Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Попов, Восстановление характеристических функций в двумерной радионической томографии, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 115–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:14:13

УДК 517.3

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
В ДВУМЕРНОЙ РАДОНОВСКОЙ ТОМОГРАФИИ

Д. А. Попов

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение. Математическая модель томографа	116
§ 2. Формулировка результатов	128
§ 3. Ошибки восстановления и ряды осциллирующих интегралов	134
§ 4. Анализ критических точек	144
§ 5. Оценка ошибки дискретизации	151
5.1. Предварительные замечания	151
5.2. Доказательство леммы 5.1	154
5.2.1. Одномерный интеграл $I_1[u]$	155
5.2.2. Интеграл $J_{nm}[\tilde{\rho}u_n]$	158
5.2.3. Интеграл $J_{nm}[\rho_0 u_n]$	159
5.2.4. Интеграл $J_{nm}[\rho_i u_n]$	162
5.2.5. Завершение доказательства леммы 5.1	163
5.3. Доказательство пп. 1, 2 теоремы 2.1	166
5.4. Доказательство п. 3 теоремы 2.1	168
5.4.1. Оценка интегралов $J_{nm}[\tilde{\rho}u_n]$	168
5.4.2. Оценка интеграла $J_{nm}[\rho_0 u_n]$ и завершение доказательства теоремы 2.1	170
5.5. Формальный показатель сходимости и точность полученных оценок ...	177
5.6. Заключительные замечания	180
Приложение. Оценки осциллирующих интегралов	181
1. Интегрирование по частям	181
2. Остаточный член в методе стационарной фазы	182
3. Равномерные оценки одномерных ОИ	184
4. Ошибка регуляризации	187
5. Специальный класс двумерных ОИ	187
6. Оценки главных значений ОИ	194
Список обозначений	196
Список литературы	197

§ 1. Введение. Математическая модель томографа

В настоящее время под томографией понимается широкий круг методов, позволяющих восстановить функцию, характеризующую внутреннюю структуру объекта, по известным интегралам от этой функции [1]–[4]. Данная работа посвящена только задаче *двумерной радоновской томографии*. Заметим, что именно решение этой задачи нашло свое практическое воплощение в создании действующих рентгеновских томографов. Точное значение термина “радоновская томография” будет объяснено ниже.

Автор искренне благодарен В. П. Паламодову за полезные обсуждения и критику.

Математические вопросы томографии изложены в ряде работ, среди которых отметим [5]–[11]. Строгая формулировка задачи восстановления в томографии эквивалентна выбору некоторой *математической модели томографа* (ММТ), которая должна включать описание

- 1) *класса восстанавливаемых функций (объектов) – $\{\mu\}$,*
- 2) *массива исходных данных, т.е. набора функционалов от $\mu \in \{\mu\}$, по которому производится восстановление,*
- 3) *алгоритма восстановления.*

При описании ММТ будем следовать работе [12], где подробно изложены различные вопросы построения ММТ.

Объектом восстановления в двумерной томографии является функция μ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с выделенным началом координат $\vec{O}$ – *центром сканирования*. Обозначая восстанавливаемую функцию через μ , мы отдаем дань традиции – в рентгеновской томографии восстанавливается коэффициент поглощения рентгеновских лучей, обозначаемый через μ .

Класс $\{\mu\}$ восстанавливаемых функций – это, по определению, функции с компактным носителем в круге единичного диаметра, которые можно представить в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mu(\vec{r}) &= \sum_{i=1}^p g_i(\vec{r}) \chi_{\mathcal{D}_i}(\vec{r}) \quad (\vec{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2), \\ \mu(\vec{r}) &= 0 \quad (|\vec{r}| \geq R_H, \quad R_H < 0.5, \quad p \leq I). \end{aligned}$$

В этой формуле $g_i \in C^\infty$ и $\chi_{\mathcal{D}}$ – *характеристическая функция области $\mathcal{D}$* . Таким образом, функция μ может иметь разрывы первого рода на объединении $\cup \partial \mathcal{D}_i$ кривых $\partial \mathcal{D}_i$. Здесь и везде ниже $\partial \mathcal{D}_i$ – граница $\mathcal{D}_i$.

Будем говорить, что $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$, если μ имеет вид (1.1), $p \leq I$ и кривые $\partial \mathcal{D}_i$ – аналитические. Везде ниже предполагается, что $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$. Заметим, что это предположение связано только с желанием максимально упростить формулировки и доказательства, и используемый метод позволяет рассмотреть случай, когда кривые $\partial \mathcal{D}_i$ состоят из конечного числа дуг ограниченной гладкости, в предположении, что каждая дуга является либо отрезком прямой, либо имеет конечное число точек уплощения конечного порядка. Краткие замечания по этому поводу содержатся в конце § 5.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00767).

Число I , входящее в определение класса $\{\mu^\omega, I\}$, предполагается фиксированным. Так как все рассматриваемые ниже алгоритмы линейны, то достаточно рассмотреть случай $\mu = g\chi_{\mathcal{D}}$.

Везде ниже

$$\vec{a} = (a_x, a_y), \quad a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y, \quad [\vec{a}, \vec{b}] = a_x b_y - a_y b_x$$

и через $\hat{f}$ обозначается *преобразование Фурье* функции f :

$$\hat{f}(\omega) = \int e^{i\omega t} f(t) dt, \quad \hat{\mu}(\vec{\omega}) = \iint e^{i\lambda \langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle} \mu(\vec{r}) dx dy$$

$$(\vec{\omega} = \lambda \vec{\eta}, \quad \lambda = |\vec{\omega}|, \quad \vec{\eta} = (\cos \varphi, \sin \varphi)).$$

Для функции $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$ определено ее *преобразование Радона*

$$(1.2) \quad J(\varphi, q) = \int \mu(q\vec{\eta} + t\vec{\eta}^*) dt \quad (\vec{\eta}^* = (-\sin \varphi, \cos \varphi)).$$

Здесь и ниже, если пределы интегрирования или суммирования опущены, то оно производится от $-\infty$ до $+\infty$ и понимается в смысле главного значения. Ясно, что $J(\varphi, q)$ – интеграл от μ вдоль прямой (φ, q) , задаваемой уравнением $\langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle = q$. Функцию p_φ ($p_\varphi(q) = J(\varphi, q)$) в литературе называют проекцией под углом φ . При $\mu = \{\mu^\omega, I\}$ функция p_φ – кусочно-гладкая и $p_\varphi^{(1)} \in L^1$.

Сформулируем простейшую задачу восстановления, которая и решается ниже.

Рассмотрим сеть прямых $\{\varphi_k, q_j\}_1$, задаваемых уравнениями

$$q_j = j\Delta q + \delta, \quad \varphi_k = k\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{N_\varphi}, \quad 0 \leq \delta < \Delta q,$$

$$(1.3) \quad k = 0, 1, \dots, 2N_\varphi - 1, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Сеть $\{\varphi_k, q_j\}_1$ отвечает томографу первого поколения; более современные томографы отличаются, главным образом, выбором исходной сети прямых, вдоль которых производится измерение исходных данных. Будем считать, что в качестве исходных данных выступают значения Y_{jk} сглаженного преобразования Радона:

$$(1.4) \quad Y_{jk} = J^\Pi(\varphi_k, q_j), \quad J^\Pi(\varphi, q) = \int \Pi(q - q') J(\varphi, q') dq'.$$

Функция $\Pi(q)$ называется *приборной функцией* и является некоторой регуляризацией δ -функции:

$$(1.5) \quad \Pi(q) = h^{-1} \Pi_1\left(\frac{q}{h}\right), \quad \int \Pi(q) dq = 1, \quad \Pi(q) \rightarrow \delta(q) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Предполагается, что функция $\Pi(q)$ достаточно быстро убывает при $|q| \rightarrow \infty$. Точное описание класса $\{\Pi\}$ рассматриваемых приборных функций будет дано ниже. Примерами приборных функций являются

$$(1.6) \quad \Pi_1(q) = h^{-1} \cdot \begin{cases} 1 & (|q| < \frac{h}{2}), \\ 0 & (|q| > \frac{h}{2}), \end{cases} \quad \Pi_2(q) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-q^2/h^2}.$$

На практике величина $\Delta\varphi$ выбирается согласованно с Δq . Естественное условие согласования имеет вид $\Delta q \simeq R_0 \Delta\varphi$, где $R_0 \gtrsim R_H$ – радиус области восстановления. Это условие может быть обосновано с помощью результатов, изложенных в §3. В связи с этим и чтобы иметь возможность рассматривать предел $\Delta\varphi \rightarrow 0$, $\Delta q \rightarrow 0$, *будем говорить, что задан полный набор данных восстановления, если заданы величины Y_{jk} , $\Delta q = L \Delta\varphi$, $L \geq L_0$ и L_0 не зависит от Δq .*

Задача состоит в том, чтобы по полному набору данных $\{Y_{jk}\}$ приближенно восстановить функцию $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$ при $|\vec{r}| \leq R_0 < 0.5$.

Усложнение этой формулировки, связанное с конечностью набора данных и наличием статистических ошибок (шума) кратко обсуждается ниже.

