Д. О. Орлов, Склейка категорий и партнеры Крулля–Шмидта,
УМН, 2016, том 71, выпуск 3, 203–204

Склейка категорий и партнеры Крулля–Шмидта

Д. О. Орлов

Пусть $\mathbf{k}$ – поле и $\mathscr{A}$ – малая $\mathbf{k}$-линейная дифференциально-градуированная (ДГ) категория. Определим (*правый*) *ДГ $\mathscr{A}$-модуль* как ДГ функтор $\mathsf{M}\colon \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{M}od\text{–}\mathbf{k}$, где $\mathscr{M}od\text{–}\mathbf{k}$ – ДГ категория комплексов $\mathbf{k}$-векторных пространств. Пусть $\mathscr{M}od\text{–}\mathscr{A}$ – ДГ категория правых ДГ $\mathscr{A}$-модулей и $\mathscr{A}c\text{–}\mathscr{A}$ – полная ДГ подкатегория, состоящая из ацикличных ДГ модулей. Гомотопическая категория $\mathcal{H}^0(\mathscr{M}od\text{–}\mathscr{A})$ триангулирована, и $\mathcal{H}^0(\mathscr{A}c\text{–}\mathscr{A})$ является полной триангулированной подкатегорией. *Производная категория* $\mathcal{D}(\mathscr{A})$ определяется как фактор по Вердье: $\mathcal{D}(\mathscr{A}) := \mathcal{H}^0(\mathscr{M}od\text{–}\mathscr{A})/\mathcal{H}^0(\mathscr{A}c\text{–}\mathscr{A})$.

Каждый объект $\mathsf{Y} \in \mathscr{A}$ задает представимый ДГ модуль $\mathsf{h}^{\mathsf{Y}}_{\mathscr{A}}(-) := \mathsf{Hom}_{\mathscr{A}}(-, \mathsf{Y})$. ДГ модуль P называется *свободным*, если он изоморфен прямой сумме ДГ модулей вида $\mathsf{h}^{\mathsf{Y}}[n]$, и *полусвободным*, если есть фильтрация $0 = \Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \cdots = \mathsf{P}$ со свободными факторами Φ_{i+1}/Φ_i. Обозначим через $\mathscr{SF}\text{–}\mathscr{A}$ полную ДГ категорию полусвободных ДГ модулей. Канонический ДГ функтор $\mathscr{SF}\text{–}\mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{M}od\text{–}\mathscr{A}$ индуцирует эквивалентность триангулированных категорий $\mathcal{H}^0(\mathscr{SF}\text{–}\mathscr{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathscr{A})$ [1], [2]. Обозначим через $\mathscr{SF}_{fg}\text{–}\mathscr{A} \subset \mathscr{SF}\text{–}\mathscr{A}$ полную ДГ подкатегорию конечно порожденных полусвободных ДГ модулей, т. е. $\Phi_n = \mathsf{P}$ для некоторого n и Φ_{i+1}/Φ_i – конечная сумма $\mathsf{h}^{\mathsf{Y}}[n]$. *ДГ категория совершенных модулей* $\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{A}$ – это полная ДГ подкатегория $\mathscr{SF}\text{–}\mathscr{A}$, состоящая из всех ДГ модулей, гомотопически эквивалентных прямым слагаемым объектов из $\mathscr{SF}_{fg}\text{–}\mathscr{A}$. Пусть $\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{A}$ – гомотопическая категория $\mathcal{H}^0(\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{A})$. Она триангулирована и эквивалентна подкатегории компактных объектов $\mathcal{D}(\mathscr{A})^c \subset \mathcal{D}(\mathscr{A})$.

