphi \in \mathbb{C}^s$, $p,q \in \mathbb{C}^{n-s}$, заданную на множестве $F = \{I \in Ai, (p,q) \in Apq, |\operatorname{Im} \varphi_j| \le \rho, j = 1,\dots,s\}$, где $Ai \subset \mathbb{C}^s$, $Apq \subset \mathbb{C}^{2(n-s)}$ – области, $\rho > 0$. Обозначим через $\mathcal{H}_1$ сумму гармоник функции H_1 с номерами $k \in \lambda$, где λ – линейная оболочка всех ν-резонансных для множества Ai векторов $k \in \mathbb{Z}^s$, $|k| < N$.

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1) $\|\partial H_0(I)/\partial I^2\| \le m$ *при* $I \in Ai$;
2) $\dim \lambda \le s$;
3) *на множестве* F $\|\operatorname{grad} H_1\| \le M$.

Можно указать функции $\theta_i(n,s,\rho,m,\varkappa)$, $i = 1,\dots,10$, $\varkappa \in (0,1)$, такие, что при $N > \theta_1$, $\nu < \theta_2$, $\nu/N^{\theta_3} > \theta_4 \exp(-\theta_5 N)$, $\theta_6 M N^{(s+1)(1-\varkappa)}/\nu^2 < 1$, $\rho < 12$, существует аналитический канонический диффеоморфизм $B\colon J,P,\psi,Q \to I,p,\varphi,q$ со следующими свойствами:

1. *B отображает некоторое множество $F_1 \subset F$ на множество $F_2 = \{I \in Ai - b_1, (p,q) \in Apq - b_2, |\operatorname{Im} \varphi| \le \rho - b_3\}$, где $b_1 = \theta_7 M N^{(s+1)(1-\varkappa)}/\nu$, $b_2 = \theta_8(M N^{(s+1)(1-\varkappa)}/\nu)^{1/2}$, $b_3 = \rho/3$.*
2. *На множестве F_1 верны оценки: $\|J - I\| < b_1$, $\|P,Q - p,q\| < b_2$, $\|\psi - \varphi\| < b_3$.*
3. $H'(J,P,\psi,Q) \stackrel{\text{def}}{=} H \circ B = H_0(J) + \mathcal{H}_1(J,P,\psi,Q) + \mathcal{H}_2(J,P,\psi,Q) + R(J,P,\psi,Q)$.

Причем ряд Фурье функции $\mathcal{H}_2$ содержит только гармоники с номерами $k \in \lambda$, и имеют место оценки

1) $|\mathcal{H}_2| < \theta_9 M/N^{(s+1)(1-\varkappa)}$;
2) $|\operatorname{grad}_\psi R| < \theta_{10} \left(M/N^{(s+1)(1-\varkappa)} \exp(-\rho N^{1-\varkappa}\right)$.

Сергеев И.Н. (Москва) *"О подвижности знаков показателей Ляпунова линейных гамильтоновых систем"*

Среди характеристических показателей $\lambda_1(A) \le \dots \le \lambda_{2n}(A)$ линейной гамильтоновой системы с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами (л.г.с.)

$$\text{(A)} \qquad \dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2n},\ t \in \mathbb{R}^+,$$

может быть любое число ненулевых показателей, а среди них – любое число отрицательных, лишь бы оно не превосходило числа положительных.

Теорема 1. *Вся всякой* л.г.с. (A) *и любого $\varepsilon > 0$ существует возмущенная* л.г.с.

$$\text{(B)} \qquad \dot{x} = B(t)x,$$

удовлетворяющая условиям

$$\lambda_n(B) < 0 \quad \text{и} \quad \|B(t) - A(t)\| < \varepsilon \quad \text{при } t \in \mathbb{R}^+.$$

Теорема 2. *Для всякой* л.г.с. (A) *существует возмущенная* л.г.с. (B), *удовлетворяющая условиям*

$$\lambda_n(B) \le 0 \quad \text{и} \quad \|B(t) - A(t)\| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Секция “Спектральная теория”

Власов В.В. *“О свойствах решений одного класса функционально-дифференциальных уравнений и некоторых спектральных вопросах”*

Изучаются свойства сильных решений задачи вида

$$\frac{du}{dt} + \sum_{j=0}^{n} B_j A u(t-h_j) + \int_{-h}^{0} B(s) A u(t+s)\,ds = 0, \qquad t \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty), \tag{1}$$

$$u(t) = g(t), \quad t \in [-h, 0), \qquad u(+0) = \varphi_0.$$

Здесь A – самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, A^{-1}, B_j $(j = 1, 2, \dots, n)$, $B(s)$, $(s \in [-h, 0])$ – компактные операторы в $\mathfrak{H}$, $B_0 = I$, оператор-функция $B(s)$ интегрируема по Бохнеру на $[-h, 0]$, $\|B(s)\| \in L_2(-h, 0)$, числа h_j: $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n = h$, вектор-функция $g(t)$ такова, что $g(t) \in W_2^{(1)}\big((-h, 0), A\big)$ (подробнее см. [1]), вектор $\varphi_0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Введем оператор-функцию

$$\mathcal{L}(\lambda) = \lambda I + \sum_{j=0}^{n} B_j A \exp(-\lambda h_j) \left(\int_{-h}^{0} \exp(\lambda s) B(s)\,ds \right) A.$$

Теорема 1. *Пусть оператор-функция* $\left(\mathcal{L}(\lambda) A^{-1}\right)^{-1}$ *существует и ограничена на мнимой оси. Тогда элементарные решения* $y_{q,j,s}(t)$ *уравнения* (1), *построенные* (см. [1]) *по корневым векторам* $x_{q,j,0}, \dots, x_{q,j,s}$ *из канонической системы* с.п.в. *пучка* $\mathcal{L}(\lambda)$, *отвечающим характеристическим числам* λ_q *из левой полуплоскости, образуют минимальную систему в пространстве* $W_2^{(1)}(\mathbb{R}_+, A)$ (см. [1]).

В докладе также приводятся утверждение о поведении (об оценках) оператор-функции $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$, близкие результатам из [1].

[1] Власов В.В. Об одном классе дифференциально-разностных уравнений в гильбертовом пространстве и некоторых спектральных вопросах // ДАН. 1992. Т. 327. №4–6. С. 428–432.

Константинов А.Ю. (Киев) *“Коммутирующие расширения эрмитовых операторов и многопараметрические спектральные задачи”*

Мы устанавливаем простое аппроксимационное условие существования коммутирующих расширений (с выходом из пространства в смысле М.А.Наймарка) у конечного набора неограниченных эрмитовых операторов, позволяющее распространить результаты [1] о разложении по обобщенным собственными функциям равномерно правоопределенных многопараметрических задач на неравномерно определенный случай.

Теорема. *Пусть* $(T_k)_{k=1}^n$ *– набор неограниченных эрмитовых операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$, *определенных на общей плотной области* $\mathcal{D}$. *Предположим, что существует последовательность наборов, коммутирующих в смысле разложений единицы самосопряженных операторов* $\{(T_{k,m})_{k=1}^n \mid m \ge 1\}$, *такая, что всякий вектор из* $\mathcal{D}$, *начиная с некоторого номера* m, *попадает в* $\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{D}(T_{k,m})$ *и* $\forall u \in \mathcal{D}$ $\forall k = 1, \dots, n$ $T_{k,m} u$ *сильно сходится к* $T_k u$. *Тогда* $(T_k)_{k=1}^n$ *допускает расширение (с выходом из пространства* $\mathcal{H}$) *до коммутирующего набора самосопряженных операторов.*

[1] Березанский Ю.М., Константинов А.Ю. О разложении по собственным векторам многопараметрических спектральных задач // Функцион. анализ и его прил. 1992. Т. 26. №1. С. 81–83.

Кузнецов Н.Г. (Санкт-Петербург) *“Тождество В.Г.Мазьи и оценки снизу собственных частот установившихся колебаний жидкости в канале”*

Вопрос о ловушечных модах установившихся колебаний жидкости в бесконечном канале постоянной ширины, имеющем возвышение на дне, сводится к следующей спектральной задаче в пространстве $H^1(W)$:

$$\nabla^2 u = k^2 u \quad \text{в} \quad W; \qquad u_{x_2} - \nu u = 0 \quad \text{при } x_2 = 0;$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } B.$$

Здесь $W = \{(x_1, x_2)\colon -h(x_1) < x_2 < 0,\ x_1 \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x_2 = -h(x_1)\}$, где h – кусочно-гладкая функция, равная константе h_∞ на бесконечности и такая, что $0 < \min\{h(x)\colon x \in \mathbb{R}\} < h_\infty$; параметр $k^2 > 0$ задан, а ν – спектральный параметр, пропорциональный квадрату частоты. Известно [1, § 34], что задача имеет непрерывный спектр выше положительной частоты отсечки, ниже которой находится конечное число положительных собственных значений конечной кратности.

Теорема. *Пусть в $\overline{W}$ существует векторное поле $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ с равномерно липшицевыми компонентами, удовлетворяющее условиям:*

1) $V_1 = -x_1$, $V_2 = 0$ *при* $x_2 = 0$;
2) $A = \sup\{-(1 + \nabla \cdot \mathbf{V})|; (x_1, x_2) \in W\} > 0$;
3) $C = \inf\{\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\colon (x_1, x_2) \in B\} > 0$, *где* $\mathbf{n}$ – *единичная нормаль на* B, *направленная внутрь* W;
4) *матрица* $(1 + \nabla \cdot \mathbf{V})\delta_{ij} - (\partial V_i/\partial x_j + \partial V_j/\partial x_i)$ *неотрицательна в* $\overline{W}$.

Тогда $2\nu_1 h_m \ge \min\{1, k^2 h_m C A^{-1}\}$, *где* ν_1 – *наименьшее собственное значение, отвечающее данному* k^2, *а* $h_m = \max\{h(x)\colon x \in \mathbb{R}\}$.

Следствие. *Если*

$$C^* = \inf\left\{-\frac{\partial(x_1^2 + q x_2^2)}{\partial n}\colon (x_1, x_2) \in B\right\},$$

где $q \in (0, 2]$, *то оценка принимает вид* $4\nu_1 h_m \ge \min\{2, k^2 h_m C^*/q\}$.

Доказательство теоремы основано на тождестве В.Г.Мазьи, приведенном в [2]. Следствие получается, если взять $\mathbf{V} = (-x_1, -q x_2)$. Другие результаты, сформулированные в докладе, опубликованы в [2].

[**1**] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. [**2**] Кузнецов Н.Г. Оценки снизу собственных частот плоских колебаний жидкости в канале // ПММ 1992. Т. 56. №2. С. 342–346.