Алгоритм восстановления – это линейное отображение, позволяющее по набору $\{Y_{jk}\}$ исходных данных построить приближение μ^A функции μ , задающее томограмму $\mu^A(\vec{r})$,

$$(1.7) \quad A(\{Y_{jk}\}) = \mu^A(\vec{r}) \quad (|\vec{r}| \leq R_0 < 0.5).$$

В такой постановке *мы ограничиваемся линейными моделями с полным набором данных*, и вне нашего рассмотрения остаются задачи с неполными данными ($\varphi_k < 2\pi - \Delta$) и задачи о нелинейных эффектах в томографии, представляющие большой теоретический и практический интерес [5]–[7], [13], [14].

При наличии полного набора данных алгоритм A (1.7) естественно строить на основе *формулы обращения преобразования Радона* [15], [16]

$$(1.8) \quad \mu(\vec{r}) = (P\Psi)(\vec{r}) = \int_0^\pi \Psi(\varphi, \langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle) d\varphi, \\ \Psi(\varphi, a) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty t^{-2} [2J(\varphi, a) - J(\varphi, a+t) - J(\varphi, a-t)] dt.$$

В такой форме эта формула представляет собой суперпозицию операций свертки J как функции q с обобщенной функцией $-(2\pi^2)^{-1}q^{-2}$ [17] и *обратного проецирования* P . На негладких функциях формула (1.8) теряет смысл, и для построения алгоритма используется ее регуляризованный вариант

$$(1.9) \quad \tilde{\mu}^A(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{\Psi}^A(\varphi, \langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle) d\varphi, \\ \tilde{\Psi}^A(\varphi, a) = \int H^A(a-q) J^\Pi(\varphi, q) dq,$$

где $H^A(s)$ – некоторая регуляризация обобщенной функции $-(2\pi^2)^{-1}s^{-2}$. Применяя к этим интегралам простейшую квадратурную формулу трапеций, получим класс

$\{A\}$ алгоритмов, зависящих от выбора функции H^A . При $A \in \{A\}$ функция $\mu^A = A(\{Y_{jk}\})$ восстанавливается по формулам

$$(1.10) \quad \mu^A(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N_\varphi-1} \Psi(\varphi_k, \langle \vec{\eta}_k, \vec{r} \rangle) \quad (\vec{\eta}_k = (\cos \varphi_k, \sin \varphi_k)),$$

$$\Psi^A(\varphi_k, a) = \sum_j H^A(a - q_j) Y_{jk} \Delta q.$$

Алгоритмы такого типа называются *алгоритмами свертки и обратной проекции (АСОП)*. Именно эти алгоритмы используются в практике томографического восстановления и рассматриваются ниже.

С формальной точки зрения на этом заканчивается построение ММТ.

Наличие полного набора данных и выбор АСОП и составляет содержание термина двумерная радоновская томография.

Дальнейшие уточнения связаны с более детальным рассмотрением интересующих нас алгоритмов. Прежде всего заметим, что переход к более сложным квадратурным формулам при вычислении интеграла $\tilde{\Psi}^A$ (1.9), если эти формулы основаны на локальном методе приближения (см. ниже) и инвариантны относительно сдвига на Δq , приводит просто к переопределению функции H^A . Требования локальности и инвариантности естественны, если рассматривается случай малых $\Delta\varphi, \Delta q$. Учитывая, что преобразование Фурье обобщенной функции $-(2\pi^2)^{-1} s^{-2}$ равно $(2\pi)^{-1} |\lambda|$ (см. [17]), можно предположить, что

$$(1.11) \quad H^A(s) = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{-i\lambda s} |\lambda| R^A(\lambda) d\lambda.$$

Функция R^A называется *эффективным регуляризатором* и зависит от параметра регуляризации Λ^{-1} ,

$$R^A(\lambda) \rightarrow 1 \quad (\Lambda \rightarrow \infty), \quad R^A(\lambda) = 1 + O(|\lambda|) \quad (|\lambda| \rightarrow 0),$$

$$R^A(\lambda) \rightarrow 0 \quad (|\lambda| \rightarrow \infty).$$

Ниже рассматриваются только *однородные регуляризаторы* вида

$$R^A(\lambda) = R_1^A\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right).$$

Наиболее важным обстоятельством при построении алгоритма является то, что с практической точки зрения интересны только *алгоритмы высокого разрешения*. Это алгоритмы, позволяющие локализовать разрывы функции μ с точностью $\sim \Delta q$. Требование высокого разрешения приводит к следующим условиям (см. [12]):

$$(1.12) \quad \Lambda^{-1} = C\Delta q, \quad L\Delta\varphi = \Delta q, \quad h = C\Delta q \quad (C \simeq 1).$$

В соответствии с этим ниже рассматриваются только алгоритмы $A \in \{A\}$, для которых выполняются следующие *условия однородности*:

$$(1.13) \quad H^A(s) = \Omega S^A(\xi), \quad \hat{\Pi}(\lambda) = S_\Pi(\xi) \quad \left(\xi = \frac{\lambda}{\Omega}\right).$$

Здесь и везде ниже

$$\Omega = \frac{\pi}{\Delta q}.$$

Функции S^A , S_Π в (1.13) не зависят от Ω , S_Π — гладкая функция, S^A — кусочно-гладкая функция и обе они убывают при $|\xi| \rightarrow \infty$,

$$(1.14) \quad S^A(\xi) = O(|\xi|^{-\kappa_1}), \quad S_\Pi(\xi) = O(|\xi|^{-\kappa_2}) \quad (|\xi| \rightarrow \infty).$$

Подробнее классы функций S^A , S_Π будут описаны в § 2. Здесь отметим только, что функция S^A может иметь достаточно сложный вид и, например, для используемых на практике алгоритмов

$$(1.15) \quad S^A(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(\pi\xi/2)}{\pi\xi/2} \right)^p \sum_n |\xi + 2p| S_R(\xi + 2p),$$

где функция S_R достаточно быстро убывает и

$$S_R(2n) = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Чтобы объяснить происхождение формулы (1.15) и понять приводимое в § 2 определение алгоритма, рассмотрим конкретные примеры. Простейший класс *алгоритмов без интерполяции* задается регуляризатором $R(\lambda) = S_R(\xi)$ ($\xi = \lambda/\Omega$) и в этом случае ($A = A_\infty(R)$)

$$(1.16) \quad H^A(s) = H_R(s) = \frac{1}{4\pi^2} \int |\lambda| R(\lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda.$$

Алгоритмы без интерполяции не используются на практике, что связано с трудностью их машинной реализации (см. [5], [12]). Все используемые алгоритмы принадлежат к классу $A_\alpha(R, V)$ *алгоритмов с интерполяцией*. Чтобы построить эти алгоритмы, начнем с простого замечания об интерполяции. Пусть заданы отсчеты $f_n = f(n\Delta t)$ функции f . Линейный и инвариантный относительно сдвигов на Δt *оператор интерполяции* $V^{\Delta t}$ задается соотношением

$$(V^{\Delta t}(\{f_n\}))(t) = \sum_n V_{\Delta t}(t - n\Delta t) f_n \Delta t,$$

и функция $V_{\Delta t}$ называется *функцией интерполяции*. При малых Δt наибольший интерес представляют локальные методы интерполяции, для которых $V_{\Delta t}(t) = 0$ при $|t| > p\Delta t$. Подчеркнем, что несмотря на терминологию, выполнение условий интерполяции $(V^{\Delta t}(\{f_n\}))(n\Delta t) = f_n$ в общем не предполагается. *Алгоритм* $A_\alpha(R, V)$ задается выбором регуляризатора R , целого числа $\alpha = 1, 2, \dots$ и функции интерполяции $V_{\frac{\Delta q}{\alpha}}$. По определению для $A = A_\alpha(R, V)$

$$(1.17) \quad \mu^A(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N_\varphi-1} \left(V_{\frac{\Delta q}{\alpha}} \left(\left\{ \Psi_R^T \left(\varphi_k, \frac{\Delta q}{\alpha} n \right) \right\} \right) \right) \langle \vec{r}, \vec{\eta}_k \rangle \Delta \varphi,$$

$$\Psi_R^T(\varphi_k, a) = \sum_j H_R(a - q_j) Y_{jk} \Delta q,$$

где функция H_R определена в (1.16). Таким образом, для реализации этого алгоритма необходимо вычислить отсчеты $\Psi_R^T(\varphi_k, n\Delta q/\alpha)$, а затем использовать оператор интерполяции $V^{\Delta q/\alpha}$ для вычисления обратной проекции. Алгоритмы $A_\alpha(R, V)$ принадлежат к классу $\{A\}$ и для них

$$H^A(s) = V^{\frac{\Delta q}{\alpha}} \left(\left\{ H_R \left(n \frac{\Delta q}{\alpha} \right) \right\} \right) (s) = \sum_n V_{\frac{\Delta q}{\alpha}} \left(s - \frac{n\Delta q}{\alpha} \right) H_R \left(\frac{n\Delta q}{\alpha} \right) \frac{\Delta q}{\alpha},$$

$$\hat{H}^A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \hat{V}_{\frac{\Delta q}{\alpha}}(\lambda) \sum_p |\lambda + 2p\alpha\Omega| R(\lambda + p\alpha\Omega).$$

Если выполняются условия $\sum_p |p|R(2p\alpha\Omega) = 0$, то для $A = A_\alpha(R, V)$ существует эффективный регуляризатор

$$(1.18) \quad R^A(\lambda) = |\lambda|^{-1} \hat{V}_{\frac{\Delta q}{\alpha}}(\lambda) \sum_p |\lambda + 2p\alpha\Omega| R(\lambda + 2p\alpha\Omega).$$

На практике используются *локальные методы интерполяции* и $(V_{\Delta q}(q) = 0, |q| > p\Delta q)$ с малым $\alpha = 1, \dots, 4$. Чаще всего используются интерполяции нулевого или первого порядка (линейная интерполяция), для которых $V_{\Delta t} = V_{\Delta t}^{0,1}$,

$$(1.19) \quad V_{\Delta t}^0(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{cases} 1 & (|t| < \frac{\Delta t}{2}) \\ 0 & (|t| > \frac{\Delta t}{2}) \end{cases}, \quad V_{\Delta t}^1(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \begin{cases} 1 - \frac{t}{\Delta t} & (|t| < \Delta t) \\ 0 & (|t| > \Delta t) \end{cases},$$

и преобразования Фурье этих функций отвечают значениям $p = 1, 2$ в общей формуле для интерполяции локальными B -сплайнами:

$$\hat{V}_{\Delta t}(\lambda) = \left(\frac{\sin(\lambda\Delta t/2)}{\lambda\Delta t/2} \right)^p.$$

Из (1.18) следует, что при $\alpha = 1$ можно ограничиться рассмотрением финитных регуляризаторов, для которых $R(\lambda) = 0$ ($|\lambda| > \Omega$).

