



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лимаренко, Расширенная теорема плотности для градуированных по группе колец и модулей,
УМН, 2002, том 57, выпуск 4, 181–182

<https://www.mathnet.ru/rm544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:40:08



РАСШИРЕННАЯ ТЕОРЕМА ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ГРАДУИРОВАННЫХ ПО ГРУППЕ КОЛЕЦ И МОДУЛЕЙ

С. В. ЛИМАРЕНКО

Главным объектом рассмотрения в данной работе является расширенная теорема плотности для градуированных колец и модулей (теорема для неградуированного случая была опубликована в работе [1]), сформулированная в терминах “ровной” однородности, и те дополнительные условия на градуированные кольцо и модуль над ним, при которых все три условия в формулировке теоремы становятся равносильными. В работе [2] доказывается расширенная теорема плотности, в которой условия приводятся в несколько иной форме, а градуировка производится по полугруппе. Мы же будем считать, что градуировка кольца и модуля производится по одной и той же аддитивной абелевой группе. В этом случае общность изложения мы приносим в жертву ясности и акцентированности основного результата. Чтобы избежать путаницы с индексами нумерации, мы обозначаем индексы однородности (элементы группы) строчными буквами греческого алфавита. Кольцо целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$.

Градуированный модуль называется сжимаемым, если он однородно вкладывается в любой свой ненулевой градуированный подмодуль. Однородное вложение осуществляется однородным мономорфизмом. Сжимаемый модуль называется критически сжимаемым, если он не допускает однородного вложения ни в какой свой градуированный фактор-модуль. Свойства инъективности и квази-инъективности градуированных модулей будем формулировать в терминах однородных гомоморфизмов.

Следует заметить, что при однородном вложении градуированного модуля M_R в N_R (кольцо и градуировка одни и те же у обоих модулей) однородные компоненты могут лишь сдвигаться на элемент группы, равный индексу однородности самого вложения. Отсюда следует, что все однородные компоненты ненулевого градуированного подмодуля сжимаемого градуированного модуля нетривиальны. Отсюда, в свою очередь, следует, что любой циклический подмодуль сжимаемого градуированного модуля нетривиален. Действительно, пусть $m_\mu R = 0$ для некоторого $m_\mu \in M_\mu$, тогда подмодуль $m_\mu Z + m_\mu R$ имеет ровно один ненулевой однородный компонент с индексом однородности μ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для сжимаемого градуированного модуля M_R следующие условия эквивалентны: (1) M_R – критически сжимаемый; (2) каждый однородный частичный эндоморфизм в M_R является мономорфизмом.

Рассмотрим три условия на градуированное кольцо R :

- (i) кольцо R слабо примитивно;
- (ii) существуют такие точный градуированный модуль M_R , его квази-инъективная оболочка $\overline{M}$, градуированное тело $\Delta = \text{End}_R(\overline{M})$, что для произвольного Δ_0 -независимого однородного набора $v_1\phi, \dots, v_k\phi \in \overline{M}_\phi$ найдется такой $0 \neq a_\alpha \in \Delta_\alpha$, что для произвольного однородного набора $n_{1\nu}, \dots, n_{k\nu} \in M_\nu$ существует такой $r_{\alpha+\nu+\phi} \in R_{\alpha+\nu+\phi}$, что $a_\alpha n_{i\nu} = v_i\phi r_{\alpha+\nu+\phi} \in M_{\alpha+\nu}$, $i = 1, \dots, k$;
- (iii) существуют такие точный градуированный модуль M_R , его квази-инъективная оболочка $\overline{M}$, градуированное тело $\Delta = \text{End}_R(\overline{M})$, что для произвольного $f_\tau \in \text{End}_\Delta(\overline{M})$ и произвольного однородного Δ_0 -независимого набора $m_{1\mu}, \dots, m_{k\mu} \in M$ найдутся такие $r_\rho, s_{\tau+\rho} \in R$, что $m_{i\mu} f_\tau r_\rho = m_{i\mu} s_{\tau+\rho}$ и $0 \neq m_{i\mu} r_\rho \in \Delta_\rho m_{i\mu} \forall i$.