$\boxed{\text{Любишкин В.А.}}$, Подольский В.Е. *“Суммируемость регуляризованных следов дифференциальных операторов”*

Основной результат, сформулированный в докладе:

Теорема. *Пусть A – самосопряженный полуограниченный снизу эллиптический дифференциальный оператор порядка m, действующий на многообразии размерности n, а P – ограниченный оператор умножения на вещественнозначную гладкую функцию. Пусть $m > n$. Тогда*

$$\lim_{t \to 0+} \sum_k \left[\mu_k - \lambda_k + \sum_{l=0}^{n} \varkappa_l \cdot \lambda_k^{-l/m}\right] \cdot \exp(-\lambda_k t)$$
$$= \alpha_{n+m} - \widetilde{\alpha}_{n+m} - \varkappa_0 \alpha_n - \sum_{l=1}^{n} \varkappa_l \left(\operatorname*{reg}_{s=l/m} Z(s) - \gamma \frac{\alpha_{n-l}}{\Gamma(l/m)}\right),$$

где λ_k и μ_k – собственные числа операторов A и $A+P$,

$$S_p(\exp(-At)) \sim \sum \alpha_j t^{(j-n)/m}, \qquad S_p(\exp(-A+P)t)) \sim \sum \widetilde{\alpha}_j t^{(j-n)/m}$$

при $t \to 0+$, $Z(s)$ – дзета-функция оператора A, γ – постоянная Эйлера, $\varkappa_i$ выражаются через $\alpha_0, \widetilde{\alpha}_0, \ldots, \alpha_n, \widetilde{\alpha}_n$.

Михайлец В.А. (Киев) *"Спектральный анализ оператора Шредингера с точечными взаимодействиями".*

Пусть $X + \{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$ – разбиение $\mathbb{R}^1$ на отрезки длины $\Delta_n = x_{n+1} - x_n$, последовательность $A = \{a_n\}_{-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{R}^1$, вещественная функция $q(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^1)$. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^1)$ рассматривается оператор

$$H_{X,A,q} = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

с областью определения

$$D(H_{X,A,q}) = \left\{y(x) \in W_2^2(\mathbb{R} \setminus X) \cap W_2^1(\mathbb{R}) \colon y'(x_n+) - y'(x_n-) = a_n y(x_n),\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Оператор $H_{X,A,q}$ симметричен. При $a_n \equiv 0$ он совпадает с хорошо изученным оператором Шредингера H_q на оси. Менее исследована операция, когда $a_n \not\equiv 0$, но $d_0 = \inf\{\Delta_n : n \in \mathbb{Z}\} > 0$ (см. [1] и приведенную там литературу). Особенно интересен, не изученный ранее, случай $d_0 = 0$. Сформулируем основные результаты:

1. Оператор $H_{X,A,q}$ самосопряжен при всех X, A и $q(x)$.

2. Пусть $J_{X,A}$ – матрица Якоби с диагональными элементами

$$\left\{-\frac{1}{\Delta_{n-1}}, a_n + \frac{1}{\Delta_n} + \frac{1}{\Delta_{n-1}} - \frac{1}{\Delta_n}\right\}_{-\infty}^{\infty}.$$

Оператор $H_{X,A,q}$ полуограничен снизу тогда и только тогда, когда этим же свойством обладает оператор $J_{X,A}$ в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$. В частности, а) ограниченность снизу множества A гарантирует полуограниченность $H_{X,A,q}$; б) если $d_0 > 0$, то верно и обратное утверждение; в) если множество

$$\left\{a_n + \frac{1}{\Delta_{n-1}} + \frac{1}{\Delta_n}\right\}_{-\infty}^{\infty}$$

не ограничено снизу, то оператор $H_{X,A,q}$ не полуограничен (ср. [1, с. 450]).

3. Если преобразования Кэли операторов $J_{X,A}$ и $J_{X,\widetilde{A}}$ разнятся на оператор класса S_p, то резольвенты операторов $H_{X,A,q}$ и $H_{X,\widetilde{A},q}$ также разнятся на оператор из этого класса. В частности, если $a_n \to 0$, $n \to \pm\infty$, то предельные спектры операторов $H_{X,A,q}$ и H_q совпадают.

4. Спектр оператора $H_{X,A,q}$ дискретен тогда и только тогда, когда а) $\Delta_n \to 0$, $n \to \pm\infty$; б) дискретен спектр оператора $J_{X,A}$.

[1] Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.

Печенцов А.С. *"Регуляризованные следы высших порядков эллиптических операторов"*

В сепарабельном гильбертовом пространстве H действует дискретный полуограниченный снизу оператор T. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – спектр оператора T, занумерованный в порядке возрастания величин собственных значений с учетом кратности, а $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность собственных ортонормированных векторов оператора T, при этом $Tv_n = \lambda_n v_n$. Пусть P – ограниченный оператор в H, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность с.з. оператора $T+P$, занумерованная в порядке возрастания их действительных частей, с учетом алгебраической кратности. Предполагаем, что с.з. λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, имеют следующую асимптотику: $\lambda_n = C_0 n^{\alpha} + o(n^{\beta})$, где $1 < \beta \leq \alpha < \beta + 1$ и постоянная $C_0 > 0$. Справедлива

Теорема 1. $\forall t \in \mathbb{N}$ $\exists$ *подпоследовательность* $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ *натуральных чисел такая, что при*

$$l > \frac{1}{\alpha - 1} \max\left\{\alpha t + \beta - \alpha, \alpha t - \beta + \alpha - 1 + \frac{\beta}{l}\right\}$$

имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n_m}\left(\mu_i^t - \lambda_i^t - \left(\left((T+P)^t - T^t\right)v_i, v_i,\right)\right) - \alpha_2^t(n_m) - \cdots - \alpha_{l-1}^t(n_m)\right\} = 0,$$

где $\alpha_s^t(n_m)$ – *s-я поправка теории возмущения.*

Пример. Пусть T – гладкий равномерно эллиптический самосопряженный оператор порядка m, P – оператор умножения на гладкую функцию, заданную в гладком n-мерном многообразии M. Для таких операторов при $m > n$ и

$$l > \frac{1}{m-n}\max\left\{mt - 1, mt - n + 1 + \frac{m-1}{l}\right\}$$

имеет место доказанная теорема.

[1] Дубровский В.В., Печенцов А.С. Регуляризованные следы высших порядков эллиптических операторов // Дифф. уравн. 1993. Т. 29. №1. С. 50–53.

Палюткин В.Г. *"Распределение спектра задачи Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом"*

Рассмотрим граничную задачу

$$-y''(z,\lambda) + a^2 Q(z) y(z,\lambda) = \lambda y(z,\lambda), \quad z \in \mathbb{R}_+,\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

$$hy(0,\lambda) + h'y'(0,\lambda) = 0, \quad h, h' \in \mathbb{C},\ y(z,\lambda) \to 0,\ z \to \infty,\ z \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $a = e^{-i\alpha}$, $0 < \alpha < \pi/2$, $Q(z)$ – каноническое произведение, все нули которого отрицательны, а их считающая функция $m(r)$ имеет асимптотику: $m(r) \sim Mr^{\rho}$, $r \to \infty$, $0 < \rho < 1$. Положим:

$$l = \left\{z = re^{i\varphi(r)}, r \geq 1, \varphi(r) = r^{-\rho}(M\rho)^{-1}(1 - 2\alpha/\pi)\sin\pi\rho\right\},$$

$$K(r) = \int_{\zeta\in l:\,|q(\zeta)|\leq r}\sqrt{r - |q(\zeta)|}\,|d\zeta|, \quad \widetilde{K}(R) = \int_0^R r^{-1}K(r)\,dr.$$

Число собственных значений (с.з.) задачи (1), (2), с учетом их кратностей, лежащих в $\{z : |z| \leq r\}$, $r \geq 0$, обозначим через $n(r)$ и определим $\widetilde{n}(R)$ по $n(r) - n(0)$ так же, как $\widetilde{K}$ определено по K.

Теорема. *Справедлива асимптотика:* $\widetilde{n}(R) \sim \widetilde{K}(R)$, $R \to \infty$, *причем при каждом* $R \gg 1$ с.з. *задачи* (1), (2) *не лежат на дуге* $\{z : |z| = R\} \setminus T$, *где* T – *некоторая дуговая окрестность точки* $w(R) = Re^{i\psi(R)}$, $\psi(R) = 2\alpha(\rho^{-1} - 1)/\ln R$, *с угловым размером* $\theta(R) = o(1/\ln R)$, $R \to \infty$.

Эта теорема – приложение общего результата, изложенного в докладе.

Радзиевский Г.В. (Киев) *“Минимальность части корневых векторов пучка операторов М.В.Келдыша”.*

Далее все операторы ограничены и действуют в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. В области $\Psi_{\theta,\eta} = \{\lambda : |\lambda| > \eta, |\arg\lambda| < \theta\}$, $\eta > 0$, $0 < \theta < \pi$, рассмотрим оператор-функцию

$$L(\lambda) = p(\lambda H) + T_0(\lambda)|H|^{\beta} + \lambda T_1(\lambda)|H|^{1+\beta} + \cdots + \lambda^{n-1}T_{n-1}(\lambda)|H|^{n-1+\beta},$$

где $\beta > 0$, нормальный оператор $H = H_1 + H_2$ с вполне непрерывным $H_1 \geq 0$ и $H_1H_2 = 0$, а $|H| = H_1 + (H_2^*H_2)^{1/2}$; $p(\lambda)$ – полином степени n, $p(0) \neq 0$, 1 – простой корень $p(\lambda)$ и оператор $p(\lambda H_2)$ обратим, если $\lambda \in \Psi_{\theta,\eta}$; оператор-функции $T_0(\lambda), \ldots, T_{n-1}(\lambda)$ аналитичны и равномерно ограничены в $\Psi_{\theta,\eta}$. Тогда найдется такое $\rho \geq \eta$, что в области $\Psi_{\theta/2,\rho}$ оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ мероморфна и коэффициенты ее главной части в полюсах μ_k (если они имеются) являются конечномерными операторами. Тогда μ_k – характеристические числа $L(\lambda)$ и для них существуют канонические по Келдышу цепочки собственных и присоединенных к ним векторов

$$x_{0,j,k}, \ldots, x_{d_{j,k},j,k}, \qquad j = 1, \ldots, \dim\operatorname{Ker} L(\mu_k)(< \infty),$$

где $x_{h,j,k}$ – присоединенный вектор порядка h к собственному вектору $x_{0,j,k}$. В этих обозначениях справедливо утверждение.