Приведем примеры трех регуляризаторов, используемых на практике:

$$(1.20) \quad R_i(\lambda) = S_i(\xi), \quad S_i(\xi) = 0 \quad (|\xi| > 1, \xi = \lambda/\Omega),$$

$$S_1(\xi) = 1, \quad S_2(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi/2)}{\pi\xi/2}, \quad S_3(\xi) = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} \quad (|\xi| < 1),$$

и, например, для алгоритмов с линейной интерполяцией при $\alpha = 1$, $R = R_i$

$$\hat{H}^A(\lambda) = \Omega S^A(\xi) = \frac{\Omega}{2\pi} \left(\frac{\sin(\pi\xi/2)}{\pi\xi/2} \right)^2 T_i(\xi),$$

$$T_1(\xi) = |\xi| \pmod{2}, \quad T_2(\xi) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\xi}{2} \right|, \quad T_3(\xi) = \frac{1}{\pi} |\sin \pi\xi|$$

и T_i – ограниченная функция с периодом 2. Более подробно примеры алгоритмов рассмотрены в [12]. Общий метод их построения вытекает из теории вычисления сингулярных сверток, изложенной в [18].

При определении полного набора данных предполагалось, что точно известно бесконечное число значений Y_{jk} (1.4). На практике известен только конечный набор Y_{jk} ($|j| \leq N_q$) со статистической ошибкой ΔY_{jk} . Учет статистических ошибок не представляет трудности, если считать, что ΔY_{jk} – независимые случайные величины с нулевым средним и дисперсией $\sigma_J^2(\varphi_k, q_j)$. В этом случае для дисперсии $\sigma_\mu^2(\vec{r})$ величины $\mu^A(\vec{r})$ имеет место следующая формула, справедливая при $\Omega \gg 1$ и естественных предположениях о гладкости функции $\sigma_J^2(\varphi, q)$ [12]:

$$\sigma_\mu^2(\vec{r}) \simeq \sigma_J^2(\vec{r}) \Delta\varphi (\Delta q)^{-2} \int_0^\infty (S^A(\xi))^2 d\xi,$$

$$\sigma_J^2(\vec{r}) = \pi^{-1} \int_0^\pi \sigma_J^2(\varphi, \langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle) d\varphi.$$

Из этой формулы, в частности, видно, что величина $\sigma_\mu^2(\vec{r})$ расходится при $\Delta q \rightarrow 0$:

$$\sigma_\mu^2(\vec{r}) \simeq C(A) \sigma_J^2(\vec{r}) (\Delta q R_0)^{-1} \quad (R_0 \Delta\varphi \simeq \Delta q).$$

Это общее свойство неустойчивости алгоритмов высокого разрешения, которые, тем не менее, используются на практике. *Ниже статистические ошибки больше не рассматриваются.*

Рассмотрим случай конечного набора данных, когда величины Y_{jk} известны только при $|j| \leq N_q$. Через $\mu_{N_q}^A(\vec{r})$ обозначим результат восстановления с помощью алгоритма A , если по определению считать, что $Y_{jk} = 0$ при $|j| > N_q$, т.е. если суммирование по j в (1.10) ведется по области $|j| \leq N_q$. Предположим, что

$$N_0 \gamma < N_q \quad \left(N_0 = \frac{R_0}{\Delta q}, \gamma < 1 \right), \quad \Pi(q) \leq \frac{C}{\Delta q} \left(\frac{q}{\Delta q} \right)^{-m}.$$

Так как $|H^A(s)| \leq \overline{H}(\Delta q)^{-2}$ при $A \in \{A\}$, то

$$|\mu^A(\vec{r}) - \mu_{N_q}^A(\vec{r})| \leq \frac{CM \overline{H}(\Delta q)^{m-2}}{(m-1)(1-\gamma)^m R_0^m},$$

$$M = \max_\varphi \int |J(\varphi, q)| dq.$$

Таким образом, для быстро убывающих приборных функций ($m \gg 1$) и $\Delta q \ll 1$ можно ограничиться рассмотрением величины $\mu^A(\vec{r})$, что и делается ниже.

Для алгоритмов высокого разрешения при выполнении условий однородности (1.13) результат восстановления $\mu^A(\vec{r})$ зависит от одного малого параметра Δq и можно ставить вопрос о сходимости алгоритма при $\Delta q \rightarrow 0$.

Будем говорить, что алгоритм A сходится в точке $\vec{r}$ ($|\vec{r}| < 0.5$) для заданного $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$, если

$$(1.21) \quad |\Delta \mu^A(\vec{r})| = |\mu^A(\vec{r}) - \mu(\vec{r})| = O(\Omega^{-\sigma_\infty^A(\vec{r})}) \quad (\Omega \rightarrow \infty),$$

$$\sigma_\infty^A(\vec{r}) > 0.$$

Далее величина

$$(1.22) \quad \Delta\mu^A(\vec{r}) = \mu^A(\vec{r}) - \mu(\vec{r})$$

называется ошибкой восстановления, а величина $\sigma_\infty^A(\vec{r})$ – асимптотическим показателем сходимости в точке $\vec{r}$. Как следует из этого определения, нас будет интересовать только *поточечная сходимость*. Для разрывных функций μ такая сходимость не может быть равномерной, так как $\mu^A(\vec{r})$ – гладкая функция.

Хотя сходимость алгоритма зависит только от поведения величины $\mu^A(\vec{r})$ при $\Omega \rightarrow \infty$, в основном тексте рассматривается более сложная задача об оценке величины $\Delta\mu^A(\vec{r})$ при конечном Ω . В этом случае также можно ввести понятие показателя сходимости $\sigma^A(\vec{r})$.

Пусть можно указать параметры $t_1, \dots, t_N$, от которых зависит оценка сверху величины $|\Delta\mu^A(\vec{r})|$. Тогда будем говорить, что для заданного $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$ в точке $\vec{r}$ алгоритм A имеет показатель сходимости $\sigma^A(\vec{r})$, если при $\Omega \geq \Omega_0(t_1, \dots, t_N)$

$$(1.23) \quad |\Delta\mu^A(\vec{r})| \leq C(\vec{r}, t_1, \dots, t_N) \Omega^{-\sigma^A(\vec{r})}, \quad \sigma^A(\vec{r}) > 0$$

и константы $\Omega_0, C(\vec{r}, t_1, \dots, t_N)$ ограничены и могут быть явно указаны.

Вопрос о существовании сходящихся алгоритмов высокого разрешения не является тривиальным даже в случае гладких μ , так как речь, по-существу, идет о построении сходящихся квадратурных формул для интеграла $\Psi^A(\varphi, a)$ (1.9), в котором подынтегральная функция сингулярным образом зависит от шага дискретизации Δq . Это частный случай задачи вычисления сингулярной свертки с помощью алгоритма высокого разрешения [18]. В этой работе получены необходимые и достаточные условия сходимости таких алгоритмов. В интересующем нас случае эти условия имеют вид

$$(1.24) \quad R^A(2n\Omega) = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ниже случай гладких μ не рассматривается. Этот случай рассмотрен в работе [19], где доказана

ТЕОРЕМА 1.1 [19]. Пусть $\mu \in C^\infty \cap \{\mu^\omega, I\}$, выполняются условия однородности (1.13) и в некоторой окрестности $|\xi - 2p| < a$ точек $\xi = 2p$ ($p = 1, 2, \dots$) функция S^A (1.13) имеет вид $S^A(\xi) = |\xi - 2p|a_p(\xi) + b_p(\xi)$, где a_p, b_p – гладкие функции. Тогда при $\varkappa_1 > 2$ (1.14) необходимым и достаточным условием сходимости алгоритма $A \in \{A\}$ во всех точках $\vec{r}$ ($|\vec{r}| < 0.5$) является выполнение одного из двух эквивалентных условий:

- 1) $a_0(0) = (2\pi)^{-1}, b_0(0) = 0, b_p(2p) = 0$ ($p = 1, 2, \dots$);
- 2) существует эффективный регуляризатор R^A (1.11), и для него выполняются условия (1.24).