Условие (iii) оказывается слабее условий (i) и (ii), что иллюстрирует простой пример, в котором градуированный модуль удовлетворяет условию (iii), но не удовлетворяет условиям (i) и (ii).

ПРИМЕР. Рассмотрим двумерный модуль над $\mathbb{Z}_2$ как левый модуль над верхнетреугольными матрицами с $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой:

$$R_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, \quad R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}; \quad M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} \right\}.$$

Условия (i)–(iii) мы называем сформулированными в терминах “ровной” однородности в силу того, что каждый конечный набор элементов градуированного модуля в этих условиях принадлежит одному компоненту однородности модуля. В работе [2] эти же элементы, являясь также однородными, могут принадлежать разным компонентам однородности. В этом случае условия получаются эквивалентными.

Дополнительные условия:

- (а) существует такой $0 \neq m_\mu \in M_\mu$, что для каждого индекса однородности (элемента группы) ν существуют $\tilde{m}_\nu \in M_\nu$ и $\tilde{r}_{\mu-\nu} \in R_{\mu-\nu}$ такие, что $\tilde{m}_\nu r_{\mu-\nu} = m_\mu$, а также $\hat{r}_\nu \in R_\nu$ такой, что $m_\mu \hat{r}_\nu \neq 0$;
- (б) все однородные компоненты любого градуированного подмодуля градуированного модуля M_R нетривиальны;
- (с) все однородные компоненты любого градуированного циклического подмодуля градуированного модуля M_R нетривиальны.

Итак, мы можем сформулировать основной результат.

Расширенная теорема плотности для градуированных по группе колец. *Условия (i), (ii), (iii)+(b) и (iii)+(c) на градуированное по группе кольцо R эквивалентны.*

Расширенная теорема плотности для градуированных по конечной группе колец. *Условия (i), (ii), (iii)+(a), (iii)+(b) и (iii)+(c) на градуированное по конечной группе кольцо R эквивалентны.*

Требование к конечности группы G для выполнения условия (а) мотивируется следующим примером, в котором градуированный по $\mathbb{Z}$ модуль M_R , являясь точным критически сжимаемым, не удовлетворяет условию (а).

ПРИМЕР. Рассмотрим счетномерный свободный $\mathbb{Z}$ -модуль. Выберем счетный базис $\{e_i\}$, где i пробегает все натуральные значения. Обозначим через M подмодуль, натянутый на базис $\{i \cdot e_i\}$, а через R – подкольцо линейных преобразований исходного $\mathbb{Z}$ -модуля, относительно которых подмодуль M инвариантен. Тогда M_R – точный критически сжимаемый модуль, M и R можно наделять естественной $\mathbb{Z}$ -градуировкой. Покажем сжимаемость. Пусть подмодуль N содержит элемент вида $n \cdot e_k$, где n и k натуральные. Существует элемент r кольца R такой, что $(n \cdot e_k)r = n \cdot e_1$. Следовательно, подмодуль N_R содержит циклический R -подмодуль $(n \cdot e_1)R$, который по сути есть $n \cdot M$, т.е. $\mathbb{Z}$ -подмодуль модуля M , натянутый на базис $\{n \cdot e_i\}$, где i пробегает все натуральные значения. Этот циклический R -подмодуль очевидным образом изоморфен M_R . Покажем теперь критическую сжимаемость. Для этого воспользуемся предложением и докажем, что каждый однородный частичный эндоморфизм f_ϕ в M_R является мономорфизмом. Действительно, пусть $f_\phi(n \cdot e_k) = 0$ для некоторых $n, k \in \mathbb{N}$, тогда $f_\phi(nk \cdot e_l) = 0$ для любого натурального l , на котором он определен, а следовательно, $f_\phi(\mathbb{Z}l \cdot e_l) = 0$, поэтому $f_\phi = 0$.

Пользуясь случаем, хочу выразить свою благодарность А. В. Михалёву за помощь и внимание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Zelmanowitz // Comm. Algebra. 1981. V. 9. № 1. P. 23–45. [2] С. В. Зеленов // УМН. 2001. Т. 56. № 3. С. 167–168.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: sergei@limarenko.mccme.ru

Принято редколлегией
23.05.2002