Теорема. *существует такое $\zeta \geq \rho$, что если $x_{h,j,k}$ – векторы, входящие в канонические по Келдышу цепочки собственных и присоединенных к ним векторов оператор-функции $L(\lambda)$, отвечающие характеристическим числам $\mu_k \in \Psi_{\theta/2,\zeta}$ и множество этих μ_k – непустое, то система векторов $H_1^{\nu}x_{h,j,k}$ минимальна в пространстве $\mathfrak{H}$ при произвольном положительном $\nu < n + \beta$.*

Садовничий В.А., Дубровский В.В. *“Первый регуляризованный след оператора Лапласа–Бельтрами с нечетным потенциалом на двумерной сфере”*

Пусть p – нечетная гладкая комплексная функция на единичной сфере S^2: $\mu_{n,i}$, $i = \overline{-n,n}$, $n = \overline{0,\infty}$, – собственные значения оператора $-\Delta+p$ с учетом алгебраической кратности, причем $\mu_{n,i} = n^2 + n + O(1)$, $i = \overline{-n,n}$, $n = \overline{0,\infty}$. Тогда справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\Bigg\{\mu_{0,0} + \sum_{n=1}^{N}\Bigg[\sum_{i=-n}^{n}\mu_{n,i} - n(n+1)(2n+1)\Bigg]& \\ - \frac{1}{128\pi^3}\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{N}\frac{(2k+1)(2l+1)}{(l-k)(l+k+1)}& \\ \times\Bigg[k^{-1/2}l^{-3/2}\int_0^{\pi} f(\alpha)\sin^{-1}\alpha\sin(k-l-1)\alpha\,d\alpha& \\ + l^{-1/2}k^{-3/2}\int_0^{\pi} f(\alpha)\sin^{-1}\alpha\sin(k-l+1)\alpha\,d\alpha\Bigg]\Bigg\}& \\ = -\frac{1}{8\pi^3}\int_0^{\pi} f(\alpha)\ln 2\sin\frac{\alpha}{2}\,d\alpha,&\end{aligned}$$

где $f(\alpha)$ – введенное нами интегральное преобразование потенциала p: $f(0) = f(\pi)$.

Шкаликов А.А. *"Индефинитная проблема Штурма–Лиувилля: известное и неизвестное"*

Индефинитной проблемой Штурма–Лиувилля называют спектральную задачу вида

$$Ay(x) = \lambda h(x)y(x), \quad x \in (-a,a), \quad 0 < a \le \infty, \tag{1}$$

где A – самосопряженный оператор, порожденный дифференциальным выражением $Ay(x) = -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x)$, а $h(x)$ – функция, меняющая знак на сегменте $(-a,a)$. В модельной ситуации предполагается, что $h(x)$ меняет знак лишь один раз, например, при $x=0$.

Начиная с работы Р.Билза [1] спектральные свойства рассматриваемой задачи изучались в предположении, что вблизи точки поворота функция $h(x)$ имеет одинаковый степенной подход, а именно, $h(x) \sim c|x|^\alpha \operatorname{sign} x$, $\alpha < -1/2$. Другие многочисленные работы на эту тему поднимали другие вопросы, но характер поведения мультипликативной функции вблизи нуля оставался таким же. И это существенно во всех применяемых методах. На новом пути нам удалось получить следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $p(x)$ – непрерывно дифференцируема на $(-a,a)$, $h(x)$ – непрерывно дифференцируема при $x \ne 0$, причем $h(x) \asymp |x|^\alpha$ при $x \to +0$, $\alpha > -1$, $h(x) \le Mh(-x)$ при $x < 0$, где $M = \mathrm{const}$. Тогда система собственных и присоединенных функций задачи (1) образует базис Рисса в пространстве $L_2(-a,a;|h(x)|)$.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно $A = A^* > 0$. Пусть $\{y_n^+(x)\}$ – система собственных функций задачи (1), отвечающая положительным собственным значениям, рассматриваемая при $x \in (0,a)$. Тогда $\{y_n^+(x)\}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,a;h(x))$.*

Сходные результаты недавно независимо и другим методом получил А.А. Зяблов.

[1] Beals R. Indefinite Sturm–Liouville problem and half-range completeness // Diff. Equation. 1985. V. 56. P. 391–408.

Юрко В.А. (Саратов) *"Обратная задача для нелинейного дифференциального уравнения на полуоси"*

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$-y'' + q(x)y = p(x)y^2 = \lambda y, \quad x \ge 0, \quad p(x), q(x) \in \mathcal{L}(0,\infty). \tag{1}$$

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im}\rho \ge 0$, $\mathfrak{N}_j(\rho) = \varphi^{(j-1)}(0,\rho)$, где $\varphi(x,\rho)$ – решение (1) при условии

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x,\lambda)\cdot e^{-i\rho x} = 1.$$

Обратная задача ставится следующим образом: по заданным функциям $\mathfrak{N}_j(\rho)$, $j = 1,2$, и $p(x)$ найти функцию $q(x)$.

Пусть функции $q(x), p(x)$ являются аналитическими при $x \ge 0$. Тогда при $|\rho| \to \infty$, $\arg\rho \in (0,\pi)$

$$\varphi^{(\nu)}(x,\rho) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=2s}^{\infty} e^{i(s+1)\rho x}\cdot(i\rho)^{\nu-k}\sum_{\mu=0}^{\nu} C_\nu^\mu (s+1)^{\nu-\mu} g_{k-\mu,s}^{(\mu)}(x), \qquad g_{00}(x) = 1,$$

$$\mathfrak{N}_j(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (i\rho)^{j-k-1}\mathfrak{N}_{kj}, \qquad \mathfrak{N}_{0j} = 1,$$

причем

$$\mathfrak{N}_{k1} = \sum_{s=0}^{[k/2]} g_{ks}^0, \qquad \mathfrak{N}_{k2} = \sum_{s=0}^{[k/2]} \big((s+1)g_{ks}^0 + g_{k-1,s}^1\big), \tag{2}$$

$$(s^2+2s)g_{k+2,s}^\nu + 2(s+1)g_{k+1,s}^{\nu+1} + g_{ks}^{\nu+2} = \sum_{j=0}^{\nu} C_\nu^j q^{(j)}(0) g_{ks}^{\nu-j} \tag{3}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\nu} C_\nu^m p^{(\nu-m)}(0) \sum_{j=0}^{k-2s+2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{\mu=0}^{m} C_m^\mu g_{j+2i-2,i-1}^\mu g_{k-j-2i+2,s-i}^{m-\mu},$$

$$s \ge 0, \quad k \ge 2s-2, \quad \nu \ge 0, \quad g_{ks}^\nu = 0 \ (k < 2s), \quad g_{ks}^\nu = g_{ks}^{(\nu)}(0).$$

Теорема. *Обратная задача имеет единственное решение, которое может быть найдено по следующему алгоритму:*

1) *вычисляем* $g_{11}^0 = \mathfrak{N}_{11}$;
2) *последовательно при* $l = 0, 1, 2, \dots$ *решаем линейные алгебраические системы* X_l, *состоящие из* (2) *при* $k = l+2$ *и из* (3) *при* $s = \overline{0, [l/2+1]}$, $k + \nu = l$, $\nu \geq 0$, $k \geq \max(0, 2s-2)$, *и находим* $q^{(l)}(0)$, g_{ks}^{l-k+2}, $s = \overline{0, [l/2+1]}$, $k = \max(1, 2s), \dots, l+2$;
3) *строим функцию* $q(x)$ *по формуле* $q(x) = \sum_l q^{(l)}(0)x^l/l!$.

Метод доказательства позволяет исследовать обратные задачи для широкого класса нелинейных уравнений.

Секция "Теория усреднения"

Барабанов О.О. (Ковров) *"О сходимости вариационных характеристик. Приложение к усреднению упруго-пластических задач"*

Скажем, что последовательность $F_n \colon L \to (-\infty, +\infty]$ $\Gamma(L)$-*сходится* на банаховом пространстве L, если для каждого $u \in L$ имеем: $F(u) \leq \varliminf F_n(u_n)$ для любой последовательности $u_n \to u$ в L и $F(u) = \lim F_n(u_n)$ для некоторой последовательности $u_n \to u$.

Теорема. *Пусть* $W \subset L$ – *вполне непрерывное вложение одного банахова пространства в другое. Пусть также имеется последовательность выпуклых функционалов* F_n *на* L *такая, что для любого* n

$$c_1\|\cdot\|_W \leq F_n(\cdot), \qquad F(0) \leq c_0,$$

где $0 < c_1$, $c_0 < +\infty$ – *фиксированные константы.*

Тогда, если последовательность F_n $\Gamma(L)$-*сходится к* F, *то последовательность сопряженных по Юнгу–Фенхелю функционалов* F_n^* $\Gamma(L^*)$-*сходится к* F^*.

Эта теорема помогает решить вопрос об усреднении упруго-пластической задачи с нулевыми краевыми условиями (см. [1]).

[1] Барабанов О.О. О сходимости вариационных характеристик // Матем. заметки. 1992. V. 52. №3. P. 3–9.

Беляев А.Ю., Козлов С.М. *"Усреднение уравнений Стокса в случайной перфорированной области"*

Пусть V – случайная эргодическая область в $\mathbb{R}^n$ (для описания этого объекта мы пользуемся конструкцией из [1]). D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $D_\varepsilon = D \cap \varepsilon V$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Изучается асимптотическое поведение решений задач Дирихле в области D_ε для уравнений Стокса

$$\nabla_i p^\varepsilon - \varepsilon^2 \Delta u_i^\varepsilon = f_i, \qquad \nabla_i y_i^\varepsilon = 0, \quad u_i^\varepsilon \in H_0^1(D_\varepsilon),$$

и их скалярного аналога – уравнения Пуассона

$$-\varepsilon^2 \Delta \varphi_\varepsilon = f, \qquad \varphi_\varepsilon \in H_0^1(D_\varepsilon).$$

Основное ограничение, накладываемое на V, формулируется нами следующим образом: должна существовать случайная эргодическая функция $h > 0$ и неслучайные константы C и $\delta > 0$ такие, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(V)$ с компактным носителем п.н. выполняются неравенства

$$\int \varphi^2 h \, dx \leq C \int (\nabla\varphi)^2 \, dx \left\langle \left(\frac{1}{h}\right)^{1+\delta} \right\rangle < \infty.$$

При этом ограничении доказывается

ТЕОРЕМА. *Для $f, f_i \in L_q(D)$, $q = 2 + 2/\delta$ п.н. имеют место*

1) *сходимость энергий и слабая сходимость решений скалярной задачи*

$$\int \varepsilon^2 (\nabla \varphi_\varepsilon)^2 \, dx \to k_0 \int f^2 \, dx, \qquad \varphi_\varepsilon \to k_0 f \text{ в } L_p(D);$$

2) *оценка сверху энергии для уравнений Стокса*

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \int \varepsilon^2 (\nabla u^\varepsilon)^2 \, dx \le k_{i\alpha} \int (f_i - \nabla_i \theta)(f_\alpha - \nabla_\alpha \theta) \, dx,$$

где k_0 и $k_{i\alpha}$ – константы, не зависящие от D, f и f_i, а θ – любая гладкая функция в D.

[1] Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G-сходимость эллиптических дифференциальных операторов // УМН. 1979. Т. 34. №5. С. 65–133.

Жиков В.В. (Владимир) *"Об усреднении в перфорированных случайных областях общего вида"*

Основные результаты доклада опубликованы в [1].

