



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Баландин, Г. В. Потёмин, О невырожденных дифференциально-геометрических скобках Пуассона третьего порядка,
УМН, 2001, том 56, выпуск 5, 177–178

<https://www.mathnet.ru/rm441>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:41:17



О НЕВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СКОБКАХ ПУАССОНА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. В. Баландин, Г. В. Потёмин

Для одной пространственной переменной дифференциально-геометрические скобки Пуассона третьего порядка (СПЗ) на многообразии M^n имеют вид [1]

$$\{u^i(x), u^i(y)\} = g^{ij} \delta'''(x-y) + b_k^{ij} u_x^k \delta''(x-y) + [c_k^{ij} u_{xx}^k + c_{kl}^{ij} u_x^k u_x^l] \delta'(x-y) + [d_k^{ij} u_{xxx}^k + d_{kl}^{ij} u_{xx}^k u_x^l + d_{klm}^{ij} u_x^k u_x^l u_x^m] \delta(x-y), \quad i, j, k, l, m = 1, \dots, n. \quad (1)$$

При локальных преобразованиях переменных вида $u = u(v)$ коэффициенты g^{ij} преобразуются как компоненты симметричного тензора типа $(2, 0)$, а величины $-\frac{1}{3}g_{js}b_k^{si}$, $-\frac{1}{3}g_{js}c_k^{si}$, $-g_{js}d_k^{si}$ преобразуются как компоненты аффинных связностей.

В [2], [3] доказано, что “последняя” связность $-g_{js}d_k^{si}$ в (1) симметрична и имеет нулевую кривизну. Тогда существует система координат, в которой компоненты этой связности равны нулю. Такие локальные координаты определены с точностью до аффинных преобразований. В этих специальных координатах выполнены также условия $d_{kl}^{ij} = 0$, $d_{klm}^{ij} = 0$ и СПЗ (1) принимают вид

$$\{u^i(x), u^i(y)\} = g^{ij} \delta'''(x-y) + b_k^{ij} u_x^k \delta''(x-y) + [c_k^{ij} u_{xx}^k + c_{kl}^{ij} u_x^k u_x^l] \delta'(x-y). \quad (2)$$

Коэффициенты в (2) должны удовлетворять условиям [4] для дифференциально-геометрических объектов с нижними индексами $c_{mnk} = g_{mj}g_{ni}c_k^{ij}$:

$$g_{mn,k} = -c_{mnk} - c_{nmk}, \quad (3)$$

$$c_{mnk} = -c_{mkn}, \quad (4)$$

$$c_{mnk} + c_{nkm} + c_{kmn} = 0, \quad (5)$$

$$c_{mnk,l} = -g^{pq}c_{pml}c_{qnk}. \quad (6)$$

В специальной системе координат рассмотрим связность Γ_{jk}^i , тензор кручения которой равен $g_{js}c_k^{si}$, а симметричная часть равна нулю. Условие (6) приводит к равенству

$$\Gamma_{jk,l}^s = \Gamma_{pl}^s \Gamma_{jk}^p, \quad (7)$$

откуда следует, что эта связность плоская. Поэтому существует невырожденная матрица (a_j^i) такая, что

$$\Gamma_{jk}^i = -\tilde{a}_m^i a_{j,k}^m, \quad (8)$$

где $(\tilde{a}_m^i)$ – матрица, обратная к (a_m^i) . Из (5) и (8) соответственно получаем:

$$a_{j,l}^m = -a_{l,j}^m, \quad a_{j,k}^m = \text{const}. \quad (9)$$

Таким образом,

$$a_j^i = a_{jk}^i u^k + b_j^i, \quad (10)$$

где b_j^i – константы.

