



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бунина, В. К. Захаров, Канонический вид супертранзитивных стандартных моделей в теории множеств Цермело–Френкеля,
УМН, 2003, том 58, выпуск 4, 143–144

<https://www.mathnet.ru/rm646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:41:53



КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД СУПЕРТРАНЗИТИВНЫХ СТАНДАРТНЫХ МОДЕЛЕЙ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ЦЕРМЕЛО–ФРЕНКЕЛЯ

Е. И. БУНИНА, В. К. ЗАХАРОВ

Еще в 1917 г. Миримановым была построена по трансфинитной индукции *кумулятивная иерархия множеств* $(V_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On})$ такая, что $V_0 = \emptyset$ и $V_\alpha = \mathcal{P}(\cup[V_\beta \mid \beta \in \alpha])$. Все множества V_α являются супертранзитивными. Используя эти множества, Цермело [1] и Шефердсон [2] доказали, что множество U является супертранзитивным стандартно-модельным для теории множеств NBG тогда и только тогда, когда $U = V_{\theta+1}$ для некоторого (сильно) недостижимого кардинала θ .

Следовательно, множества V_θ являются супертранзитивными стандартно-модельными и для теории множеств ZF (с аксиомой выбора). Однако Монтегю и Боот [3] доказали, что для любого недостижимого кардинала θ существует ординал $\alpha < \theta$, не являющийся недостижимым и такой, что множество V_α является стандартно-модельным для теории ZF (см. также [4; I, упр. 12.12]). Поэтому вопрос о каноническом виде супертранзитивных стандартных моделей теории ZF оказался более сложным.

Поскольку понятие модели теории ZF не может быть определено конечным множеством формул, в данной работе с помощью схемы формул и ее релятивизации на множество V_κ вводится понятие (*сильно*) *квазинедостижимого кардинала* κ и доказывается схемный аналог теоремы Цермело–Шефердсона для теории множеств ZF.

Формула $\varphi(x, y, \vec{p})$ называется *функциональной*, если $\forall x \forall y \forall y' (\varphi(x, y, \vec{p}) \wedge \varphi(x, y', \vec{p}) \Rightarrow y = y')$.

Функциональная формула $\varphi(x, y, \vec{p})$ для каждого множества A задает функцию $[\varphi \mid A] \equiv \{z \mid \exists x \in A \exists y \in A (z = \langle x, y \rangle \wedge \varphi^A(x, y, \vec{p}) \wedge \vec{p} \in A)\}$, зависящую от параметра $\vec{p} \in A$.

Ординальное число κ назовем *квазирегулярным*, если $\forall \alpha (\alpha \in \kappa \wedge [\varphi \mid V_\alpha] \Leftarrow \alpha \rightarrow \kappa \Rightarrow \cup \text{rng}[\varphi \mid V_\kappa] \in \kappa)$ для любой функциональной формулы $\varphi(x, y, \vec{p})$.

Ненулевое ординальное число κ назовем (*сильно*) *квазинедостижимым*, если:

- 1) $\forall \alpha (\alpha \in \kappa \Rightarrow \text{card } \mathcal{P}(\alpha) \in \kappa)$;
- 2) κ квазирегулярно.

Квазинедостижимое ординальное число является кардинальным.

Множества V_κ для квазинедостижимых кардинальных чисел κ будем называть *квазинедостижимым кумулятивным множеством*.

ЛЕММА 1. *Для любого квазинедостижимого кардинального числа κ и любого ординального числа $\alpha \in \kappa$ выполнено $|V_\alpha| < \kappa$. Кроме того, $\kappa = |V_\kappa|$.*

ЛЕММА 2. *Если κ – квазинедостижимое кардинальное число, α – ординальное число такое, что $\alpha < \kappa$, $\varphi(x, y, \vec{p})$ – функциональная формула и $[\varphi \mid V_\kappa] \Leftarrow V_\alpha \rightarrow V_\kappa$, то $\text{rng}[\varphi \mid V_\kappa] \in V_\kappa$.*

ЛЕММА 3. *Если κ – квазинедостижимое ординальное число и $A \in V_\kappa$, то $\cup A \in V_\kappa$.*

Множество U назовем *квазиуниверсальным*, если оно обладает следующими свойствами:

- 1) $x \in U \Rightarrow x \subset U$ (*свойство транзитивности*);
- 2) $x \in U \Rightarrow \mathcal{P}(x), \cup x \in U$;
- 3) $x \in U \wedge y \in U \Rightarrow x \cup y, \{x, y\}, \langle x, y \rangle, x \times y \in U$;
- 4) $x \in U \wedge [\varphi \mid U] \Leftarrow x \rightarrow U \Rightarrow \text{rng}[\varphi \mid U] \in U$;
- 5) $\omega \in U$.

Легко показать, что квазиуниверсальное множество супертранзитивно, т.е. оно транзитивно и $x \in U \wedge y \subset x \Rightarrow y \in U$. Кроме того, если множество U квазиуниверсально, то $\emptyset \in U$.