[1] Жиков В.В. Об усреднении в перфорированных случайных областях общего вида // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №1. С. 41–58.

Клепцына М.Л., Серебровский А.П. *"Принцип усреднения для задач фильтрации"*

Решается задача фильтрации диффузионных процессов с быстрыми компонентами. Для этого исследуется предельное поведение решений уравнений в частных производных, которым удовлетворяет плотность условных распределений медленных компонент. Рассматривается дифференциальный оператор со случайными коэффициентами

$$\mathcal{L}^\varepsilon u(t,x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big(a(\xi_{t/\varepsilon}, x) u(t,x) \Big) - \frac{\partial}{\partial x} \Big(b(\xi_{t/\varepsilon}, x) u(t,x) \Big),$$

где $a(t,x)$ и $b(t,x)$ – гладкие ограниченные функции, $a(t,x) \ge \nu > 0$, а ξ_t – стационарный эргодический процесс, $\varepsilon > 0$ – малый параметр и дифференциальный оператор с усредненными коэффициентами

$$\overline{\mathcal{L}} u(t,x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\overline{a}(x) u(t,x) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{b}(x) u(t,x) \right),$$

где $\overline{a}(x) = \mathbf{E}\alpha(\xi_0, x)$ и $\overline{b}(x) = \mathbf{E}b(\xi_0, x)$. Пусть $u^\varepsilon(t,x)$ и $\overline{u}(t,x)$ решение задачи Коши $\frac{\partial}{\partial t} u^\varepsilon(t,x) = \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon(t,x)$ и $\frac{\partial}{\partial t} \overline{u}(t,x) = \overline{\mathcal{L}} \overline{u}(t,x)$ с начальным условием $u^\varepsilon(0,x) = \overline{u}(t,x) = l(x)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой непрерывной ограниченной функции $f(x)$ и любого $T > 0$*

$$\mathbf{P}\text{-} \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \le T} \left| \int_R f(x) u^\varepsilon(t,x) \, dx - \int_R f(x) \overline{u}(t,x) \, dx \right| = 0.$$

Далее рассматривается задача Коши для стохастического уравнения в частных производных со случайными коэффициентами: $du^\varepsilon(t,x) = \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon(t,x)\, dt + A(x) u^\varepsilon(t,x)\, dw_t$ и усредненными коэффициентами: $d\overline{u}(t,x, \overline{\mathcal{L}} \overline{u}(t,x)\, dt + A(x) \overline{u}(t,x)\, dw_t$ с начальным условием $u^\varepsilon(0,x) = \overline{u}(0,x) = l(x)$, где w_t – независимый от ξ_t винеровский процесс.

ТЕОРЕМА 2. *Для любой непрерывной, ограниченной функции $f(x)$ и любого $T > 0$*

$$\mathbf{P}\text{-} \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \le T} \left| \int_R f(x) u^\varepsilon(t,x) \, dx - \int_R f(x) \overline{u}(t,x) \, dx \right| = 0.$$

Мельник Т.А. (Киев), Назаров С.А. (Санкт-Петербург) *“Асимптотическая структура спектра задачи Неймана в областях типа густого гребня”*

Область Ω_ε составлена из пластины $\Omega_0 = \{x : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < \gamma(x_1)\}$ и зубцов $G_\varepsilon(j) = \{x : |x_1 - \varepsilon(j+\frac{1}{2})| < \varepsilon h/2, x_2 \in (-1,0]\}$, $j = \overline{0, N-1}$, где $\gamma \in C^1([0,1])$, $\gamma > 0$, $h \in (0,1)$, N – большое натуральное число, $\varepsilon = N^{-1}$ – малый параметр.

Изучено асимптотическое поведение при $\varepsilon \to +0$ собственных значений $\{\lambda_n(\varepsilon) : n \in \mathbb{N}\}$ и собственных функций $\{u_n(\varepsilon,\cdot) : n \in \mathbb{N}\}$ спектральной задачи Неймана

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u(\varepsilon,x) = \lambda(\varepsilon)u(\varepsilon,x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \lambda_\nu u(\varepsilon,x) = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Для задачи (1) определена предельная спектральная задача, которая эквивалентна задаче для следующего пучка

$$(2) \qquad L(\mu) = I - (\mu+1)A_1 - h\mu^{1/2}\,\mathrm{tg}(\mu^{1/2})A_2, \qquad \mu \in \mathbb{C},$$

где $A_i : H^1(\Omega_0) \to H^1(\Omega_0)$, $i = 1,2$, – самосопряженные, компактные операторы, причем $A_1 > 0$, $A_2 \geq 0$.

Теорема 1. *Спектр пучка* (2) *состоит из неотрицательных собственных значений конечной кратности и точек* $\{(m-1/2)^2\pi^2 : m \in \mathbb{N}\}$, *которые образуют непрерывный спектр. Эти точки разбивают собственные значения на серии*

$$0 = \mu_1^{(1)} < \mu_2^{(1)} \leq \cdots \leq \mu_n^{(1)} \leq \cdots \to \frac{\pi^2}{4},$$

$$\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 \pi^2 < \mu_1^{(m)} \leq \cdots \leq \mu_n^{(m)} \leq \cdots \to \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \qquad n \to +\infty,\ m \geq 2.$$

Теорема 2. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists c(n) > 0\ \ \exists \varepsilon_0 > 0\ \ \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$:

$$\left|\lambda_n(\varepsilon) - \mu_n^{(1)}\right| < c(n)\varepsilon.$$

Аналогичные асимптотические оценки получены для разности собственных функций исходной и предельной задач.

Ковалевский А.А. (Донецк) *“G-сходимость нелинейных задач в перфорированных областях”*

Рассматривается вопрос о G-сходимости операторов $A_s : W^{1,m}(\Omega_s) \to (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, где $\{\Omega_s\}$ – последовательность областей, содержащихся в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $n, m \geq 2$. Предполагается, что $\forall s \in \mathbb{N}\ \Omega_s = \Omega_s^1 \cup H_s \cup \Omega_s^2$, где Ω_s^1, Ω_s^2 – области, непересекающиеся с H_s, причем $d_s = d(\Omega_s^1, \Omega_s^2) > 0$, $d_s \to 0$ и для любого открытого множества $Q \subset \Omega$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\, d_s^{-m}\,\mathrm{mes}\,(Q \cap H_s) \leq c\,\mathrm{mes}\,Q,$$

$$\underline{\lim_{s\to\infty}}\ \mathrm{mes}\,(Q \cap \Omega_s^i) \geq c^{-1}\,\mathrm{mes}\,Q, \qquad i = 1,2 \ \ (c > 0).$$

Относительно операторов A_s предполагается, что для любых $s \in \mathbb{N}$, $u, v \in W^{1,m}(\Omega_s)$ $A_s 0 = 0$,

$$\|A_s u - A_s v\|_{W_s^*} \leq c_1\left(1 + \|u\|_{W_s} + \|v\|_{W_s}\right)^{m-2}\|u - v\|_{W_s},$$

$$\langle A_s u - A_s v, u - v\rangle \geq c_2\|u - v\|_{W_s}^m, \qquad \text{где } c_1, c_2 > 0,\ W_s = W^{1,m}(\Omega_s).$$

Положим $W = W^{1,m}(\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $u_s \in W_s$ *слабо сходится* к $u \in W^2$, если $\sup_s \|u_s\|_{W_s} < \infty$ и $\|u_s - u^i\|_{L^m(\Omega_s^i)} \to 0$ $(i = 1, 2)$; последовательность $f_s \in W_s^*$ *сильно сходится* к $f \in (W^2)^*$, если для любого $u \in W^2$ и любой $u_s \in W_s$, слабо сходящейся к u, $\langle f_s, u_s\rangle \to \langle f, u\rangle$. Наконец, скажем, что последовательность $\{A_s\}$ *G-сходится* к обратимому оператору $A\colon W^2 \to (W^2)^*$, если для любого $f \in (W^2)^*$ и любой $f_s \in W_s^*$, сильно сходящейся к f, $\{A_s^{-1} f_s\}$ слабо сходится к $A^{-1} f$.

ТЕОРЕМА. *Пусть существуют последовательности линейных непрерывных отображений продолжения* $p_s^i\colon W^{1,m}(\Omega_s^i) \to W$ $(i = 1, 2)$ *такие, что* $\sup_s \|p_s^i\| < \infty$ $(i = 1, 2)$. *Тогда из* $\{A_s\}$ *можно извлечь подпоследовательность, G-сходящуюся к обратимому оператору* $A\colon W^2 \to (W^2)^*$ *со свойствами, аналогичными свойствам операторов* A_s.

Назаров С.А. (Санкт-Петербург) *"Асимптотическая структура спектра задачи Штурма–Лиувилля с быстро осциллирующими коэффициентами"*

Известно, что после нумерации в порядке неубывания собственные числа (СЧ) $\lambda^{(n)}(\varepsilon)$ задачи Дирихле для уравнения

$$L(\varepsilon^{-1}x, \partial_x)u \equiv -\partial_x a(\varepsilon^{-1}x)\partial_x u = \lambda(\varepsilon)u \quad \text{на } (-1, 1)$$

стремятся при $\varepsilon \to +0$ к соответственным СЧ $\lambda_0^{(n)}$ задачи Дирихле на $(-1,1)$ с осредненным оператором $-a_0\partial_x^2 \equiv -a_0\partial^2/\partial x^2$. Имеется и сходимость собственных функций (СФ) в $L_2(-1,1)$. Так как СФ осредненной задачи составляют базис в $L_2(-1,1)$, то создается впечатление, что асимптотика $\lambda^{(n)}(\varepsilon) = \lambda_0^{(n)} + O(\varepsilon)$ полностью описывает поведение спектра исходной задачи. Однако это не так (потому, что сходимость неравномерна относительно номера n). Проверено, что существуют серии СЧ с иной асимптотикой. Например, если $\mu_m > 0$ – простое СЧ уравнения $L(y, \partial_y)\varphi = \mu\varphi$ на ячейке $[0, 1)$ (φ периодична), то для любого $k = 0, 1, \ldots$ найдутся такие $\varepsilon_{km}, c_{km} > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{km})$ на отрезке $\{\gamma : |\gamma - \varepsilon^{-2}\mu_m - \lambda_m^{(k)}| < \varepsilon c_{km}\}$ расположено СЧ $\Lambda_{km}(\varepsilon)$ исходной задачи. Здесь $\lambda_m^{(k)}$ – СЧ уравнения $-a_m\partial_x^2 v_m = \lambda_m v_m$ на $(-1, 1)$, снабженного условиями $\partial_x v_m(\pm 1) = 0$, если СФ φ_m аннулируется в точке $y = 0$, и $v_m(\pm 1) = 0$ в противном случае. Множитель a_m вычисляется по коэффициенту a и по СФ φ_m (как и a_0 по a и по $\varphi_0 = 1$). Подчеркнем, что при $\varepsilon \to +0$ номер $N(\varepsilon)$ СЧ $\Lambda_{km}(\varepsilon)$ в упорядоченной последовательности $\{\lambda^{(n)}(\varepsilon)\}$ меняется бесконечно много раз и неограниченно возрастает.