В соответствии с этим везде ниже предполагается, что

$$(1.25) \quad S^A(2p) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Задача оценки показателя сходимости $\sigma^A(\vec{r})$ (1.23) эквивалентна задаче об оценке точности томографического восстановления. В данной работе рассматривается только случай $\mu = \chi_{\mathcal{D}}$. Более общий случай $\mu = g\chi_{\mathcal{D}}$ рассмотрен в работе [19], где изложен метод разложения по гладкости, позволяющий результаты, полученные для $\mu = \chi_{\mathcal{D}}$, перенести на класс $\{\mu^\omega, I\}$. Из результатов работы [19] следует, что минимум показателя сходимости для класса $\{\mu^\omega, I\}$ достигается на функциях вида $\mu = \chi_{\mathcal{D}}$ (см. конец § 5).

Близкая к рассмотренной выше постановка задачи о сходимости, по-существу, содержится в книге [5]. Единственной известной нам работой (кроме работ автора, о которых речь пойдет ниже), где доказываются результаты о поточечной сходимости алгоритмов $A \in \{A\}$ при восстановлении разрывных функций, является работа [20], выполненная под руководством В. П. Паламодова. Краткое изложение этой работы опубликовано в [13], [21].

Чтобы сформулировать полученные в [20] результаты, введем некоторые определения, которые будут использоваться на протяжении всей работы. Выше были определены величины $\mu^A, \tilde{\mu}^A$ (1.10), (1.9). Величину

$$(1.26) \quad \Delta\mu_R^A(\vec{r}) = \tilde{\mu}^A(\vec{r}) - \mu(\vec{r})$$

будем называть *ошибкой регуляризации*. Введем величины

$$(1.27) \quad \begin{aligned} \mu_q^A(\vec{r}) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Psi^A(\varphi, \langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle) d\varphi, \\ \Delta\mu_q^A(\vec{r}) &= \mu_q^A(\vec{r}) - \tilde{\mu}^A(\vec{r}). \end{aligned}$$

Величину $\Delta\mu_q^A(\vec{r})$ называют *ошибкой дискретизации по q* , а величину

$$(1.28) \quad \Delta\mu_T^A(\vec{r}) = \mu^A(\vec{r}) - \tilde{\mu}^A(\vec{r})$$

– *(полной) ошибкой дискретизации*. Таким образом,

$$(1.29) \quad \begin{aligned} \Delta\mu^A(\vec{r}) &= \mu^A(\vec{r}) - \mu(\vec{r}) = \Delta\mu_T^A(\vec{r}) + \Delta\mu_R^A(\vec{r}), \\ \Delta\mu_T^A(\vec{r}) &= \Delta\mu_q^A(\vec{r}) + \Delta\tilde{\mu}_\varphi^A(\vec{r}) \end{aligned}$$

и последнее равенство можно считать определением величины $\Delta\tilde{\mu}_\varphi^A(\vec{r})$. Везде ниже $d = d(\vec{r}_0, \partial\mathcal{D})$ – расстояние от точки $\vec{r}_0$ до границы $\partial\mathcal{D}$.

ТЕОРЕМА 1.2 [13], [21]. Пусть выполнены условия:

- 1) $\mu = g\chi_{\mathcal{D}}$, $g \in C^\infty$ и граница $\partial\mathcal{D}$ – достаточно гладкая и строго выпуклая;
- 2) в алгоритме A (1.10) функция H^A получена линейной интерполяцией отсчетов $H^A(j\Delta q)$, т.е. рассматривается алгоритм с интерполяцией (1.17), в котором $\alpha = 1$, $V_{\Delta q} = V_{\Delta q}^1(q)$ (1.19);
- 3) $\sum_j H^A(j\Delta q) = 0$, $S_\Pi(\xi) = \delta(\xi)$.

Тогда при $d > \Delta q$ для величин $\Delta\mu_q^A(\vec{r}_0)$, $\Delta\mu_R^A(\vec{r}_0)$ справедливы оценки:

$$(1.30) \quad |\Delta\mu_q^A(\vec{r}_0)| \quad \text{и} \quad |\Delta\mu_R^A(\vec{r}_0)| \leq \begin{cases} C\Delta q d^{-1} + O(\Delta q) & (\vec{r}_0 \in \mathcal{D}), \\ C(\Delta q)^{1/2} d^{-1/2} + O(\Delta q d^{-1/4}) & (\vec{r}_0 \notin \mathcal{D}), \end{cases}$$

а для $\Delta\tilde{\mu}_\varphi^A(\vec{r}_0)$ при всех d

$$(1.31) \quad |\Delta\tilde{\mu}_\varphi^A(\vec{r}_0)| \leq \begin{cases} C\Delta q L^{-1}(\Delta q + d)^{-1/2} + O(\Delta q L^{-1}) & (\vec{r}_0 \in \mathcal{D}), \\ C(\Delta q)^{1/2} L^{-1} + O(\Delta q L^{-1}) & (\vec{r}_0 \notin \mathcal{D}). \end{cases}$$

Заметим, что условие $\sum_j H^A(j\Delta q) = 0$ эквивалентно (1.24) и рассматриваемый в теореме 1.2 алгоритм отвечает $p = 2$ в (1.15). Метод, которым получены оценки (1.30), (1.31), основан на прямом анализе соответствующих ошибок в q -пространстве и не использует перехода в область Фурье-образов.

В работе [22] был предложен подход к рассматриваемой задаче, основанный на использовании формулы Пуассона, позволяющий, по крайней мере на формальном уровне, получить асимптотически точные оценки ошибок восстановления. Основу этого подхода составляет *точная формула, дающая при $\mu = \chi_{\mathcal{D}}$ представление $\mu^A(\vec{r}_0)$ в виде двойного ряда трехкратных осциллирующих интегралов* (ОИ):

$$(1.32) \quad \mu^A(\vec{r}_0) = \frac{i\Omega}{2\pi} \sum_{n,m} J_{nm} e^{i2n\Omega\delta},$$

$$(1.33) \quad J_{nm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\xi \int_{\partial\mathcal{D}} ds e^{i\Omega\Phi_{nm}} u_n.$$

В ОИ J_{nm} фаза Φ_{nm} имеет вид

$$(1.34) \quad \begin{aligned} \Phi_{nm}(\varphi, \xi, s) &= -2Lm\varphi + \langle \xi \vec{l}(s) + 2n\vec{r}(s), \vec{\eta} \rangle, \\ \vec{l}(s) &= \vec{l}(\vec{r}_0, s) = \vec{r}(s) - \vec{r}_0 \quad (\vec{r}(s) \in \partial\mathcal{D}). \end{aligned}$$

Здесь и ниже s – *натуральный параметр*, длина дуги на контуре $\partial\mathcal{D}$ с положительной ориентацией. Если $\vec{r}(s)$ – *касательный вектор* к $\partial\mathcal{D}$ в точке $\vec{r}(s)$, то *амплитуда* u_n в ОИ J_{nm} определяется соотношениями

$$(1.35) \quad \begin{aligned} u_n(\varphi, \xi, s) &= v_n(\xi) [\vec{r}(s), \vec{\eta}], \\ v_n(\xi) &= \frac{S^A(\xi) S_n^\Pi(\xi + 2n)}{\xi + 2n}, \quad S_n^\Pi(\xi) = \frac{1}{2} [S_\Pi(\xi) + e^{i4n\Omega\delta} S_\Pi(-\xi)]. \end{aligned}$$

Разложение (1.32) согласуется с представлениями (1.28), (1.29) в том смысле, что

$$\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0) = \frac{i\Omega}{2\pi} \sum'_{n,m} J_{nm} e^{i2n\Omega\delta}, \quad \Delta\mu_q^A(\vec{r}_0) = \sum_{n \neq 0} J_{n0} e^{i2n\Omega\delta}.$$

Штрих в сумме $\sum'_{n,m}$ означает, что $(n, m) \neq (0, 0)$.

Возможность достаточно полного анализа ОИ J_{nm} (1.33) связана с тем, что критические точки фазы Φ_{nm} как функции двух переменных φ, ξ – невырождены при $d > 0$

(см. §4). Таким образом, все критические точки фазы Φ_{nt} имеют $\text{corank} \leq 1$ и принадлежат к классам A_k [23]. Это, в частности, позволяет дать *формальную оценку* ошибки дискретизации, получающуюся заменой ОИ J_{nt} первым членом его асимптотического разложения при $\Omega \rightarrow \infty$. Сравнение формальной оценки с результатами численного моделирования дает удивительно хорошее совпадение, и формальный ответ полностью описывает геометрию артефактов. *Артефактами* в томографии называется трансляционно-неинвариантная часть ошибки восстановления, медленно убывающая с ростом $d(\vec{r}_0, \partial \mathcal{D})$. Главный вклад в величину артефактов, по крайней мере при не слишком малых L (1.12), дает величина $\Delta \mu_q^A(\vec{r}_0)$ (1.27). Заметим, что по своему происхождению артефакты аналогичны “явлениям Гиббса”, возникающим при замене ряда Фурье разрывной функции его конечной суммой. Отсутствие трансляционной инвариантности связано с фиксацией сети прямых $\{\varphi_k, q_j\}_1$ (1.3), выделяющей начало координат – центр сканирования. Томограмма, представленная на рис. 1, получена с помощью ММТ, описанной выше (подробнее см. [12]).