Рассмотрим матрицу $h_{mn} = \tilde{a}_m^i \tilde{a}_n^j g_{ij}$. Нетрудно видеть, что условие $\nabla_k g^{ij} = 0$ равносильно равенству $h_{ij} = \text{const}$. Теперь, полагая $g_{ij} = a_i^m a_j^n h_{mn}$ в равенстве (5), будем иметь: $h_{pq} a_{[i}^p a_{jk]}^q = 0$. Отсюда получим соотношения:

$$h_{pq} a_{l[i}^p a_{jk]}^q = 0, \quad (11)$$

$$h_{pq} b_{[i}^p a_{jk]}^q = 0. \quad (12)$$

Следовательно, доказана

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00590).

ТЕОРЕМА. На многообразии M^n СПЗ определяют:

- 1) плоскую аффинную связность, коэффициенты Γ_{jk}^i которой в специальной системе координат имеют вид (8), где a_j^i удовлетворяют условиям (9), (10);
- 2) ковариантно постоянную в этой связности метрику $g^{ij} = \tilde{a}_m^i \tilde{a}_n^j h^{mn}$, где h^{mn} – постоянная невырожденная симметрическая матрица, причем h^{mn} , a_{jk}^i , b_j^i связаны равенствами (11), (12).

Верно и обратное утверждение.

Далее будем рассматривать примеры алгебр, ассоциированных с СПЗ. Тождество (11) определяет n -мерную антикоммутативную алгебру с умножением $[\cdot, \cdot]$ и со структурными константами a_{jk}^i в некотором базисе u_i , а также невырожденное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на этой алгебре, заданное матрицей h_{ij} , удовлетворяющие условию

$$\langle [u_i, u_j], [u_k, u_l] \rangle + \langle [u_i, u_l], [u_j, u_k] \rangle + \langle [u_i, u_k], [u_l, u_j] \rangle = 0. \quad (13)$$

При $n = 2$ имеется только одна нетривиальная антикоммутативная алгебра с умножением $[u_1, u_2] = u_1$. Тогда с точностью до сдвига имеем:

$$(a_j^i) = \begin{pmatrix} u^2 & -u^1 \\ p & q \end{pmatrix}, \quad (h_{ij}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c, p, q = \text{const.}$$

Если $a = c = 0$, $q = 0$, $pb = 1$, то получается пример СПЗ [5] для уравнения Монжа–Ампера.

Нетрудно видеть, что при $n = 3$ условие (13) всегда выполнено, т.е. для $n = 3$ любая антикоммутативная алгебра и любая невырожденная симметричная матрица определяют некоторую скобку (при условии невырожденности g_{ij}). Пример СПЗ встречается при изучении уравнений ассоциативности в двумерной топологической теории поля [6]:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -2u^2 & u^1 & 1 \\ u^1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c_1^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & u^1 \end{pmatrix}, \quad (c_2^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^1 \end{pmatrix},$$

(c_3^{ij}) – нулевая матрица. В этом случае матрицы a_j^i и h_{ij} имеют вид:

$$(a_j^i) = \begin{pmatrix} u^2 & -u^1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (h_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $n = 4$ соотношения (13) приводят к одному уравнению

$$\langle [u_1, u_2], [u_3, u_4] \rangle + \langle [u_1, u_4], [u_2, u_3] \rangle + \langle [u_1, u_3], [u_4, u_2] \rangle = 0.$$

Авторы благодарят Е.В. Фералонтова за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 2. С. 294–297.
 [2] Г. В. Потёмин. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии и алгебраической геометрии в теории солитонов // Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1991. [3] P. W. Doyle // J. Math. Phys. 1993. V. 34. № 4. P. 1314–1338. [4] Г. В. Потёмин // УМН. 1997. Т. 52. № 3. С. 173–174. [5] О. И. Мохов // УМН. 1988. Т. 53. № 3. С. 86–192. [6] E. V. Ferapontov, C. A. P. Galvao, O. I. Mokhov, Y. Nutku // Comm. Math. Phys. 1997. V. 186. P. 649–669.

Нижегородский государственный университет,
 Нижегородский государственный технический университет
E-mail: Balandin@mm.unn.ac.ru, ork@waise.nntu.sci-nnov.ru

Принято редколлегией
 22.08.2001