Панасенко Г.П., Полин Ж. Сен Жан (Мец), Чоронеску Д. (Париж) *"Асимптотический анализ уравнения Пуассона, заданного в мульти-структуре "двумерная область-каркас"*

Пусть $x = (x_1, x_2) \in R^2$, T – каркасная область типа "антенны"

$$\Big\{x \in R^2 \mid |x_2| < \delta\frac{e}{2}, x_1 \in (-\delta e, b - \delta e)$$
$$\text{или } |x_2| < \frac{e}{2}, \left|x_1 - \left(k + \frac{1}{2}\right)e + \delta e\right| < \delta\frac{e}{2}, k = 0, \ldots, J\Big\},$$

где $(J + \frac{1}{2})e = b$ конечно, δ, e – малые параметры, Ω_0 – полукруг $\{x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_1 < 0\}$, $\Gamma = \{x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_1 < 0\}$, $\Omega = T \cup \Omega_0$. Определим функции $K(x) = \chi_T\omega + 1 - \chi_T$, $F(x) = f(x_1 + \delta e)\chi_T + f_0(x)(1 - \chi_T)$, где $\chi_T(x)$ – характеристическая функция области T, ω – большой параметр, $f_0 \in C^\infty(\overline{\Omega}_0)$, $f \in C^\infty(R)$. Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении решения задачи

$$-\operatorname{div}(K\nabla u) + F(x), \quad x \in \Omega, \qquad u\big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0$$

при $\delta, e \to +0, \omega \to +\infty$.

Эта задача развивает тематику монографии [1], где рассматриваются задачи с одним малым параметром. Пусть $u_0(x)$ – решение задачи

$$-\Delta u_0 = f_0(x), \quad x \in \Omega_0, \quad u_0\big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega_0\setminus\Gamma} = 0,$$

$v(t)$ – решение задачи

$$-v'' = 2f(t), \quad t \in (0,b), \quad v(0) = 0, v'(b) = 0;$$

положим $N(x_1) = x_1 - (k+1/2)e + \delta e$ на каждой из полосок $\big((k+1/2)e - 3\delta e/2, (k+1/2)e - \delta e/2\big) \times (-e/2, e/2)$, пусть $\rho(t)$ – четная функция из $C^\infty(R)$, равная нулю при $|t| \le 3/4$ и равная единице при $|t| \ge 1$.

Определим асимптотическое решение вида

$$U = \big(u_0(0,0) + \omega^{-1}(v(x_1+\delta e) - N(x_1)\rho(x_2/\delta e)v'(x_1+\delta e))\big)\chi_T(x) + u_0(x)\big(1 - \chi_T(x)\big).$$

ТЕОРЕМА. *Имеет место оценка*

$$\|u-U\|_{W_2^1(\Omega_0\setminus T), W_2^1(T)}, \sqrt{\omega}\,\|\nabla(u-U)\|_{L_2(T)} \le c\sqrt{\delta e}\,\left(\sqrt{e}|\ln e| + \sqrt{\delta}|\ln\delta| + \omega^{-1}|\ln\delta e|\right),$$

где c не зависит от δ, e, ω.

Построено полное асимптотическое разложение решения.

[1] Ciarlet P.G. Plates junctions in elastic multi-structures. Paris: Masson, 1990.

Пятницкий А.Л. *"О влиянии потенциала на скорость вырождения эффективной диффузии"*

Рассматривается задача Коши для параболического уравнения с гладкими периодическими коэффициентами вида

$$\frac{\partial}{\partial t}u - A^\mu u = \frac{\partial}{\partial t}u - \mu^2\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u - v(x)u = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x),$$

где μ – малый положительный параметр, матрица a_{ij} равномерно эллиптична. Напомним, как в этой задаче определяется эффективная диффузия (см. [1]): в области $\{(x,t) \mid x^2 < c_1tc_2, t \to \infty\}$ решение $u(x,t)$ представимо в виде $u(x,t) = \exp(\lambda t)p(x)\widehat{u}(x,t)(1+o(1))$, где λ и $p(x)$ – первые собственная функция и собственное значение периодической задачи $A^\mu p(x) = \lambda p(x)$, а $\widehat{u}(x,t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u} = \frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij}(\mu)\frac{\partial}{\partial x_j}\widehat{u}, \quad \widehat{u}\big|_{t=0} = \left\langle p^2\right\rangle u_0(x),$$

где символом $\langle\cdot\rangle$ обозначено среднее по периоду и предполагается, что $\langle p\rangle = 1$. Матрицу $\sigma(\mu)$ называют *эффективной диффузией*.

Теорема. *Существует положительно определенная матрица Q, зависящая только от коэффициентов a_{ij} и $v(x)$, такая, что* $\lim\limits_{\mu\to\infty} \ln\sigma(\mu) = -Q$.

Для краткости приведем здесь построение Q только для $a_{ij}(x)$ и $v(x)$ симметричных относительно движений, сохраняющих куб периодов. В этом случае $\sigma(\mu)$ кратна единичной матрице: $\sigma(\mu) = \overline{\sigma}(\mu)I$. Будем предполагать, что $v(x)$ имеет на периоде единственную точку максимума (что не исключает наличия локальных максимумов), причем без ограничения общности можем предполагать, что $\max v(x) = 0$ и что точка максимума совпадает с 0. Тогда $\overline{\sigma}(\mu)$ удовлетворяет следующему предельному соотношению

$$\lim_{\mu\to\infty} \mu \ln\overline{\sigma}(\mu) = \inf_{i\in Z^n\setminus\{0\}} \inf_{\substack{\{x(t),x(0)=0,\\ x(1)=i\}}} \left(\int_0^1 (-v(x(t)))a^{ij}(x(t))\dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t)\,dt\right)^{1/2},$$

здесь $a^{ij}(x) = (a_{ij}(x))^{-1}$.

[1] Козлов С.М. Приводимость квазипериодических операторов и усреднение. // Труды ММО. 1983. Т. 46. С. 99–123.

Сандраков Г.В. (Киев) *"Об одной задаче с малым параметром, связанной с краевыми эффектами в осреднении"*

В полупространстве $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \mid y > 0\}$ рассмотрена краевая задача с малым параметром ε:

$$\Delta u = 0, \qquad u|_{y=0} = e^{i\frac{x^2}{2\varepsilon}} g(x). \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть $g(x)$ – аналитическая в окрестности точки $x = 0$ функция, тогда разложение*

$$u_N = \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^s \Big\{ A_s(z)\Phi(\lambda, z)e^{\lambda z^2} + \varepsilon^{1/2}B_s(z) + A_s(\overline{z})\Phi(\lambda,-\overline{z})e^{\lambda\overline{z}^2} + \varepsilon^{1/2}B_s(\overline{z})\Big\}, \quad \lambda = \frac{i}{2\varepsilon}, \tag{2}$$

задает асимптотику решения задачи (1) *и в норме $H^r(\mathbb{R}^2_+)$ выполнена оценка $\|u - u_N\|_r \le C_N\varepsilon^{N-r+1/2}$. Здесь $z = x - iy$, $\overline{z} = x + iy$, A_s, B_s – аналитические в окрестности нуля функции, $\Phi(\lambda, z) = \left[1 + \Phi(z\lambda^{1/2})\right]/2$ и $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-t^2}\,dt$ – интеграл вероятностей. Главный член разложения* (2) *имеет вид*

$$\frac{1}{2}\Big\{ g(z)e^{\lambda z^2}\left[1+\Phi(z\lambda^{1/2})\right] + g(\overline{z})e^{\lambda\overline{z}^2}\left[1-\Phi(\overline{z}\lambda^{1/2})\right]\Big\}.$$

Разложение (2) используется для построения в строго выпуклой области $G \subset \mathbb{R}^2$ асимптотики решения краевой задачи с малым параметром ε:

$$\Delta u = 0, \qquad u\big|_{\partial G} = e(x,y,\varepsilon)g(x,y), \tag{3}$$

где $e(x,y,\varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon}(xm+yn)}$ и $m, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $g(x,y)$ – аналитическая на ∂G функция, тогда*

$$u_N = e(x,y,\varepsilon)g_N(x,y,\varepsilon)$$

задает асимптотику решения задачи (3) *и в норме $H^2(G)$ выполнена оценка теоремы 1. Здесь вблизи точек $x_1, x_2 \in \partial G$ с нормалями параллельными вектору (m,n) функция $g_N(x,y,\varepsilon)$ имеет разложение* (2) *и вне окрестностей точек x_1, x_2 является функцией типа пограничного слоя*

Теорема 2 используется при построении в строго выпуклой области полного асимптотического разложения решения задачи Дирихле для эллиптического дивергентного уравнения второго порядка с быстроосциллирующими периодическими коэффициентами. Отмечена возможность получения оценок теоремы 2 для таких уравнений с достаточно гладкими исходными данными и обобщения такой оценки на многомерный случай и системы уравнений.

Скрыпник И.В. (Донецк) *"Асимптотика решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях"*

Строится равномерное приближение решений задач

$$(1)\qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in \Omega_s, \qquad u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega_s,$$

где $\Omega_s = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$, Ω – ограниченная область в R^n, $F_i^{(s)}, i = 1, \dots, I(s)$, – непересекающиеся подмножества в Ω. При выполнении условий A_1, A_2 § 1 гл. 9 [1] задача (1) имеет решение $u_s(x)$ в $W_m^1(\Omega_s)$ и можем считать, что $\{u_s(x)\}$ слабо сходится в $W_m^1(\Omega)$ к $u_0(x)$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и пусть $F_i^{(s)} \subset \overline{B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})}$. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от шара $B(x_i^{(s)}, d_i^{(s)})$ до множества $\bigcup_{j\neq i} B(x_j^{(s)}, d_j^{(s)}) \cup \partial\Omega$. Предполагается, что с некоторой постоянной C_0 выполнено неравенство

$$(2)\qquad d_i^{(s)} \le C_0 \left[r_i^{(s)}\right]^{\frac{n}{n-m}} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, I(s), s = 1, 2 \dots,$$

$$(3)\qquad \lim_{s\to\infty} \max\{r_i^{(s)} : i = 1, 2, \dots, I(s)\} = 0.$$

Пусть $G_i^{(s)} = B(x_i^{(s)}, 1) \setminus F_i^{(s)}$ и обозначим через $v_i^{(s)}(x, f - u_0)$ решение задачи

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left(x, 0, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \qquad x \in G_i^{(s)},$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial B(x_i^{(s)}, 1), \qquad v(x) = f(x_i^{(s)} - u_0(x_i^{(s)}), \quad x \in \partial F_i^{(s)}.$$

Выберем срезающую функцию $\varphi_i^{(s)}(x)$, равную единице в $B(x_i^{(s)}, \rho_i^{(s)})$, нулю вне $B\left(x_i^{(s)}, 2\rho_i^{(s)}\right)$, $\rho_i^{(s)} = \left[r_i^{(s)}\right]^{\frac{n}{n-1}}$ и определим разложение

$$(4)\qquad u_s(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{I(s)} v_i^{(s)}(x, f - u_0)\varphi_i^{(s)}(x) + w_s(x).$$

Теорема. *Предположим, что выполнены условия* A_1, A_2, C *§ 1 гл. 9* [1]; *условия* (2), (3), $a_j(x,0,p)$, $j = 1,\dots,n$, – *дифференцируемы по* x,p, $f(x) \in W_q^1(\Omega)$, $q > n$. *Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\operatorname{vrai}\max\left[|w_s(x)| : x \in \Omega\right]\right\} = 0.$$

[1] Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.