Определение 1. Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ – малые ДГ категории и S – $\mathscr{B}$-$\mathscr{A}$-бимодуль. Определим *верхнетреугольную* ДГ категорию $\mathscr{C} = \mathscr{A} \sqcup_{\mathsf{S}} \mathscr{B}$ по правилу:

$$1)\ \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{A}) \sqcup \mathrm{Ob}(\mathscr{B}), \qquad 2)\ \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) = \begin{cases} \mathsf{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y), & X, Y \in \mathscr{A}, \\ \mathsf{Hom}_{\mathscr{B}}(X,Y), & X, Y \in \mathscr{B}, \\ \mathsf{S}(Y,X), & X \in \mathscr{A},\ Y \in \mathscr{B}, \\ 0, & X \in \mathscr{B},\ Y \in \mathscr{A}, \end{cases}$$

с композицией, приходящей из ДГ категорий $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ и структуры бимодуля на S [3], [4]. Определим *склейку* $\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{A} \ominus_{\mathsf{S}} \mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{B}$ (соотв. $\mathcal{D}(\mathscr{A}) \ominus_{\mathsf{S}} \mathcal{D}(\mathscr{B})$) как $\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{C}$ (соотв. $\mathcal{D}(\mathscr{C})$), где $\mathscr{C} = \mathscr{A} \sqcup_{\mathsf{S}} \mathscr{B}$.

Естественные вложения $\mathsf{a}\colon \mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{A} \sqcup_{\mathsf{S}} \mathscr{B}$ и $\mathsf{b}\colon \mathscr{B} \hookrightarrow \mathscr{A} \sqcup_{\mathsf{S}} \mathscr{B}$ задают вполне строгие ДГ функторы a^* и b^* из $\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{A}$ и $\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{B}$ в $\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{A} \ominus_{\mathsf{S}} \mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{B}$, индуцирующие вполне строгие функторы a^*, b^* из $\mathcal{D}(\mathscr{A})$, $\mathcal{D}(\mathscr{B})$ (соотв. $\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{A}$, $\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{B}$) в $\mathcal{D}(\mathscr{C})$ (соотв. $\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{C}$) и задающие полуортогональное разложение триангулированных категорий $\mathcal{D}(\mathscr{C}) = \langle \mathcal{D}(\mathscr{A}), \mathcal{D}(\mathscr{B}) \rangle$ и $\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{C} = \langle \mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{A}, \mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{B} \rangle$. Функторы ограничения a_*, b_* из $\mathscr{SF}\text{–}(\mathscr{A} \sqcup_{\mathsf{S}} \mathscr{B})$ на $\mathscr{SF}\text{–}\mathscr{A}$, $\mathscr{SF}\text{–}\mathscr{B}$ индуцируют производные функторы a_*, b_* из $\mathcal{D}(\mathscr{A} \sqcup_{\mathsf{S}} \mathscr{B})$ в $\mathcal{D}(\mathscr{A})$, $\mathcal{D}(\mathscr{B})$, которые переводят совершенные модули в совершенные. Пусть T есть $\mathscr{B}$-$\mathscr{A}$-бимодуль. Для каждого $\mathscr{B}$-модуля N можно построить ДГ $\mathscr{A}$-модуль $\mathsf{N} \otimes_{\mathscr{B}} \mathsf{T}$. ДГ функтор $(-) \otimes_{\mathscr{B}} \mathsf{T}\colon \mathscr{M}od\text{–}\mathscr{B} \to \mathscr{M}od\text{–}\mathscr{A}$ не сохраняет квазиизоморфизмы в общем случае, но если T – полусвободный $\mathscr{B}$-$\mathscr{A}$-бимодуль, мы получаем ДГ функтор $(-) \otimes_{\mathscr{B}} \mathsf{T}\colon \mathscr{SF}\text{–}\mathscr{B} \to \mathscr{SF}\text{–}\mathscr{A}$, который на уровне гомотопических категорий индуцирует производный функтор $(-) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}} \mathsf{T}\colon \mathcal{D}(\mathscr{B}) \to \mathcal{D}(\mathscr{A})$.