Рис. 1

В качестве объекта выбрана функция $\mu(\vec{r}) = 0.2\chi_0(\vec{r}) + \chi_1(\vec{r})$, где χ_0 – характеристическая функция круга радиуса $50\Delta q$ с центром в начале координат, а χ_1 – характеристическая функция круга радиуса $5\Delta q$ с центром в точке $(-15\Delta q, 0)$. Томограмма на рис. 1 отвечает приборной функции $\Pi(q) = \Pi_1(q)$, $h = \Delta q$ (1.6) и функции S^A ,

определенной равенством (1.15) при $p = 2$ и $S_R = S_1$ (1.20). На рис. 1 представлен результат восстановления при $\Omega \simeq 300$, $L \simeq 0.5$ сеточной функции $\mu^A(\alpha\Delta q, \beta\Delta q)$ в квадрате со стороной $70\Delta q$ и центром в начале координат. Маленькое деление на стороне квадрата отвечает Δq . Геометрия артефактов на рис. 1 описывается критическими точками фаз Φ_{nm} и связана с педальной кривой [24], отвечающей линии разрыва функции χ_1 (см. § 4 и [12]).

Трудности обоснования формальной оценки связаны с необходимостью подстановки оценок индивидуальных интегралов J_{nm} в ряд (1.32). Для обоснования возможности такой подстановки необходимо указать константы в оценках или, другими словами, иметь для ОИ J_{nm} (1.33) *оценки с константами*. Первые строгие результаты в рамках этого подхода были получены в работе [19], где рассмотрен общий случай функций μ вида (1.1). В настоящее время развитие метода получения для ОИ оценок с константами [25] позволяет получить гораздо более полные, чем в работе [19], результаты. Этому и посвящена настоящая работа. Все необходимые результаты об оценках ОИ приведены в приложении. Доказательства большинства из них, но не всех, содержатся в [25].

В данной работе *формальный ответ будет обоснован только для достаточно гладких алгоритмов*. Точное определение этого понятия дано в § 2. В частности, оно означает, что функция S^A – достаточно гладкая, имеет нуль достаточно высокого порядка в точках $\xi = 2p$ ($p = 1, 2, \dots$) и достаточно быстро убывает с ростом $|\xi|$. Ограничение этим случаем связано не столько с существом метода, сколько со стремлением максимально упростить доказательства и формулировки. В соответствии с этим везде будут использоваться самые грубые оценки, позволяющие, тем не менее, получать асимптотически точные результаты. Полученные в § 5 результаты не только *асимптотически точны, но и не могут быть улучшены за счет выбора алгоритма из класса $\{A\}$, кроме случая, когда $S^A(\xi) = 0$ ($|\xi| > a_1$), $S_\Pi(\xi) = 0$ ($|\xi| > a_2$), $a_1 + a_2 < 2$* . Таким образом, ограничение классом достаточно гладких алгоритмов до некоторой степени оправдано тем, что для них получаются неулучшаемые на классе $\{A\}$ результаты. Результаты § 5 уточняют оценки (1.30), (1.31) и обобщают их на случай общих алгоритмов, невыпуклых контуров и $S_\Pi(\xi) \neq \delta(\xi)$. Тем не менее, необходимо еще раз подчеркнуть, что результаты § 5 доказаны только для достаточно гладких алгоритмов при условии $d \geq C\Omega^{-\beta_1}$ ($0 < \beta_1 \ll 1$), тогда как оценки (1.30), (1.31) из работы [21] верны и без предположения достаточной гладкости при $d \sim \Delta q$. В связи с этим отметим, что точное поведение ошибки восстановления $\Delta\mu^A(\vec{r}_0)$ вблизи границы $\partial\mathcal{D}$ (при $d \sim \Delta q$) представляет большой практический интерес [12]. Этот вопрос в данной работе не рассматривается. Можно показать, что вблизи границы ошибки дискретизации не важны $|\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0)| \leq C\Omega^{-\sigma}$, $\sigma > 0$, тогда как ошибка регуляризации $\Delta\mu_R^A(\vec{r}_0)$ – порядка единицы и описывается при $\mu = \chi_{\mathcal{D}}$ некоторой универсальной функцией. Пусть $\vec{r}_0 = \vec{r}(s) + \vec{\nu}x$ ($x \simeq \Delta q$) и $\vec{\nu}$ – внешняя нормаль к $\partial\mathcal{D}$ в точке $\vec{r}(s)$. Тогда

$$(1.36) \quad \Delta\mu_R^A(\vec{r}_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-1} R^A(\lambda) \widehat{\Pi}(\lambda) \sin \lambda x d\lambda + O\left(\frac{k(s)}{\Omega}\right),$$

где $k(s)$ – кривизна $\partial\mathcal{D}$ в точке $\vec{r}(s)$ и главный член в этой формуле не зависит от вида контура $\partial\mathcal{D}$. Выражение (1.36) хорошо описывает результаты численного эксперимента [12].

Список используемых обозначений приведен в конце приложения. Ссылки на формулы из приложения снабжаются буквой П.

§ 2. Формулировка результатов

На протяжении всей работы используется

Соглашение о константах. Все константы, значения которых не указаны, обозначаются буквой C , и одной буквой могут обозначаться различные константы. Всегда указывается, от каких величин зависят эти константы. Если эти величины не указаны, то константы – абсолютные. Если константы входят в условия справедливости некоторого утверждения или в само утверждение, то это означает, что существуют и могут быть явно указаны такие значения констант, что при выполнении соответствующих условий выполняется и утверждение.

Опишем область точек $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^2$, в которой доказывается сходимость томографических алгоритмов и оцениваются ошибки дискретизации. Всегда предполагается, что $\vec{r}_0 \in D$, $D = \{\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{r}_0| < 0.5\}$. Если $M \subset D$, то, по определению, $U(\beta, M) = \{\vec{r}_0 \in D \mid d(\vec{r}_0, M) \leq C\Omega^{-\beta}, \beta > 0\}$, и сходимость доказывается в области $D_{\beta_1} = D \setminus U(\beta_1, \partial\mathcal{D})$ ($\mu = \chi_{\mathcal{D}}$). Эту область представим в виде объединения трех областей

$$(2.1) \quad \begin{aligned} D_{\beta_1} &= \bigcup_{i=1}^3 D_{\beta_1\beta_2}^i, \\ D_{\beta_1\beta_2}^1 &= (D_{\beta_1} \cap T(\partial\mathcal{D})) \setminus U(\beta_2, T_0), \\ D_{\beta_1\beta_2}^2 &= D_{\beta_1} \cap U(\beta_2, T_0), \quad D_{\beta_1\beta_2}^3 = D_{\beta_1} \setminus (T(\partial\mathcal{D}) \cup U(\beta_2, T_0)). \end{aligned}$$

Здесь $T(\partial\mathcal{D})$ – объединение всех касательных к $\partial\mathcal{D}$, т.е. множество точек $\vec{r}_0$, из которых можно провести касательную к $\partial\mathcal{D}$, T_0 – объединение касательных $T(s_i^0)$, проведенных через точки уплощения s_i^0 , и $D_{\beta_1\beta_2}^2 \subset \bigcup_i U(\beta_2, T(s_i^0))$. Геометрия областей $D_{\beta_1\beta_2}^i$ показана на рис. 2.

Классы рассматриваемых приборных функций и алгоритмов, кратко описанные во введении, нуждаются в уточнении. Везде ниже функция одной переменной называется кусочно-гладкой, если она и все ее производные имеют только разрывы первого рода.

Относительно рассматриваемых приборных функций П (1.5) будем предполагать, что они принадлежат к классу $\{\Pi\}$. Это означает, что выполнены условия 1), 2):

1) Π – кусочно-гладкая функция, которая достаточно быстро убывает:

$$|\Pi(q)| \leq C(\Delta q)^{-1} \left(\frac{q}{\Delta q} \right)^{-m}, \quad m \gg 1;$$

2) выполнено условие однородности $\hat{\Pi}(\lambda) = S_{\Pi}(\xi)$ ($\xi = \lambda/\Omega$), функция S_{Π} не зависит от Ω , $S_{\Pi}(0) = 1$ и

$$(2.2) \quad |S_{\Pi}^{(k)}(\xi)| \leq C_k A_1, \quad |S_{\Pi}^{(k)}(\xi)| \leq C_k A_2 e^{-\tau_2 |\xi|} |\xi|^{-\varkappa_2}, \quad \tau_2 \geq 0, \quad \varkappa_2 > 0.$$

Рис. 2

Мотивировка следующего определения класса $\{A\}$ рассматриваемых алгоритмов содержится во введении. Будем говорить, что задан алгоритм $A \in \{A\}$, если задана четная, не зависящая от Ω функция S^A , представляемая в виде

$$(2.3) \quad S^A(\xi) = P_A(\xi)T_A(\xi) = \frac{1}{2\pi}|\xi|S_R^A(\xi),$$

где P_A , T_A , S_R^A – кусочно-гладкие функции, имеющие не более счетного числа точек нарушения гладкости $\xi = \xi_i$,

$$(2.4) \quad |\xi_i - \xi_j| \geq \Delta\xi \geq C \simeq 1,$$

и такие, что

$$(2.5) \quad |P_A^{(k)}(\xi)| \leq C_k A_3, \quad |T_A^{(k)}(\xi)| \leq C_k A_4, \\ \left| \left(\frac{T_A(\xi)}{\xi - 2p} \right)^{(k)} \right| \leq C_k A_5 \quad (p = 0, 1, 2, \dots), \quad |P_A^{(k)}(\xi)| \leq C_k A_6 e^{-\tau_1 |\xi|} |\xi|^{-\varkappa_1}, \\ |S_R^A(\xi)| = 1 + O(|\xi|) \quad (\xi \rightarrow 0), \quad S_R^A(2p) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots), \quad \tau_1 \geq 0, \quad \varkappa_1 > 0.$$

Константы $A_1, A_2, \dots, A_6$ нормированы таким образом, что $C_0 = 1$, и вектор $\vec{A} = (A_1, \dots, A_6)$ характеризует алгоритм и приборную функцию.