Чечкин Г.А. *"Полное асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимися граничными условиями в слое"*

Рассматривается задача для уравнения Пуассона в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, ограниченной гиперплоскостями $\Gamma_1 = \{x_n = 0\}$ и $\Gamma_2 = \{x_n = -d\}$. Пусть Γ - $(n-1)$-мерное множество, лежащее в единичном кубе $Q_{(n-1)} = \{\xi \mid \xi \in \mathbb{R}^n, 0 < \xi_i < 1, i = 1,\dots,n-1, \xi_n = 0\}$. Через Γ_0 обозначим множество, образованное всевозможными сдвигами Γ на векторы $z = (z_1,\dots,z_{n-1},0)$ с целочисленными компонентами, а через $\Gamma_D^\varepsilon = \{x \mid x/\varepsilon = \xi \in \Gamma_0\}$, $\Gamma_N^\varepsilon = \Gamma_1 \setminus \Gamma_D^\varepsilon$. Строится асимптотическое разложение решения следующей задачи

$$\begin{gathered}\Delta u^\varepsilon(x) + f(x) = 0 \quad \text{в}\,\Omega, \qquad u^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{на}\,\Gamma_D^\varepsilon \cup \Gamma_2,\\ \frac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на}\,\Gamma_N^\varepsilon,\end{gathered} \tag{1}$$

$u^\varepsilon(x)$, $f(x)$ периодична по $x_1,\dots,x_{n-1}$ с периодом 1 (1-периодична по $\widehat{x}$), $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ – единичный вектор нормали к $\partial\Omega$.

Решение u^ε ищется в виде

$$u^\varepsilon(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l \sum_{\langle\alpha\rangle = l} N_\alpha(\xi) D^\alpha v_\varepsilon(x), \qquad \xi = \frac{x}{\varepsilon}. \tag{2}$$

При этом 1-периодические по $\widehat{\xi}$ функции $N_\alpha(\xi)$ определяются последовательно из рекуррентной последовательности задач при $\langle\alpha\rangle = 1, 2, \dots$:

$$\begin{gathered}\Delta_\xi N_\alpha(\xi) = -T_\alpha(\xi) \quad \text{в}\,\mathbb{R}^n_-, \quad N_\alpha(\widehat{\xi},0) = h_\alpha \quad \text{на}\,\Gamma_0,\\ \frac{\partial N_\alpha(\widehat{\xi},0)}{\partial\nu} = -Z_\alpha(\xi) \quad \text{на}\,\Sigma\setminus\Gamma_0,\end{gathered} \tag{3}$$

где $\Sigma = \{\xi \mid \xi = (\widehat{\xi},0)\}$, $Z_\alpha(\xi) \equiv Z_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}(\xi) := N_{\alpha_2,\dots,\alpha_l}\nu_{\alpha_1}$,

$$T_\alpha(\xi) \equiv T_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}(\xi) := N_{\alpha_3,\dots,\alpha_l}(\xi)\delta_{\alpha_1\alpha_2} + 2\frac{\partial N_{\alpha_2,\dots,\alpha_l}(\xi)}{\partial\xi_{\alpha_1}}.$$

Функции с отрицательной длиной индекса считаются равными нулю. Постоянные h_α выбраны так, чтобы выполнялись некоторые неравенства. Функции $v_\varepsilon(x)$ ищутся в виде ряда

$$v_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j V_j(x),$$

где $V_j(x)$ – 1-периодические по $\widehat{x}$ функции, удовлетворяющие следующей рекуррентной последовательности задач

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2=1}^{n} N_{\alpha_1\alpha_2}\frac{\partial^2 V_j}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}} = \psi_j, \qquad x \in \Omega,\ V_j(\widehat{x},0) = \varphi_j^1(\widehat{x}),\ V_j(\widehat{x},-d) = \varphi_j^2(\widehat{x}), \tag{4}$$

здесь $\varphi_0^1 = \varphi_0^2 = \varphi_j^2 = 0$,

$$\varphi_j^1 = -\sum_{i=1}^{j} \sum_{\langle\alpha\rangle=l} h_\alpha D^\alpha V_{j-l}, \quad \psi_0 = f,$$

$\psi_j = 0, j = 1, 2, \dots$.

Секция "Математическая физика"

Гадыльшин Р.Р.(Уфа) *"О резонаторе Гельмгольца и его аналогах"*

Полным электромагнитным аналогом акустического резонатора Гельмгольца является идеально проводящая поверхность $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_0 \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$, получающаяся из границы Γ_0 ограниченной односвязной области Ω вырезанием малого отверстия ω_ε с линейными размерами $O(\varepsilon)$; $0 < \varepsilon \ll 1$. Соответствующая краевая задача имеет вид

$$(1) \qquad \begin{aligned} -i \operatorname{rot} \mathbf{H}_\varepsilon = k\mathbf{E}_\varepsilon + \mathbf{F}_1, &\qquad -i \operatorname{rot} \mathbf{E}_\varepsilon = k\mathbf{H}_\varepsilon + \mathbf{F}_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}_\varepsilon = \operatorname{div} \mathbf{H}_\varepsilon = 0 \ \text{ вне } \overline{\Gamma}_\varepsilon, &\qquad \gamma_\tau \mathbf{E}_\varepsilon = \gamma_\nu \mathbf{H}_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \Gamma_\varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma_\nu \mathbf{w}$, $\gamma_\tau \mathbf{w}$ – нормальная и касательная составляющие вектора $\mathbf{w}$, а вектор-функции $\mathbf{F}_j$ соленоидальны ($\operatorname{div} \mathbf{F}_j = 0$), принадлежат $L_2(\mathbb{R}^3)$ и имеют финитные носители, отделенные от Γ_0. Решения краевой задачи (1) рассматриваются в классе вектор-функций, принадлежащих L_2 в окрестности "входящего" ребра $\partial\Gamma_\varepsilon$ вместе с ротором и удовлетворяющих на бесконечности условию излучения:

$$(2) \qquad \left[\mathbf{E}_\varepsilon, \mathbf{x}|\mathbf{x}|^{-1}\right] + \mathbf{H}_\varepsilon = o\left(|\mathbf{x}|^{-1}\right), \qquad \left[\mathbf{H}_\varepsilon, \mathbf{x}|\mathbf{x}|^{-1}\right] - \mathbf{E}_\varepsilon = o\left(|\mathbf{x}|^{-1}\right).$$

Теорема 1. *Пусть k_0 – простое собственное значение внутренней предельной задачи в Ω и k_0^2 не является собственным значением задач Дирихле и Неймана для $-\Lambda$ в Ω. Тогда у аналитического продолжения решения задачи* (1), (2) *существует единственный полюс первого порядка τ_ε, сходящийся к k_0 при $\varepsilon \to 0$ и $\operatorname{Im} \tau_\varepsilon < 0$.*

Теорема 2. *Пусть k_0 удовлетворяет условиям теоремы 1, Ω в окрестности начала координат совпадает с $x_3 > 0$, соответствующая собственная функция предельной задачи в нуле не равна нулю, $\omega_\varepsilon = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}\varepsilon^{-1} \in \omega\}$, где ω – область плоскости $x_3 = 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$*

$$\begin{gathered} \tau_\varepsilon = k_0 + \varepsilon^3 \tau_3 + \varepsilon^4 \tau_4 + \varepsilon^5 \tau_5 + \varepsilon^6 \tau_6 + O(\varepsilon^7), \\ \tau_3 > 0, \quad \operatorname{Im} \tau_6 < 0, \quad \operatorname{Im} \tau_j = 0, \quad j \le 5. \end{gathered}$$

Дмитриев В.И., Салтыков Е.Г. *"Функция Грина уравнения Гельмгольца для проводящей неоднородной среды"*

Решение уравнения

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2(z,x)u = -\delta(z-z')\delta(x-x') \quad (-\infty < z \le H, -\infty < x < \infty),$$

удовлетворяющее условию излучения, в предположении $k = k_0 = \mathrm{const}$, $\mathrm{Im}\ k_0 = 0$ при $z \le 0$ и $k^2 = i\sigma$ при $0 < z \le H$, $\sigma(z,x)$ – действительная функция, кусочно-непрерывная по переменным z и x, $\sigma > 0$, $\sigma(z,x) = \sigma_0(z)$ при $|x| \ge a > 0$ представимо в виде

$$(2)\qquad u(z,x) = \int_0^\infty \Phi(x,\lambda)\varphi(z,x,\lambda)\,d\lambda,$$

где φ является собственной функцией оператора Штурма–Лиувилля

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \left[k^2(z,x) - k_0^2\right]\varphi = \lambda^2\varphi \quad (-\infty < z \le H),$$

удовлетворяющей условиям: $\varphi(H,x,\lambda) = 0$,

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{H} \varphi(z,x,\lambda')\varphi(z,x,\lambda)\,dz = \delta(\lambda-\lambda'), \qquad \lambda \in [0,\infty), \lambda' \in [0,\infty).$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая (3), получаем двумерное интегральное уравнение второго рода для коэффициента разложения Φ функции u по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля. Ядро этого уравнения зависит от фазового сдвига и его производных по x. В случае слабой зависимости проводимости σ от координаты x, когда первая и вторая производные функции φ равномерно малы при $-\infty < z \le H$, $-\infty < x < \infty$, это интегральное уравнение допускает решение методом последовательных приближений.