Всякий $\mathscr{B}$-$\mathscr{A}$-бимодуль P задает $\mathscr{B}$-$\mathscr{C}$-бимодуль $\underline{\mathsf{P}}$ по правилу $\underline{\mathsf{P}}(B, C) = \mathsf{P}(B, C)$, если $C \in \mathscr{A}$, и 0 в противном случае. Каждый морфизм $\phi\colon \mathsf{S} \to \mathsf{T}$ $\mathscr{B}$-$\mathscr{A}$-бимодулей индуцирует $\mathscr{B}$-$\mathscr{C}$-бимодуль $\widetilde{\mathsf{T}}$ по правилу: $\widetilde{\mathsf{T}}(B, C) = \mathsf{T}(B, C)$, если $C \in \mathscr{A}$, и $\widetilde{\mathsf{T}}(B, C) = \mathsf{Hom}_{\mathscr{B}}(C, B)$, если $C \in \mathscr{B}$, с естественной структурой бимодуля, происходящей из композиции $\mathsf{Hom}_{\mathscr{B}}(C, B) \otimes \mathsf{S}(C, A) \to \mathsf{S}(B, A) \xrightarrow{\phi} \mathsf{T}(B, A)$, где $C \in \mathscr{B}$. Имеется изоморфизм $\widetilde{\mathsf{S}}(B, -) \cong \mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(-, B) = \mathsf{h}^B_{\mathscr{C}}$, и функтор $(-) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}} \widetilde{\mathsf{S}}\colon \mathcal{D}(\mathscr{B}) \to \mathcal{D}(\mathscr{C})$ изоморфен вполне строгому функтору $b^*\colon \mathcal{D}(\mathscr{B}) \to \mathcal{D}(\mathscr{C})$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/rm9720

Теорема 1. *Пусть ДГ категории* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, *ДГ* $\mathscr{B}$-$\mathscr{A}$-*бимодули* S, T *и* $\phi\colon \mathsf{S}\to\mathsf{T}$ *такие, как выше, а* $\mathsf{R}=\mathsf{Cone}(\phi)$ – *конус* ϕ. *Если для любых ДГ* $\mathscr{B}$-*модулей* M, N

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathscr{A})}\bigl(\mathsf{M}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\mathsf{R},\mathsf{N}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\mathsf{T}\bigr)=0, \tag{1}$$

то функтор $(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{T}}\colon \mathcal{D}(\mathscr{B})\to\mathcal{D}(\mathscr{A}\sqcup_{\mathsf{S}}\mathscr{B})$ *вполне строгий и задает полуортогональное разложение* $\mathcal{D}(\mathscr{A}\sqcup_{\mathsf{S}}\mathscr{B})=\langle\mathcal{D}(\mathscr{E}),\mathcal{D}(\mathscr{B})\rangle$ *для некоторой ДГ категории* $\mathscr{E}$.

Доказательство. Морфизм ϕ индуцирует морфизм $\tilde{\phi}\colon\widetilde{\mathsf{S}}\to\widetilde{\mathsf{T}}$, чей конус квазиизоморфен $\mathscr{B}$-$\mathscr{C}$-бимодулю $\underline{\mathsf{R}}$. Функтор $(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\underline{\mathsf{R}}$ изоморфен композиции a^* и $(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\mathsf{R}$, тогда как функтор $(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\mathsf{T}$ изоморфен $a_*(-\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{T}})$. Получаем изоморфизмы

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathscr{C})}\bigl(\mathsf{M}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\underline{\mathsf{R}},\mathsf{N}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{T}}\bigr)\cong\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathscr{A})}\bigl(\mathsf{M}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\mathsf{R},\mathsf{N}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\mathsf{T}\bigr)=0,$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathscr{C})}\bigl(\mathsf{M}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{S}},\mathsf{N}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\underline{\mathsf{R}}\bigr)\cong\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathscr{C})}(b^*(\mathsf{M}),a^*(\mathsf{N}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\mathsf{R}))=0.$$

Следовательно, для любых ДГ $\mathscr{B}$-модулей M и N имеем

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathscr{C})}\bigl(\mathsf{M}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{T}},\mathsf{N}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{T}}\bigr)\cong\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathscr{C})}\bigl(\mathsf{M}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{S}},\mathsf{N}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{T}}\bigr)\cong\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathscr{C})}\bigl(\mathsf{M}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{S}},\mathsf{N}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{S}}\bigr).$$

Функтор $(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{S}}$ вполне строгий, значит, и функтор $(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{T}}$ также вполне строгий.

Теорема 2. *Пусть ДГ категории* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, *ДГ* $\mathscr{B}$-$\mathscr{A}$-*бимодули* S, T, R *и морфизм* ϕ *такие, как выше, и выполнено условие* (1). *Если функторы* $(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{T}}$ *и* $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\widetilde{\mathsf{T}},-)$ *переводят совершенные комплексы в совершенные, то существует полуортогональное разложение* $\mathcal{P}erf\text{–}(\mathscr{A}\sqcup_{\mathsf{S}}\mathscr{B})=\langle\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{E},\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{B}\rangle$ *для некоторой малой ДГ категории* $\mathscr{E}$.