Рассмотрим параметры, от значений которых зависят оценки ошибки дискретизации. Оказывается, что их число конечно, и все они будут сейчас перечислены.

Выбор алгоритма и массива данных задает константы L, A_0 . Величина $L \geq L_0$ определена в (1.12) и $A_0 = A_0(\vec{A})$,

$$(2.6) \quad A_0 = \max_{i,j,k} \{A_i \cdot A_j \cdot A_k\}.$$

Класс $\{\partial\mathcal{D}^\omega\}$ рассматриваемых контуров $\partial\mathcal{D}$ ($\mu = \chi_{\mathcal{D}}$) в сущности был определен выше, $\partial\mathcal{D} \in \{\partial\mathcal{D}^\omega\}$ – аналитический контур. В этом случае определены константы $k, b, K_0, \tilde{k}$. Величины k, b – это константы в оценках производных от кривизны:

$$(2.7) \quad |k^{(p)}(s)| \leq \bar{k} b^p, \quad b \geq \bar{k}.$$

Так как контур $\partial\mathcal{D} \in \{\partial\mathcal{D}^\omega\}$ может иметь только конечное число точек уплощения s_i^0 конечного порядка p_i , то

$$(2.8) \quad \begin{aligned} k^{(n)}(s_i^0) &= 0, \quad (0 \leq n \leq p_i - 1), & |k^{(p_i)}(s_i^0)| &= K_i > 0, \\ K_0 &= \min_i \{K_i\}, & 1 &\leq p_i \leq p, \end{aligned}$$

и величина $\tilde{k}$ определяется из условия

$$(2.9) \quad |k(s)| \geq \tilde{k} \quad \text{при} \quad |s - s_i^0| \geq \Delta_i \equiv C_i \frac{K_i}{\bar{k} b^{p_i} + 1}.$$

Везде ниже $\vec{\nu}$ – внешняя нормаль к контуру $\partial\mathcal{D}$, который предполагается положительно ориентированным. В этом случае кривизна $k(s)$ может иметь оба знака, но вид уравнений Серре–Френе сохраняется [26]:

$$(2.10) \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}, \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau}.$$

Здесь и ниже $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ – касательный вектор к $\partial\mathcal{D}$ в точке $\vec{r}(s) \in \partial\mathcal{D}$.

Пусть $\vec{r}_m^0$ – точки пересечения прямых $T(s_i^0)$ ($|\vec{r}_m^0| \leq 0.5$). Через $\{\theta_m^0\}$ обозначим набор углов между этими прямыми, а через d_1 – минимальное расстояние между непересекающимися отрезками прямых $T(s_i^0)$, лежащими в круге D . Для оценки в области $D_{\beta_1\beta_2}^1 \cup D_{\beta_1\beta_2}^2$ достаточно задать еще длину $\mathcal{L}$ контура $\partial\mathcal{D}$ и

$$\theta = \min\{|\vec{r}_m^0 - \vec{r}_m^0|, \theta_m^0, d_1\}.$$

Для оценки в области $D_{\beta_1\beta_2}^3$, т.е. при $\vec{r}_0 \notin T(\partial\mathcal{D})$, необходимо задать дополнительные параметры. Чтобы их ввести, рассмотрим функцию

$$(2.11) \quad f(s) = \frac{d}{ds} \langle \vec{r}(s), \vec{\tau}(s) \rangle = 1 + k(s) \langle \vec{r}(s), \vec{\nu}(s) \rangle.$$

Если $\mathcal{D}$ – окружность с центром в начале координат, то $f \equiv 0$. В остальных случаях функция f имеет конечное число нулей конечного порядка

$$(2.12) \quad f(s_\alpha) = 0, \dots, f^{(q_\alpha-1)}(s_\alpha) = 0, \quad |f^{(q_\alpha)}(s_\alpha)| = f_\alpha > 0 \quad (1 \leq q_\alpha \leq q).$$

Определим величины γ_α из условия

$$(2.13) \quad \gamma_\alpha = \langle \vec{r}(s_\alpha), \vec{r}(s_\alpha) \rangle$$

и будем предполагать, что

$$(2.14) \quad |\gamma_\alpha - \gamma_{\alpha'}| \geq \Delta^0.$$

Величина Δ^0 является одним из трех новых параметров. Два других – $\tilde{f}$, f_0 – определяются из условий

$$(2.15) \quad |f(s)| \geq \tilde{f} \quad \text{при} \quad |s - s_\alpha| \geq C_\alpha f_\alpha (\bar{k} b^{q_\alpha+1})^{-1}, \\ f_\alpha \geq f_0.$$

Пронумеруем все введенные параметры:

$$(2.16) \quad (\bar{k}, \quad b, \quad \mathcal{L}, \quad A_0, \quad K_0, \quad \tilde{k}, \quad L, \quad f_0, \quad \tilde{f}, \quad \Delta^0, \quad \theta) \\ = (t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad t_4, \quad t_5, \quad t_6, \quad t_7, \quad t_8, \quad t_9, \quad t_{10}, \quad t_{11}).$$

Непосредственно в оценку ошибки дискретизации $\Delta \mu_T^A(\vec{r}_0)$ (1.28) входят только некоторые из указанных параметров. Остальные необходимы для формулировки условий, при которых эта оценка справедлива. По тому, как эти параметры входят в условия, они разбиваются на две группы – T_1, T_2 .

Скажем, что $t_i \in T_1$, если в условия входят только ограничения на t_i сверху, и тогда по определению будем считать, что $t_i \geq 1$, если $t_i \in T_1$. Аналогично, $t_i \in T_2$, $t_i \leq 1$, если в условия входят только ограничения на t_i снизу. В интересующем нас случае

$$(2.17) \quad T_1 = (t_1, t_2, t_3, t_4), \quad T_2 = (t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}).$$

Осталось еще ввести понятие достаточно гладкого алгоритма. Кроме введенных выше параметров $\vec{A}$ алгоритм характеризуется числом (см. (2.2), (2.5))

$$(2.18) \quad \varkappa = \min\{\varkappa_1, \varkappa_2 + 1\},$$

которое задает скорость убывания функции v_n (1.35) при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Рассмотрим характеристики гладкости функции v_n . Так как в ОИ (1.33) интегрирование ведется по положительной полуоси $\xi \geq 0$, то ниже по определению считается, что

$$(2.19) \quad v_n(\xi) = 0 \quad (\xi < 0).$$

Таким образом, точка $\xi = 0$ всегда входит в множество $\{\xi_i^n\}$ точек нарушения гладкости функции v_n . Также по определению считаем, что в это множество входят точки $\xi = 2p$ ($p = 1, 2, \dots$). Числа j_{in}^0 задают порядок нуля функции v_n в точке ξ_i^n :

$$(2.20) \quad \begin{aligned} v^{(p)}(\xi_i^n) &= 0 \quad (p \leq j_{in}^0 - 1), \\ v_n^{(j_{in}^0)}(\xi_i^n + 0) &\neq 0 \quad \text{или} \quad v_n^{(j_{in}^0)}(\xi_i^n - 0) \neq 0, \end{aligned}$$

а числа j_{in}^1 определяют гладкость функции v_n в этой точке:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} v_n^{(p)}(\xi_i^n + 0) &= v_n^{(p)}(\xi_i^n - 0) \quad (p \leq j_{in}^1 - 1), \\ \Delta_{\xi_i^n} v_n^{(j_{in}^1)} &\equiv v_n^{(j_{in}^1)}(\xi_i^n + 0) - v_n^{(j_{in}^1)}(\xi_i^n - 0) \neq 0. \end{aligned}$$

Будем говорить, что *некоторое утверждение (оценка) справедливо для достаточно гладкого алгоритма, если можно указать числа $\varkappa_0, j_0, j_1$ такие, что оно верно при условиях $\tau_1 = \tau_2 = 0$ и*

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \varkappa &\geq \varkappa_0, \quad j_{in}^1 \geq j_1 \quad (\xi_i^n \neq 0), \\ j_{in}^0 &\geq j_0 \quad (\xi_i^n = -2n, n = -1, -2, \dots), \quad v_0^{(n)}(+0) = 0 \quad (n = 1, \dots, j_0). \end{aligned}$$

Через $s_c^1 \equiv s_c^1(\vec{r}_0)$ обозначим *критические точки первого типа* фазы Φ_{nm} (см. § 4). Для определения этих точек достаточно из точки $\vec{r}_0$ провести касательные к $\partial\mathcal{D}$, и тогда $\vec{r}(s_c^1) \in \partial\mathcal{D}$ — точки касания.

