



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Долбилин, Ю. М. Зиновьев, М. А. Штанько, М. И. Штогрин, Комбинаторный метод Каца–Уорда,
УМН, 1998, том 53, выпуск 6, 247–248

<https://www.mathnet.ru/rm95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 216.73.216.37

14 декабря 2025 г., 19:42:11



КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД КАЦА–УОРДА

Н. П. Долбилин, Ю. М. Зиновьев, М. А. Штанько, М. И. Штогрин

1. Введение. Через несколько лет после работ Л. Онзагера совершенно иной, комбинаторный способ вывода статистической суммы двумерной модели Изинга на квадратной решетке без магнитного поля предложили М. Кац и Дж. Уорд [1]. По словам самих авторов работа [1] носила “эвристический” характер. Кац и Уорд предложили матрицу A , которая полностью определяет решеткой, и обсудили сразу две формулы: детерминант матрицы A пропорционален статистической сумме модели Изинга и он же пропорционален квадрату статистической суммы.

В работе Каца и Уорда при доказательстве первой формулы использовалась “топологическая теорема”. С. Шерман [2] построил контрпример к этой “теореме”. Шерман рассмотрел гипотезу Фейнмана, согласно которой некоторое бесконечное формальное произведение полиномов, определяемых замкнутыми реберными путями в решетке, по всем таким путям пропорционально статистической сумме. Развивая идеи Шермана, Н. В. Вдовиченко [3] (см. также [4]) вывела формулу для статистической суммы, используя предположение о том, что пути с повторяющимися связями, взятые со знаками, при суммировании взаимно сокращаются. На ошибочность этого предположения указано в работе [5].

В работе [2] Шерман попытался обосновать формулу $\det A \sim Z^2(\beta)$. Для этого вышеупомянутое бесконечное формальное произведение сначала возводилось в квадрат. Затем при одной группировке сомножителей бесконечное произведение преобразовалось в бесконечный формальный ряд, который, как показывалось, пропорционален квадрату статистической суммы. А при другой перегруппировке бесконечного числа сомножителей разложение в бесконечный формальный ряд давало детерминант матрицы A . Однако правомерность этих манипуляций над бесконечными формальными произведениями и рядами не ясна.

Идеи Каца–Уорда–Шермана, по нашему мнению, оказались незаслуженно забытыми. Главный результат работы [6] заключается в доказательстве формулы $\det A \sim Z^2(\beta)$ для произвольной плоской решетки комбинаторным методом.

Далее мы приведем краткое изложение результатов работы [6].

2. Определения и результаты. После преобразования Фурье статистическая сумма двумерной модели Изинга может быть переписана в виде:

$$Z(\beta) = 2^{\#V} F \prod_{\{p,q\}} \text{ch}(\beta E(p, q)),$$

где произведение берется по всем неориентированным ребрам конечного графа G , а

$$F = \sum_{\xi \in Z_1(G, \mathbb{Z}_2)} \prod_{\{e\} \in |\xi|} d(\{e\})$$

— производящая функция и $d(\{e\}) = \text{th}(\beta E(\{e\}))$ — “вес” ребра. $\#V$ обозначает общее число вершин графа G и $\mathbb{Z}_2$ — это группа вычетов по модулю 2. Геометрический носитель $|\xi|$ цикла $\xi \in Z_1(G, \mathbb{Z}_2)$ означает комплекс, состоящий из всех ребер $\{e\}$, входящих в цикл ξ с коэффициентом 1.

Для производящей функции F имеем

$$F^2 = 1 + \sum_{(X_1, X_2) \neq (\emptyset, \emptyset)} P(X_1, X_2) d(X_1) d^2(X_2),$$

где суммирование идет по всем парам подграфов (X_1, X_2) графа G , которые не имеют общих ребер.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00167).

Вес $d(X)$ подграфа X определяется как $d(X) = \prod_{\{e\} \in X} d(\{e\})$. Даны подграфы X_1, X_2 , не имеющие общих ребер, коэффициент $P(X_1, X_2)$ в производящей функции – это число всех пар (ξ_1, ξ_2) 1-мерных циклов следующего вида: $P(X_1, X_2) := \#\{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1, \xi_2 \in Z_1(G, \mathbb{Z}_2), |\xi_1 + \xi_2| = X_1 \text{ и } |\xi_1| \cap |\xi_2| = X_2\}$.

Обозначим через $b(e)$ и $f(e)$ начало и конец направленного ребра e .

Определим матрицу Каца–Уорда. Все ее элементы A_{e_j, e_k} индексируются парами (e_j, e_k) направленных ребер и определяются следующим образом:

$$A_{e_j, e_k} = \begin{cases} 1, & \text{если } e_j = e_k, \\ -d(\{e_j\}) \cdot \exp\left\{\frac{i}{2}\alpha_{jk}\right\}, & \text{если } f(e_j) = b(e_k) \text{ и } f(e_k) \neq b(e_j), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где α_{jk} – угол между ребрами e_j и e_k .

Множество $e_1, \dots, e_n$ различных направленных ребер образует *допустимый путь* γ , если (1) $f(e_j) = b(e_{j+1})$ и $f(e_n) = b(e_1)$; (2) нет точек возврата: $f(e_{j+1}) \neq b(e_j)$, $j = 1, \dots, n-1$.

Для заданных подграфов $X_1, X_2 \subset G$ рассмотрим множество всех допустимых путей: $\Gamma(X_1, X_2) := \{\text{допустимый путь } \gamma \mid X_1 = \{\{e\} \mid e \in \gamma, -e \notin \gamma \text{ или наоборот}\}; X_2 = \{\{e\} \mid e, -e \in \gamma\}\}$.

Если граф G лежит на плоскости, то можно доказать равенство

$$\det A = 1 + \sum_{(X_1, X_2) \neq (\emptyset, \emptyset)} \sum_{\gamma \in \Gamma(X_1, X_2)} (-1)^{t(\gamma)} d(X_1) d^2(X_2),$$

где $t(\gamma)$ – число трансверсальных самопересечений пути γ .

ТЕОРЕМА. Пусть граф G лежит на ориентированной поверхности и подграфы $X_1, X_2 \subset G$ не имеют общих ребер. Если X_1 есть геометрический носитель некоторого цикла ξ , гомологичного 0 по mod 2, тогда

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(X_1, X_2)} (-1)^{t(\gamma)} = P(X_1, X_2).$$

СЛЕДСТВИЕ. Если граф G лежит на плоскости, то $F^2 = \det A$.

Авторы выражают свою признательность С. П. Новикову за привлечение внимания авторов к данной задаче и ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кас М., Ward J. C. // Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 1332–1337. [2] Sherman S. // J. Math. Phys. 1960. V. 1. №3. P. 202–217. [3] Вдовиченко Н. В. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. №8. С. 715–719. [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, ч. I. М.: Наука, 1976. [5] Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. // Труды МИАН 1991. Т. 196. С. 51–65. [6] Долбилин Н. П., Зиновьев Ю. М., Мищенко А. С., Штанько М. А., Штогрин М. И. Детерминант Каца–Уорда // Представлена в Труды МИАН.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Принято редколлегией
02.09.1998