Категория $\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{E}$ (соотв. $\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{E}$) из теоремы 2 будет называться *партнером Крулля–Шмидта* (*КШ-партнером*) для $\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{A}$ (соотв. $\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{A}$). Поскольку композиция $(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathscr{B}}\widetilde{\mathsf{T}}$ и $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\widetilde{\mathsf{S}},-)$ изоморфна тождественному функтору, K-теории для $\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{E}$ и $\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{A}$ одинаковы. Более того, их K-мотивы изоморфны.

Пусть X – гладкая проективная схема и $\mathsf{P}_s\in\mathscr{P}erf\text{–}X$, $s=1,2$, – совершенные комплексы, чьи носители $\operatorname{supp}\mathsf{P}_1$ и $\operatorname{supp}\mathsf{P}_2$ не пересекаются. Рассмотрим склейку $\mathscr{D}=\mathscr{P}erf\text{–}X\ominus_{\mathsf{S}}\mathscr{P}erf\text{–}\mathbf{k}$, где $\mathsf{S}=\mathsf{P}_1\oplus\mathsf{P}_2$. Положим $\mathsf{T}=\mathsf{P}_2$. По теореме 2 функтор $(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathbf{k}}\widetilde{\mathsf{T}}$ из $\mathcal{P}erf\text{–}\mathbf{k}$ в $H^0(\mathscr{D})$ вполне строгий и имеется полуортогональное разложение $H^0(\mathscr{D})=\langle\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{E},\mathcal{P}erf\text{–}\mathbf{k}\rangle$. Получается некоторый КШ-партнер $\mathscr{P}erf\text{–}\mathscr{E}$ для $\mathscr{P}erf\text{–}X$.

Для примера рассмотрим гладкую проективную кривую $X=C$ рода $g=g(C)$. Пусть P_1, P_2 – когерентные пучки кручения длины $l_s=\operatorname{length}P_s$, $s=1,2$, такое, что $\operatorname{supp}\mathsf{P}_1\cap\operatorname{supp}\mathsf{P}_2=\varnothing$. Легко проверить, что КШ-партнер $\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{E}$ не эквивалентен $\mathcal{P}erf\text{–}C$. В самом деле, целочисленная билинейная форма $\chi(E,F)=\sum_m(-1)^m\dim\operatorname{Hom}(E,F[m])$ на $K_0(C)$ пропускается через $\mathbb{Z}^2=H^{\mathrm{ev}}(C,\mathbb{Z})$. Тогда формы χ на $K_0(C)$ и $K_0(\mathscr{E})$ суть $\chi_C=\begin{pmatrix}1-g&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\chi_{\mathscr{E}}=\chi_t:=\begin{pmatrix}t&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $t=1-g-l_1l_2$. Билинейные формы χ_t не эквивалентны для разных t. Значит, категории $\mathcal{P}erf\text{–}\mathscr{E}$, являющиеся КШ-партнерами для $\mathcal{P}erf\text{–}C$, не эквивалентны ни друг другу при разных t, ни само́й $\mathcal{P}erf\text{–}C$. Случай $\mathbb{P}^1$ и двух точек $\mathsf{P}_s=p_s$, $s=1,2$, обсуждается в [5; п. 3.1].

Список литературы

[**1**] B. Keller, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **27** (1994), 63–102. [**2**] V. A. Lunts, D. O. Orlov, *J. Amer. Math. Soc.*, **23**:3 (2010), 853–908. [**3**] G. N. Tabuada, *Théorie homotopique des DG-catégories*, PhD thesis, Univ. Paris 7, 2007, 178 pp. [**4**] D. Orlov, “Smooth and proper noncommutative schemes and gluing of DG categories”, *Adv. Math.* (to appear); 2014 (v5 – 2015), 43 pp., arXiv: 1402.7364. [**5**] Д. О. Орлов, *Тр. МИАН*, **290** (2015), 80–94.

Д. О. Орлов (D. O. Orlov)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: orlov@mi.ras.ru

Представлено Д. В. Трещёвым
Принято редколлегией
29.04.2016