Доброхотов С.Ю., Оливе В.М. (Мехико), Шафаревич А.И. *"Квазиклассические асимптотики и комплексный росток Маслова в линеаризованных уравнениях Навье–Стокса"*

Главный член асимптотики решения задачи Коши для линеаризованных уравнений Навье–Стокса

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (V,\nabla)u + (u,\nabla)V + \nabla P = \nu\Delta u, \\ (\nabla, u) = 0, \quad u(0,t) = u_0\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \to 0, \end{cases}$$

$u, V, x \in \mathbb{R}^3$, $V(x,t) \in C^\infty$, $V\big|_{|x|>R} = \mathrm{const}$, $u_0(\eta) \in C_0^\infty$ имеет вид [1], [2].

$$U = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\varepsilon}(k,\xi) - \frac{\nu}{\varepsilon^2}(k,Gk)} A\left(\frac{k}{|k|},\xi,t\right)\widetilde{u}_0(k)\,dk, \qquad \xi = x_0(x,t).$$

Здесь

$$\dot X(\xi,t) = V(X,t), \quad X(\xi,0) = \xi, \quad X(x_0,t) = x,$$

$$G(\xi,t) = \int_0^t \left(\frac{\partial X^*}{\partial\xi}\frac{\partial X}{\partial\xi}\right)^{-1}(\xi,t_1)\,dt_1,$$

$$\dot A + \left(E - \frac{2p\otimes p}{p^2}\right)\frac{\partial V}{\partial x}(X,t) = 0, \quad A\big|_{t=0} = E - \frac{k\otimes k}{k^2}, \quad p = \left(\frac{\partial X^*}{\partial\xi}\right)^{-1} k.$$

Теорема. *Решение задачи* (1) *представляется в виде* $u(x,t,\varepsilon,\nu) = U+w$, $\lim_{\varepsilon\to 0}|w| = 0$. *Если* $\varepsilon^2/\nu \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то*

$$u = \frac{\varepsilon^4}{\nu^2} f\left(\frac{\xi}{\sqrt{\nu}}, \xi, t\right) + o\left(\frac{\varepsilon^4}{\nu^2}\right), \qquad \xi = x_0(x,t),$$

$$f(\tau,\xi,t) = -\frac{3}{8\pi}\int_{S^2} A(\omega,\xi,t)\frac{\partial\widetilde{u}_0}{\partial k}(0)\omega \frac{erf'''\left(-i(\omega,\tau)/2\sqrt{(\omega,C\omega)}\right)}{(\omega,C\omega)^2}\,d\Omega.$$

[1] Доброхотов С.Ю., Шафаревич А.И. Параметрикс и асимптотика локализованных решений уравнений Навье–Стокса в $\mathbb{R}^3$, линеаризованных на гладком течении // Матем. заметки. 1992. Т. 51. №1. С. 72–82. [2] Доброхотов С.Ю., Шафаревич А.И. Некоторые асимптотические решения линеаризованных уравнений Навье–Стокса // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №1.

Калякин Л.А. (Уфа) *"Асимптотика первой поправки в теории возмущения солитонов"*

Двойной интеграл Фурье с быстро осциллирующей экспонентой

$$J(s,\tau;\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^{\tau} h(s,\tau;\lambda,\theta)\exp(i\Phi/\varepsilon)\,d\theta, \qquad 0<\varepsilon\ll 1 \tag{1}$$

описывает существенную часть первой поправки в теории возмущения солитонов. При этом фазовая функция имеет вид:

$$\Phi(s,\tau;\lambda,\theta) = \lambda s + \lambda\int_\theta^\tau \nu(\zeta)\,d\zeta - (\tau-\theta)\Omega(\lambda) + \omega(\theta).$$

Исходные данные: $h(s,\tau;\lambda,\theta)$, $\nu(\theta)$, $\omega(\theta)$ считаются гладкими функциями в полосе $\Pi(\tau) = \{\lambda \in \mathbb{R}, 0\le\theta\le\tau\}$; $\Omega(\lambda)$ – мероморфная функция при $\lambda\in\mathbb{C}$; $h(s,\tau;\lambda,\theta) = O((1+|\lambda|)^{-N})$, $\forall N$, $s\in\mathbb{R}$; $\theta,\tau\in[0,\tau_0]$. Предполагается, что $\nu(\theta)\ne 0$, $\nu'(\theta)\ne 0$; $\exists\Lambda$: $|\nu(\theta)-\Omega(\lambda)/\lambda| \ge \text{const} > 0$, $\forall|\lambda|\ge\Lambda>0$. Наиболее существенными являются требования $\Omega'(\lambda)-\nu(\theta;\varepsilon)\ne 0$ при $\nabla_{\lambda,\theta}\Phi = 0$, $\Omega''(\lambda)\ne 0$ при $\Omega'(\lambda)=0$, которые обеспечивают невырожденность стационарных точек фазы.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда асимптотика интеграла* (1) *при* $\varepsilon\to 0$ *имеет различную структуру для разных* s,τ; *так, в солитонном секторе* ($|s|^2 \le \varepsilon^{1+\delta}$):

$$J(s,\tau;\varepsilon) = -i\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{h(0,\tau;\lambda,\theta)}{\Phi_\theta(0,\tau;\lambda,\theta)-i\alpha 0}\exp(i\lambda s/\varepsilon)\Big|_{\theta=\tau} + O(\varepsilon^{1/8}); \qquad \alpha = \operatorname{sign}(\Phi_{\theta\lambda}).$$

В области $|s|\ge\varepsilon^{1-\delta}$ *главные члены (так называемые хвосты солитона) имеют порядок* $O(1)$ *при наличии стацточек* $\nabla_{\lambda,\theta}\Phi = 0$. *Обрыв хвоста описывается интегралом Френеля и связан с выходом соответствующей стацточки из полосы интегрирования* $\Pi(\tau)$; ($\tau\ge\varepsilon^\delta$).

Кочубей А.Н. (Киев) *"Многомерные псевдодифференциальные операторы над полем p-адических чисел"*

Описана методика вычисления интегралов гауссова типа над подмножествами недискретного несвязного локально компактного поля, позволяющая распространить на многомерный случай ряд результатов спектральной теории псевдодифференциальных операторов над полем Q_p p-адических чисел (см. [1] и указанную там литературу).

Рассмотрены также псевдодифференциальные операторы над Q_p^n с символами вида $|a(\xi)|_p^\alpha$, $\xi \in Q_p^n$, где $a(\xi)$ – квадратичная форма над Q_p^n, $p \neq 2$, $\alpha > 0$. Если $a(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, то функция Грина соответствующего оператора неотрицательна. Такие квадратичные формы над Q_p^n существуют лишь при $n \leq 4$, причем для $n = 4$ такая форма единственна с точностью до линейного изоморфизма. Последнее обстоятельство представляет интерес в связи с перспективой построения p-адического аналога евклидовой квантовой теории поля.

[1] Владимиров В.С. О спектральных свойствах p-адических псевдодифференциальных операторов типа Шрёдингера // Изв. АН СССР. Серия матем. 1992. Т. 56. №4. С. 770–789.

Пустыльников Л.Д. *"Модель Пуанкаре и строгое обоснование второго начала термодинамики из классической механики"*

В работе [1] А.Пуанкаре для обоснования закона возрастания энтропии из механики рассмотрел одномерный газ, состоящий из большого числа точечных частиц, взаимодействующих между собой по закону упругого удара, которые перемещаются в сосуде конечного размера, представляющим собой отрезок. Пуанкаре изучает ситуацию, при которой на частицы действует сила, вызываемая внешним телом, которое то приближается к сосуду, то отдаляется от него, и показывает, что в указанной модели энтропия Гиббса остается постоянной. В настоящей работе для естественного периодического воздействия на частицы на границах сосуда с учетом релятивистского фактора строго доказан закон возрастания энтропии Гиббса [2]. Доказательства используют результаты автора, касающиеся релятивистского аналога модели Ферми–Улама и его обобщения (см. [3]).

[1] Poincare H. Réflexions sur la théorie cinétique des gaz // J. Phys. théoret. et appl. 1906. V. 4. №5. P. 369–403. [2] Пустыльников Л.Д. О механизме возникновения необратимости и неограниченном росте энергии в одной модели статистической механики // Теор. и матем. физика. 1991. Т. 86. №1. С. 120–129. [3] Пустыльников Л.Д. Новый механизм ускорения частиц и числа вращения // ТМФ. 1990. Т. 82. №2. С. 257–267.

Самохин В.Н. *"Усреднение системы уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя в быстроосциллирующем магнитном поле"*

Рассмотрена система уравнений вида

$$uu_x + vu_y = \nu u_{yy} + D^2(x, x/\varepsilon)(U(x) - u) + U_x(x)U(x), \qquad u_x + v_y = 0 \tag{1}$$

в области $G = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered} u(0,y) = u_1(y), \quad u(x,0) = 0, \qquad v(x,0) = v_1(x), \\ u(x,y) \to U(x) \text{ при } y \to \infty, \end{gathered} \tag{2}$$

где функция $D^2(x,z)$ – гладкая и 1-периодическая по z со средним значением на периоде $\left\langle D^2(x,z)\right\rangle = d^2(x)$, $\varepsilon > 0$.

Теорема. *Пусть* $U(x) > 0$ *при* $x \in [0, X]$; $U_x(x)$, $v_1(x)$, $D^2(x, x/\varepsilon) \in C^1([0, X])$; $u_1(y)$, $u_1'(y)$, $u_1''(y) \in C^\alpha(\mathbb{R}^1_+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^1_+)$, $0 < \alpha < 1$; $U_x(x) \geq 0$, $u_1(0) = 0$, $u_1(y) > 0$ *при* $y > 0$, $u_1'(0) > 0$. *Тогда при* $\varepsilon \to 0$ *решение* $u(x,y)$, $v(x,y)$ *задачи* (1), (2) *сходится к решению* $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$ *системы уравнений*

$$u_0u_{0x} + v_0u_{0y} = \nu u_{0yy} + d^2(x)(U(x) - u_0)U_x(x) + U(x), \qquad u_{0x} + v_{0y} = 0$$

в области G с условиями вида (2) *так, что*

$$\begin{aligned} &u \to u_0 \quad \text{в} \quad C(\{0 \le x \le X, 0 \le y \le y_1 < \infty\}), \quad y_1 \in (0,\infty),\\ &v \to v_0 \quad \text{в} \quad C(\{\delta \le x \le X, 0 \le y \le y_1 < \infty\}) \ \text{при любом}\ \delta \in (0,X),\\ &\qquad \operatorname{grad} u \to \operatorname{grad} u_0 \quad \text{слабо в}\ L_2^{\mathrm{loc}}(G). \end{aligned}$$

Степин С.А. *"О задаче рассеяния для уравнения Рэлея"*

Изучение устойчивости плоскопараллельного течения идеальной жидкости приводит к следующей краевой задаче для уравнения Рэлея:

$$(u-c)(\psi''-\alpha^2\psi)-u''\psi=0, \tag{1}$$

$$\psi(a)=\psi(b)=0; \tag{2}$$

здесь ψ – функция тока, c – спектральный параметр, $\alpha \in \mathbb{R}$, u – заданная функция (профиль скорости невозмущенного течения), $u' > 0$. Замена $\varphi = \psi'' - \alpha^2\psi$ сводит задачу (1)–(2) к спектральному анализу оператора $H = H_0 + V$, где H_0 – оператор умножения на функцию u, возмущение V – интегральный оператор. Собственные значения задачи, вообще говоря, комплексны; кроме них у оператора H имеется отрезок непрерывного спектра $[u(a), u(b)]$. С помощью техники стационарной теории рассеяния удается построить волновые операторы пары H_0, H_0+V и доказать теорему разложения по собственным функциям непрерывного и дискретного спектра оператора H в предположении, что $u \in C^{2+\mu}[a,b]$, $\mu > 1/2$. При этом ядро оператора рассеяния имеет вид $[1-2\pi i t(x,x,x+i0)]\delta(x-y)$, где $t(x,y,\lambda)$ – т.н. t-матрица оператора H. Оказывается, что обобщенные собственные функции задачи (1)–(2) связаны с t-матрицей следующим образом:

$$\psi_c(z) = (u''(z))^{-1} t(u(z), c, c+i0), \qquad c \in [u(a), u(b)]. \tag{3}$$

Соответствующая формула разложения для функций $\psi \in C^{2+\varepsilon}[a,b]$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих граничным условиям $\psi(a)=\psi(b)=0$, имеет вид:

$$\psi = \int_a^b \left[W(\psi''-\alpha^2\psi)\right](z)\psi_{u(z)}\,du(z) + P\psi,$$

где оператор W ограничен и ограниченно обратим в $L_2(a,b)$, P – проектор на подпространство, порожденное собственными функциями задачи.