ЛЕММА 4. *Если U – квазиуниверсальное множество, то $x \in U \Rightarrow |x| \in U$.*

ЛЕММА 5. *Пусть U – квазиуниверсальное множество. Тогда $U = \cup[V_\alpha \subset U \mid \alpha \in \mathbf{On} \cap U]$.*

ТЕОРЕМА 1. Пусть U – произвольное квазиуниверсальное множество. Тогда:

- 1) $U = V_{\kappa}$ для $\kappa \equiv \sup(\mathbf{On} \cap U) = \cup(\mathbf{On} \cap U) \subset U$;
- 2) κ является квазинедостижимым кардинальным числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $A \equiv \mathbf{On} \cap U$ является непустым множеством, поскольку по свойству 5) содержит элемент ω , то κ является ординальным числом.

Пусть $\kappa \in U$. Тогда по свойствам квазиуниверсального множества $\kappa + 1 = \kappa \cup \{\kappa\} \in U$. Так как $\kappa + 1 \in \mathbf{On}$, то в этом случае $\kappa + 1 \in (\mathbf{On} \cap U)$, т.е. $\kappa + 1 \leq \kappa$, что неверно. Значит, $\kappa \notin U$.

Предположим, что $\kappa = \alpha + 1$ для некоторого ординального числа α . В этом случае $\alpha \in U$, так как $\kappa \subset U$ и $\alpha \in \kappa$. Так как $\kappa = \alpha \cup \{\alpha\}$, то по свойствам квазиуниверсального множества $\kappa \in U$, что невозможно. Значит, κ – предельное ординальное число.

Следовательно, $V_{\kappa} = \cup[V_{\beta} \mid \beta \in \kappa]$. По лемме 5 $U = \cup[V_{\alpha} \mid \alpha \in A]$. Если $\alpha \in A$, то $\alpha \leq \kappa$ влечет $V_{\alpha} \subset V_{\kappa}$. Значит, $U \subset V_{\kappa}$. Если $\beta \in \kappa = \cup A$, то $\beta \in A$ для некоторого α . По свойству 1) $\beta \in A$. Значит, $V_{\kappa} \subset U$. Таким образом, $U = V_{\kappa}$.

2) Очевидно, что $\kappa \neq 0$. Предположим, что ординальное число κ не является квазирегулярным. Тогда $\exists \alpha (\alpha \in \kappa \wedge [\varphi \mid U] \models \alpha \rightarrow \kappa \wedge \cup \text{rng}[\varphi \mid U] = \kappa)$ для некоторой функциональной формулы $\varphi(x, y, \vec{p})$. Но из $\alpha \in U$ и $\kappa \subset U$ по свойству 4) квазиуниверсального множества следует $\text{rng}[\varphi \mid U] \in U$ и, значит, $\cup \text{rng}[\varphi \mid U] \in U$. Поэтому $\cup \text{rng}[\varphi \mid U] \neq \kappa$, и из полученного противоречия следует, что ординальное число κ является квазирегулярным.

Пусть λ – ординальное число такое, что $\lambda < \kappa$. Так как $\lambda \in \kappa \subset U$, то по свойству 2) $\mathcal{P}(\lambda) \in U$. По лемме 4 $|\mathcal{P}(\lambda)| \in U$. Следовательно, $|\mathcal{P}(\lambda)| \leq \kappa$. Предполагая, что $\kappa = |\mathcal{P}(\lambda)| \in U$, мы, как и выше, приходим к противоречию. Значит, $|\mathcal{P}(\lambda)| < \kappa$. Утверждение 2) доказано.

Из этой теоремы и свойств квазинедостижимых кумулятивных множеств из лемм 1–3 следует

ТЕОРЕМА 2. Для любого множества U следующие утверждения равносильны:

- 1) U является квазинедостижимым кумулятивным множеством несчетной мощности;
- 2) U является квазиуниверсальным множеством.

Прямой проверкой доказываемся

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В теории ZF для множества U следующие утверждения равносильны:

- 1) U является супертранзитивным стандартно-модельным для теории ZF ;
- 2) U является квазиуниверсальным.

С помощью теорем 1 и 2 и предложения 1 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. В теории ZF для множества U следующие утверждения равносильны:

- 1) $U = V_{\kappa}$ для несчетного квазинедостижимого кардинального числа $\kappa = |U| = \sup(\mathbf{On} \cap U)$;
- 2) U является супертранзитивным стандартно-модельным для теории ZF .

Эта теорема дает каноническую форму супертранзитивных стандартных моделей теории ZF .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Zermelo // Fund. Math. 1930. V. 16. P. 29–47. [2] J. C. Shepherdson // J. Symbolic Logic. 1951. V. 16. P. 161–190; 1952. V. 17. P. 225–237; 1953. V. 18. P. 145–167. [3] R. Montague, L. Vaught // Fund. Math. 1959. V. 47. P. 219–242. [4] T. Jech. Set Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2003.