Введем величины

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \xi_{nm}^\pm(s_c^1) &\equiv \xi_{nm}^\pm(s_c^1(\vec{r}_0), \vec{r}_0) = \mp \frac{2Lm}{l(s_c^1)} + 2n \frac{\langle \vec{r}(s_c^1), \vec{l}(s_c^1) \rangle}{l^2(s_c^1)} \varepsilon_1^c, \\ \vec{l}(s_c^1) &\equiv \vec{l}(\vec{r}_0, s_c^1) = \vec{r}_0 - \vec{r}(s_c^1) = \varepsilon_1^c \vec{r}(s_c^1) l(s_c^1), \quad \varepsilon_1^c = \pm 1. \end{aligned}$$

Для достаточно гладких алгоритмов ряды

$$(2.24) \quad \begin{aligned} G_i(A, \vec{r}_0) &= \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \sum_{\pm} \max_{s_c^1(\vec{r}_0)} \left\{ \frac{|S^A(\xi_{nm}^\pm(s_c^1)) S_n^\Pi(\xi_{nm}^\pm(s_c^1) + 2n)|}{|\xi_{nm}^\pm(s_c^1) + 2n|^{1+1/(p+2)}} \right\}, \\ G_0(A, \vec{r}_0) &= G_i(A, \vec{r}_0) \quad (p_i = 0) \end{aligned}$$

сходятся равномерно по $\vec{r}_0$ и допускают оценки

$$(2.25) \quad G_i(A, \vec{r}_0) \leq C A_0 L^{-\varkappa}, \quad G_0(A, \vec{r}_0) \leq C A_0 L^{-\varkappa}.$$

Рассмотрим окрестности $U(\beta_3, \vec{r}_m^0)$ точек $\vec{r}_m^0$ пересечения прямых $T(s_i^0)$ и трубчатые окрестности $U(\beta_2, T(s_i^0))$ прямых $T(s_i^0)$. Если $\theta > C\Omega^{-\alpha}$ и

$$\beta_2 \geq \alpha, \quad \beta_2 \geq \beta_3 + \alpha,$$

то окрестности $U(\beta_3, \vec{r}_m^0)$ между собой не пересекаются и окрестности $U(\beta_2, T(s_i^0))$ не пересекаются вне объединения кругов $U(\beta_3, \vec{r}_m^0)$. Таким образом, окрестности

$U(\beta_3, \vec{r}_m^0), U(\beta_2, T(s_i^0))$ образуют правильное, в смысле работы [25], покрытие множества $T_0 = \bigcup T(s_i^0)$. При $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^2 \setminus \bigcup U(\beta_5, \vec{r}_m^0)$ имеется единственная окрестность $U(\beta_2, T(s_i^0))$ такая, что $\vec{r}_0 \in U(\beta_2, T(s_i^0))$ и $\vec{r}_{0i}$ — проекция $\vec{r}_0$ на $T(s_i^0)$. Через $D' = C\Omega^{-\beta_3}$ будем обозначать радиус круга $U(\beta_3, \vec{r}_m^0)$. В оценках при $\vec{r}_0 \in U(\beta_2, T(s_i^0)), |\vec{r}_0 - \vec{r}_m^0| \geq D'$ через s_{0c}^1 обозначаются критические точки первого типа, $s_{0c}^1 = s_c^1(\vec{r}_{0i}) \neq s_i^0$. Если в точке $\vec{r}_m^0$ пересекаются прямые $T(s_i^0)$, то мы будем записывать это в виде $i \subset (m)$. В оценках при $|\vec{r}_0 - \vec{r}_m^0| \leq D' = C\Omega^{-\beta_3}$ через s_{0c}^1 обозначаются точки $s_c^1(\vec{r}_m^0) \neq s_i^0$ ($i \subset (m)$).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $A \in \{A\}$, $\mu = \chi_{\mathcal{D}} \in \{\mu^\omega, I\}$ ($\partial\mathcal{D} \in \{\partial\mathcal{D}^\omega\}$). Тогда можно указать числа $\alpha > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\beta_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$), $\varkappa_0, j_0, j_1$ такие, что при

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \alpha_i &\leq \alpha, & \varepsilon &\leq \varepsilon_0, \\ t_i &\leq C_i \Omega^{\alpha_i} \quad (t_i \in T_1), & t_i &\geq C_i \Omega^{-\alpha_i} \quad (t_i \in T_2) \end{aligned}$$

для любого достаточно гладкого алгоритма, т.е. при выполнении условий (2.22), справедливы следующие оценки ошибки восстановления:

1) при $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^1$ имеет место оценка

$$(2.27) \quad |\Delta\mu^A(\vec{r}_0)| \leq CG_0(A, \vec{r}_0) \sum_{s_c^1(\vec{r}_0)} |\Omega k(s_c^1)|^{-1/2} l(s_c^1)^{-1} + R,$$

$$(2.28) \quad R \leq \gamma \frac{C_1(\varepsilon_0, \varkappa_0, j_0, j_1)}{\Omega^{0.5+\varepsilon}} + C_2(\varepsilon_0, \varkappa_0, j_0, j_1) A_0 \mathcal{L} \Omega e^{-\gamma\Omega} \quad (\forall \gamma \geq 1);$$

2) если $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^2$, $\vec{r}_0 \in U(\beta_2, T(s_j^0))$ и $|\vec{r}_0 - \vec{r}_m^0| \geq D' = C\Omega^{-\beta_3}$, то

$$(2.29) \quad \begin{aligned} |\Delta\mu^A(\vec{r}_0)| &\leq CG_0(A, \vec{r}_{0j}) \sum_{s_{0c}^1} |\Omega k(s_{0c}^1)|^{-1/2} l(\vec{r}_{0j}, s_{0c}^1)^{-1} \\ &+ C_j G_j(A, \vec{r}_{0j}) |\Omega K_j|^{-1/(p_j+2)} l(\vec{r}_{0j}, s_j^0)^{-1} + C_j (\Omega K_j)^{-\frac{1}{p_j+2}-\varepsilon} + R, \end{aligned}$$

а при $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^2$ и $|\vec{r}_0 - \vec{r}_m^0| \leq D'$ ($\vec{r}_m^0 \in T(s_i^0), i \subset (m)$)

$$(2.30) \quad \begin{aligned} |\Delta\mu^A(\vec{r}_0)| &\leq CG_0(A, \vec{r}_m^0) \sum_{s_{0c}^1} |\Omega k(s_{0c}^1)|^{-1/2} l(\vec{r}_m^0, s_{0c}^1)^{-1} \\ &+ \sum_{i \subset (m)} C_i G_i(A, \vec{r}_m^0) |\Omega K_i|^{-\frac{1}{p_i+2}} l(\vec{r}_m^0, s_i^0) \\ &+ \sum_{i \subset (m)} C_i (\Omega K_i)^{-\frac{1}{p_i+2}-\varepsilon} + R, \end{aligned}$$

где запись $i \subset (m)$ означает, что прямые $T(s_i^0)$ пересекаются в точке $\vec{r}_m^0$, и для R справедлива та же оценка (2.28);

3) если $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^3$ и контур $\partial\mathcal{D}$ не является окружностью с центром в начале координат, то $\forall \gamma \geq 1$ выполняется оценка

$$(2.31) \quad |\Delta\mu^A(\vec{r}_0)| \leq \gamma C_{qp}(\varepsilon_0, t_i) d_T^{-4} \Omega^{-3/2-1/(q+2)} + R_1,$$

$$(2.32) \quad R_1 \leq C_1(\varepsilon_0, \varkappa_0, j_0, j_1) \gamma \Omega^{-2} + C_2(\varepsilon_0, \varkappa_0, j_0, j_1) \mathcal{L} A_0 \Omega e^{-\gamma\Omega},$$

в которой можно считать, что

$$(2.33) \quad C_{qp}(\varepsilon_0, t_i) = C(\varepsilon_0) A_0(k)^{7/2} b^{q+1} \mathcal{L}^2 \tilde{K}_p^{-1/(q+2)} L^{-1} f_0^{-4/3}.$$

В этих формулах величина q определена в (2.12), p – в (2.8) и

$$(2.34) \quad d_T = \min\{d(\vec{r}_0, \partial\mathcal{D}), d(\vec{r}_0, T_0)\}, \quad \tilde{K}_p = \min\{C_p K_0^{p+1} (\bar{k})^{-p} b^{-p^2}, \tilde{k}\},$$

а если $\partial\mathcal{D}$ – окружность с центром в начале координат и радиусом B , то

$$(2.35) \quad |\Delta\mu^A(\vec{r}_0)| \leq \gamma \frac{C(\varepsilon_0) B A_0}{\Omega^{3/2} d_T^2 L} + R_1 \quad (\forall \gamma \geq 1).$$

В конце §5 кратко обсуждается вопрос о том, как изменятся оценки величины $\Delta\mu^A(\vec{r}_0)$, если ослабить предположения теоремы 2.1 и вопрос об их точности. Из теоремы 2.1, в частности, следует, что при $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$, $d(\vec{r}, \partial\mathcal{D}) > 0$

$$(2.36) \quad \sigma_\infty^A(\vec{r}) \geq \begin{cases} 1/2 & (\vec{r} \in T(\partial\mathcal{D}), \vec{r} \notin T_0), \\ 1/(p+2) & (\vec{r} \in \cap T(s_i^0) \quad (p = \max p_i)), \\ 3/2 + 1/(q+2) & (\vec{r} \notin T(\partial\mathcal{D})), \end{cases}$$

где $\sigma_\infty^A(\vec{r})$ – асимптотический показатель сходимости (1.21).

§3. Ошибки восстановления и ряды осциллирующих интегралов

Так как классическая формула обращения (1.8) неприменима для восстановления функций типа $\mu = \chi_{\mathcal{D}}$, начнем с вывода формулы обращения преобразования Радона на классе $\{\mu^\omega, I\}$.