Формула (3) позволяет для задачи с чисто непрерывным спектром доказать, что рассеяние тривиально (т.е. $t(x,x,x+i0) \equiv 0$) лишь в том случае, когда профиль u – линейный. В окрестности линейного профиля установлена разрешимость обратной задачи восстановления функции u по данным рассеяния и предложена итерационная процедура построения такого решения.

Сулейманов Б.И. (Уфа) *"О влиянии малой нелинейности на высокочастотные асимптотики при перестройках каустик"*

Рассмотрен модельный пример *семейства* формальных ВКБ-решений

$$u \sim \varphi \exp\{ikS\} + \varphi^* \exp\{-ikS\} \quad (k \gg 1) \tag{1.1}$$

нелинейного уравнения Гельмгольца

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + k^2(1 + k^{-1}\delta|u|^2)u = 0 \ \ (\delta = \mathrm{const}),$$

волновые фронты $S = 0$ которых образованы "параболами" $\Gamma = \{x_2 = (x_1)^2 + b\cos x_1\ (0 < b < 1{,}5)\}$, и таких, что $u|_\Gamma = 2A(x_1)$.

Как и в линейном случае $\delta = 0$, приближение (1.1) неприменимо на каустиках K (эволютах) кривых Γ.

Для фиксированных $b < b_* = 3(2 - b_*^3)$ каустика имеет единственное острие $(0, x_2^0)$, в окрестности которого "сшитое" с (1.1) приближение имеет порядок $o(k^{1/4})$ и (Petergrin D., Smith R., 1978) описывается при помощи решения нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ)

$$-iq_t = q_{xx} + 6\delta|q|^2 q \quad (x = k^{3/4}2^{-1/2}x_1,\ t = x_2 - x_2^0(b)k^{1/2}), \tag{1.2}$$

обобщающего ($\delta \neq 0$) функцию Пирси

$$\int_R \exp\{-2i(x\lambda + 2t\lambda^2 + \xi(b)\lambda^4)\}\, d\lambda.$$

Оно же одновременно есть решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по переменным x и t (Сулейманов Б.И., 1991).

При прохождении параметра b через критическое значение $b = b_*$ в особой точке "рождаются" два новых острия. "Сшитое" с (1.1) гладкое приближение ($t = x_2 - x_2^0(b_*)k^{2/3}$, $x = x_1 k^{5/6}$, $p = (b - b_*)k^{1/3}$),

$$u_n \sim 2k^{1/3}\left[\exp\{i(k/(2-b) + 2tk^{1/3})\}g(t, x, p) + \text{к.с.}\right],$$

пригодное в окрестности особых точек K (для b, близких к b_*), определяется при этом специальным решением g НУШ (1.2), которое в линейном пределе $\delta = 0$ лишь постоянным множителем отличается от интеграла Фурье

$$\int_R \exp\left\{-i(x\lambda + t\lambda^2 + p\lambda^4 - \beta(b_*)\lambda^6/6)\right\}\, d\lambda.$$

Одновременно g есть *решение ОДУ по параметрам* x, t и p. Эта функция является представителем изомонодромной иерархии, описанной ранее А.В. Китаевым (1991 г).

Щербаков В.В. *"Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных в методе стохастического квантования"*

Пусть $\xi^{(\Lambda)}(t,x)$ – решение следующего уравнения:

$$d\xi^{(\Lambda)}(t,x) = \left((\Delta - m^2)\xi^{(\Lambda)}(t,x) - \lambda e^{\Delta}\xi^{(\Lambda)^3}(t,x)\right)dt + e^{\Delta/2}\,dw(t,x), \tag{1}$$

$t \in R_+, x \in \Lambda = [-L, L]^\nu$ – ν-мерный тор, $m^2 > 0, \lambda \geq 0, \xi^{(\Lambda)}(0,x) = \xi_0^{(\Lambda)}(x)$ – случайное поле на Λ, $\mu^{(\Lambda)}$ – распределение $\xi_0(x)$ – есть гиббсовская перестройка меры $\mu_0^{(\Lambda)}$ полиномом $\lambda P_0(\cdot)$ четной степени, таким, что $P_0(x) - x^4$ ограничено снизу, $\mu_0^{(\Lambda)}$ гауссова мера с нулевым средним и ковариацией:

$$C_0^{(\Lambda)}(x) = \varepsilon^\nu \sum_{p\in\varepsilon Z^\nu} e^{ipx}|\widehat{C}_0(p)|^2,$$

где $\widehat{C}$ – гладкая функция из L^2, $\pi L^{-1} = \varepsilon$.

Пусть η – предел при $\Lambda \to R^\nu$ гиббсовских перестроек $\eta^{(\Lambda)}$ вида

$$d\eta^{(\Lambda)} = \exp\left(-\lambda^4 \int_\Lambda \xi^4(x)\,dx\right) Z^{-1}\,d\eta_0^{(\Lambda)},$$

где $\eta_0^{(\Lambda)}$ – гауссова мера с нулевым средним и ковариацией:

$$C^{(\Lambda)}(x) = \varepsilon^\nu \sum_{p\in\varepsilon Z^\nu} e^{ipx}e^{-p^2}(p^2+m^2)^{-1}.$$

Тогда мера η — единственное инвариантное распределение уравнения (1) в бесконечном объеме (при $\Lambda = R^\nu$); $\mu_T^{(\Lambda)}$ – распределение решения уравнения в конечном объеме сходится к мере η при $T \to \infty$, $\Lambda \to R^\nu$, в смысле слабой сходимости конечномерных распределений, причем сходимость эспоненциальная по времени и равномерная по объему.

Секция "Алгебраическая геометрия"

Корчагин А.Б. (Нижний Новгород) *"M-кривые степени 9: новые построения"*

По теореме Харнака M–кривая степени 9 имеет 28 овалов и одну одностороннюю компоненту J. В статье [1] приведен список 396 построенных M-кривых степени 9, а также список 496 типов, которые не могут быть реализованы M-кривыми степени 9.

Теорема. *Существуют M-кривые степени 9, реализующие следующие типы* $\langle J \amalg 10 \amalg 1\langle 17\rangle\rangle$, $\langle J \amalg 8 \amalg 1\langle 2\rangle \amalg 1\langle 16\rangle\rangle$, $\langle J \amalg 8 \amalg 1\langle 5\rangle \amalg 1\langle 13\rangle\rangle$, $\langle J \amalg 12 \amalg 1\langle 2\rangle \amalg 1\langle 12\rangle\rangle$, $\langle J \amalg 13 \amalg 1\langle 2\rangle \amalg 1\langle 11\rangle\rangle$, $\langle J \amalg 18 \amalg 1\langle 5 \amalg 1\langle 3\rangle\rangle\rangle$, $\langle J \amalg 22 \amalg 1\langle 1 \amalg 1\langle 3\rangle\rangle\rangle$, $\langle J \amalg 24 \amalg 1\langle 1 \amalg 1\langle 1\rangle\rangle\rangle$.

Эти M-кривые были построены методом Виро [2] с использованием устранений шестикратной особой точки. Число построенных M-кривых степени 9 достигло 404. Остается неизвестной реализуемость 823 типов M-кривыми степени 9.

[1] Korchagin A.B. Construction of new M–curves of 9-th degree // Lect. Notes in Math. 1992. V. 1524. P. 296–307. [2] Виро О.Я. Склеивание алгебраических гиперповерхностей, устранения особенностей и построение кривых // В кн.: Труды ленинградской международной топологической конференции. Л. 1983. С. 149–197.

Кузьменко Т.В., Полотовский Г.М. (Нижний Новгород) ***"Изотопическая классификация кривых степени 6, распадающихся более чем на два сомножителя в общем положении"***

Пусть $\mathbb{R}C_m$ – множество точек вещественной кривой C_m степени m в проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, а $C_{m(1)}, \dots, C_{m(k)}$ – неприводимые сомножители кривой C_m, и пусть

1) каждая $C_{m(i)}$ является M-кривой;
2) $\mathbb{R}C_{m(i)}$ и $\mathbb{R}C_{m(j)}$ при $i \neq j$ пересекаются трансверсально в $m(i) \cdot m(j)$ точках;
3) $\mathbb{R}C_{m(i)} \cap \mathbb{R}C_{m(j)} \cap \mathbb{R}C_{m(k)} = \varnothing$ для попарно различных i, j, k.

Считаем, что C_m и F_m имеют одинаковый тип, если существует гомеморфизм $\varphi\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ такой, что $\varphi(\mathbb{R}C_m) = \mathbb{R}F_m$ и $\varphi(\mathbb{R}C_{m(i)}) = \mathbb{R}F_{m(j)}$ с $m(i) = m(j)$.

Классификация типов кривых C_6 в случае $k = 2$ получена в [1] и нашла разнообразные применения (см. обзор [2]). В случае $k > 2$ ответ на вопрос о числе $N(m(1), \dots, m(k))$ типов кривых C_6 с сомножителями степеней $m(1), \dots, m(k)$ дает следующая

Теорема. $N(1,1,1,1,1,1) = 4$, $N(1,1,1,1,2) = 23$, $N(1,1,1,3) = 19$, $N(1,1,2,2) = 109$, $N(1,1,4) = 26$, $N(1,2,3) = 163$, $N(2,2,2) = 105$.

Получен полный список типов, для которого здесь нет места. Доказательство опирается на [1], причем для $N(1,2,3)$ потребовались дополнительные квадратичные преобразования.

[1] Полотовский Г.М. Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. 1977. Т. 236. №3. С. 548–551. [2] Polotovskii G.M. On the classification of decomposing plane algebraic curves // Lect. Notes in Math. 1992. V. 1524. P. 52–74.