



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Балащенко, Канонические f -структуры гиперболического типа на регулярных Φ -пространствах,
УМН, 1998, том 53, выпуск 4, 213–214

<https://www.mathnet.ru/rm60>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:31:26



КАНОНИЧЕСКИЕ f -СТРУКТУРЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА НА РЕГУЛЯРНЫХ Φ -ПРОСТРАНСТВАХ

В. В. БАЛАШЕНКО

Аффинорные структуры на гладких многообразиях, т.е. гладкие тензорные поля типа $(1, 1)$, прочно стали важнейшими объектами исследований в современной дифференциальной геометрии. При этом только почти комплексным структурам (в частности, почти эрмитовым) посвящено огромное число исследований (см., например, [1]), среди которых обозначилась серия перспективных приложений. В то же время в ряде случаев возникают существенные трудности, связанные с отсутствием примеров (в особенности, инвариантных) того или иного типа структур.

Оказалось [2], что однородные Φ -пространства (обобщенные симметрические пространства [3]) обладают богатым запасом инвариантных аффинорных структур, которые каноническим образом строятся по автоморфизму Φ . В работе [2] для регулярных Φ -пространств полностью описаны все канонические аффинорные структуры следующих классических типов: почти произведения P , почти комплексные J и, более общо, f -структуры в смысле К. Яно ($f^3 + f = 0$). В частности, для однородных Φ -пространств порядка n ($\Phi^n = \text{id}$) получены точные вычислительные формулы.

В данной заметке для произвольных регулярных Φ -пространств охарактеризованы все канонические структуры f , удовлетворяющие условию $f^3 - f = 0$, т.е. включающие структуры почти произведения. Следуя [4], будем называть такие структуры f -структурами гиперболического типа. Впервые эти структуры возникли, по-видимому, в работе [5] и впоследствии изучались и обобщались рядом авторов (см., например, [6]–[8]).

Пусть G/H – однородное регулярное Φ -пространство [9], где Φ – автоморфизм связной группы Ли G , $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G , соответствующее автоморфизму $\varphi = d\Phi_e$ [9]. Пусть далее θ – ограничение φ на инвариантном подпространстве $\mathfrak{m}$, s – число неприводимых над $\mathbb{R}$ множителей минимального многочлена оператора θ . Как обычно, отождествим $\mathfrak{m}$ с касательным пространством к G/H в точке $o = H$.

Напомним [2], что инвариантная аффинорная структура F на регулярном Φ -пространстве G/H называется канонической, если представляющий ее в точке o аффинор F_o является полиномом от θ . Все канонические аффинорные структуры инвариантны, кроме того, относительно “симметрий” многообразия G/H , порождаемых автоморфизмом Φ , и образуют коммутативную подалгебру $\mathcal{A}(\theta)$ в алгебре всех инвариантных аффинорных структур. Заметим, что в случае симметрического пространства ($\Phi^2 = \text{id}$) подалгебра $\mathcal{A}(\theta)$ тривиальна.

ТЕОРЕМА 1. *На любом регулярном Φ -пространстве G/H имеется 3^s различных канонических f -структур гиперболического типа. Все такие структуры образуют (коммутативную) полугруппу в алгебре $\mathcal{A}(\theta)$, которая содержит подгруппу порядка 2^s канонических структур почти произведения.*

Как известно [9], регулярные Φ -пространства включают все однородные Φ -пространства порядка n . Для таких пространств можно указать явные формулы, позволяющие вычислить все канонические f -структуры гиперболического типа. Условимся при этом для простоты обозначать через f как саму структуру, так и ее значение в точке o .

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G/H – однородное Φ -пространство порядка n . Все канонические f -структуры гиперболического типа на G/H могут быть заданы полиномами $f = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m \theta^m$, где:*

- a) если $n = 2k + 1$, то $\alpha_m = \alpha_{n-m} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^k \xi_j \cos \frac{2\pi m j}{n}$;
- б) если $n = 2k$, то $\alpha_m = \alpha_{n-m} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j \cos \frac{2\pi m j}{n} + (-1)^m \frac{\xi_k}{n}$.

Здесь числа ξ_j , $j = 1, 2, \dots, k$, принимают значения из множества $\{-1; 0; 1\}$, при этом полиномы f задают канонические структуры почти произведения тогда и только тогда, когда все $\xi_j \in \{-1; 1\}$.

Детализируем ситуацию, например, для случая $n = 4$ (случай $n = 3$ для этих структур тривиален: $f = \pm \text{id}$).

СЛЕДСТВИЕ. На однородном Φ -пространстве порядка 4 есть 3 (с точностью до знака), вообще говоря, нетривиальные канонические f -структуры гиперболического типа:

$$f_1 = P = \theta^2, \quad f_2 = \frac{1}{2}(1 - \theta^2), \quad f_3 = \frac{1}{2}(1 + \theta^2).$$

При этом операторы f_2 и f_3 являются парой взаимно дополнительных проекторов: $f_2 + f_3 = 1$, $f_2^2 = f_2$, $f_3^2 = f_3$. Кроме того, следующие условия эквивалентны:

- 1) $-1 \notin \text{spec } \theta$;
- 2) структура P тривиальна ($P = -\text{id}$);
- 3) структура f_2 тривиальна ($f_2 = \text{id}$);
- 4) структура f_3 нулевая.

Заметим, что ряд геометрических фактов о канонических структурах P для случаев $n = 4, 5$ получен в [11], [12].

Пусть теперь (M, g, f) — гладкое многообразие с (псевдо-)римановой метрикой g и f -структурой гиперболического типа. Пару (g, f) назовем (псевдо-)римановой f -структурой гиперболического типа, если $g(fX, Y) = g(X, fY)$ для всех векторных полей X, Y на M . Отметим, что в случае $f = P$ приходим к понятию (псевдо-)римановой структуры почти произведения [13].

Если группа Ли G полупроста, то на регулярном Φ -пространстве G/H возникает [9] инвариантная относительно группы G и “симметрий” G/H (псевдо-)риманова естественно редуцирующая метрика g . Такая метрика порождается формой Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и именуется стандартной.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(G/H, g)$ — однородное Φ -пространство порядка n полупростой группы Ли G со стандартной метрикой g . Все канонические f -структуры гиперболического типа на G/H являются относительно g (псевдо-)римановыми f -структурами гиперболического типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gray A., Hervella L. M. // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1980. V. 123. № 4. P. 35–58.
 [2] Балащенко В. В., Степанов Н. А. // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 11. С. 3–34. [3] Ковальский О. Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, 1984. [4] Кириченко В. Ф. // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–71. [5] Okubo T. // Ann. Mat. Pura Appl. 1966. V. 2. P. 29–44. [6] Sato I. // Tensor. 1976. V. 30. № 3. P. 219–224.
 [7] Adati T., Miyazawa T. // TRU Math. 1977. V. 13. № 2. P. 27–39. [8] Das L. S. // Internat. J. Math. Math. Sci. 1996. V. 19. № 1. P. 125–130. [9] Степанов Н. А. // Изв. вузов. Сер. Матем. 1967. № 3. С. 88–95. [10] Феденко А. С. Пространства с симметриями. Минск: Изд-во Белорусского ун-та, 1977. [11] Балащенко В. В., Дашевич О. В. // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 153–154. [12] Балащенко В. В., Чурбанов Ю. Д. // УМН. 1990. Т. 45. № 1. С. 169–170. [13] Yano K., Kon M. Structures on Manifolds. Singapore: World Scientific, 1984.