ЛЕММА 3.1 (теорема о проекции; см. [5], [15]). Пусть $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$. Тогда

$$(3.1) \quad \hat{\mu}(\lambda\vec{\eta}) = \hat{J}(\varphi, \lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению преобразования Радона

$$\widehat{J}(\varphi, \lambda) = \int e^{i\lambda q} dq \int \mu(q\vec{\eta} + t\vec{\eta}^*) dt.$$

При $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$ этот интеграл сходится абсолютно и можно менять порядок интегрирования. Остается перейти от переменных t, q к переменным $(x, y) = q\vec{\eta} + t\vec{\eta}^*$, чтобы получить (3.1).

В силу теоремы о проекции вопрос об обращении преобразования Радона сводится к вопросу об обращении двумерного преобразования Фурье. При $\vec{r}_0 \in \cup \partial \mathcal{D}_i$ определим значение $\mu(\vec{r}_0)$ равенством

$$\mu(\vec{r}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\vec{r}_0 + \varepsilon \vec{\eta}) d\varphi$$

и введем величину

$$\mu_\Lambda(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\Lambda}^\Lambda |\lambda| e^{-i\lambda \langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle} \widehat{J}(\varphi, \lambda) d\lambda,$$

отвечающую суммированию интеграла Фурье по кругам [27], [28].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$. Тогда $\mu(\vec{r}) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mu_\Lambda(\vec{r})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1.32 из [28] достаточно доказать, что функция $h_{\vec{r}}$

$$h_{\vec{r}}(t) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \mu(\vec{r} + t\vec{\eta}) d\varphi$$

имеет ограниченную вариацию. При $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$ функция $h_{\vec{r}}$ имеет компактный носитель, кусочно-дифференцируема, имеет не более конечного числа разрывов первого рода. Точка $t_0 = t_0(\vec{r})$ является точкой нарушения гладкости функции $h_{\vec{r}}$, если окружность радиуса t_0 с центром в точке $\vec{r}$ касается хотя бы одной из кривых $\partial \mathcal{D}_i$. Если среди этих кривых есть окружность с центром в $\vec{r}$, то функция $h_{\vec{r}}$ может иметь разрыв первого рода. Если такой кривой нет, то точка нарушения гладкости отвечает касанию конечного порядка и производная $h_{\vec{r}}^{(1)} \in L^1$, что и завершает доказательство.

Заметим, что по ходу доказательства теоремы 2.1 будет дано еще одно доказательство формулы обращения для $\mu = \chi_{\mathcal{D}} \in \{\mu^\omega, I\}$ и, с формальной точки зрения, сама формула обращения нигде ниже не используется.

Теорема о проекции позволяет представить величину $\tilde{\mu}^A(\vec{r})$ (1.9) в виде

$$(3.2) \quad \tilde{\mu}^A(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \lambda R^A(\lambda) \frac{1}{2} (\widehat{\Pi}(\lambda) + \widehat{\Pi}(-\lambda)) \widehat{\mu}(\lambda \vec{\eta}) e^{i\lambda \langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle} d\lambda,$$

и, таким образом, величина $\tilde{\mu}^A(\vec{r})$ получается введением регуляризатора $\frac{1}{2} R^A(\lambda) \times (\widehat{\Pi}(\lambda) + \widehat{\Pi}(-\lambda))$ в формулу обращения преобразования Фурье.

Переходим к анализу ошибок восстановления. Во введении были определены: $\Delta\mu^A(\vec{r})$ – ошибка восстановления (полная) (1.22), $\Delta\mu_T^A(\vec{r})$ – ошибка дискретизации (полная) (1.28), $\Delta\mu_q^A(\vec{r})$ – ошибка дискретизации по q (1.27), и ошибка регуляризации $\Delta\mu_R^A(\vec{r})$ (1.26). Введем еще *ошибку дискретизации по φ* – $\Delta\mu_\varphi^A(\vec{r})$ и *перекрестный член* $\Delta\mu_L^A(\vec{r})$. Пусть величина $\mu_\varphi^A(\vec{r})$ определяется равенством

$$\mu_\varphi^A(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2N_\varphi-1} \tilde{\Psi}^A(\varphi_k, \langle \vec{r}, \vec{\eta}_k \rangle) \Delta\varphi.$$

Тогда

$$\Delta\mu_\varphi^A(\vec{r}) = \mu_\varphi^A(\vec{r}) - \tilde{\mu}^A(\vec{r}), \quad \Delta\mu_L^A(\vec{r}) = \widetilde{\Delta\mu_\varphi^A}(\vec{r}) - \Delta\mu_\varphi^A(\vec{r}),$$

где величина $\widetilde{\Delta\mu_\varphi^A}(\vec{r})$ определена в (1.29). Теперь полную ошибку дискретизации можно представить в виде

$$(3.3) \quad \Delta\mu_T^A(\vec{r}) = \Delta\mu_q^A(\vec{r}) + \Delta\mu_\varphi^A(\vec{r}) + \Delta\mu_L^A(\vec{r}).$$

Начиная с этого места, будем считать, что

$$\mu(\vec{r}) = \chi_{\mathcal{D}}(\vec{r}), \quad \mu \in \{\mu^\omega, I\}.$$

Покажем, что в этом случае ошибка дискретизации $\Delta\mu_T^A(\vec{r})$ может быть представлена в виде двойного ряда трехкратных ОИ (1.32), и это представление согласуется с разложением (3.3).

Прежде всего отметим, что из определения класса $\{A\}$ рассматриваемых алгоритмов и приборных функций (см. (2.2)–(2.5)) и функций u_n, v_n (1.35) следует оценка

$$(3.4) \quad |\partial_\varphi^{p_1} \partial_\xi^{p-p_1} u_n| \leq C_p A(n),$$

$$A(n) = \begin{cases} A_0 & (n=0), \\ A_0 e^{-|n|\tau} |n|^{-\varkappa} & (n \neq 0), \end{cases} \quad \begin{aligned} \varkappa &= \min\{\varkappa_1, \varkappa_2 + 1\}, \\ \tau &= \min\{\tau_1, \tau_2\}. \end{aligned}$$

Определим функцию E на $\mathbb{R}^2$ равенством

$$E(\vec{z}) = \frac{1}{2N_\varphi} \sum_{k=0}^{2N_\varphi-1} e^{i\langle \vec{z}, \vec{\eta}_k \rangle} \quad (\vec{z} \in \mathbb{R}^2, \vec{\eta}_k = (\cos \varphi_k, \sin \varphi_k))$$

и через $\vec{\nabla} E$ обозначим ее градиент

$$(3.5) \quad (\vec{\nabla} E)(\vec{z}) = \left(\frac{\partial E}{\partial z_x}, \frac{\partial E}{\partial z_y} \right) = \frac{i}{2N_\varphi} \sum_{k=0}^{2N_\varphi-1} \vec{\eta}_k e^{i\langle \vec{z}, \vec{\eta}_k \rangle}.$$

Основой дальнейших рассуждений служит

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mu = \chi_{\mathcal{D}} \in \{\mu^\omega, I\}$, $A \in \{A\}$. Тогда имеет место равенство

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \mu^A(\vec{r}_0) &= \Omega \sum_n e^{i2n\Omega\delta} \int_0^\infty v_n(\xi) d\xi \int_{\partial\mathcal{D}} ds [\vec{\tau}, \vec{\nabla} E(\vec{z})], \\ \vec{z} &= \Omega\xi\vec{l}(s) + 2n\Omega\vec{r}(s) \quad (\vec{l}(s) = \vec{r}(s) - \vec{r}_0, \vec{r}(s) \in \partial\mathcal{D}), \end{aligned}$$

где δ определено в (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению величины $\Psi^A(\varphi_k, a)$ (1.10)

$$\Psi^A(\varphi_k, a) = \sum_j f(j), \quad f(x) = H^A(a - \delta - x\Delta q) J^\Pi(\varphi_k, x\Delta q + \delta)\Delta q.$$

Функция $f \in L^1$ и имеет ограниченную вариацию на всей оси. При этих условиях справедлива формула Пуассона [29]:

$$\sum_j f(j) = \sum_n \int e^{i2\pi nx} f(x) dx$$

и, следовательно,

$$\Psi^A(\varphi_k, a) = \sum_n e^{i2n\Omega\delta} \int H^A(a - t) J^\Pi(\varphi_k, t) e^{-i2\pi nt} dt.$$

Используя теорему о проекции и теорему о свертке, получим, что для $\mu = g\chi_{\mathcal{D}} \in \{\mu^\omega, I\}$ имеет место равенство

$$(3.7) \quad \mu^A(\vec{r}_0) = \sum_n e^{i2n\Omega\delta} \int_0^\infty \hat{H}^A(\lambda) \frac{1}{2} (\hat{\Pi}(\lambda) + \hat{\Pi}(-\lambda)) \iint_{\mathcal{D}} g(\vec{r}) E(\vec{z}) dx dy.$$

По формуле Грина при $g \equiv 1$ ($\mu = \chi_{\mathcal{D}}$)

$$(3.8) \quad \hat{\mu}(\lambda\vec{\eta}) = \iint_{\mathcal{D}} e^{i\lambda\langle\vec{r}, \vec{\eta}\rangle} dx dy = \frac{i}{\lambda} \int_{\partial\mathcal{D}} e^{i\lambda\langle\vec{r}(s), \vec{\eta}\rangle} [\vec{\tau}, \vec{\eta}] ds,$$

и, следовательно,

$$\iint E(\vec{z}) dx dy = \frac{1}{\lambda + 2n\Omega} \int_{\partial\mathcal{D}} [\vec{\tau}, \vec{\nabla} E(\vec{z})] ds.$$

Остается воспользоваться условием однородности (1.13), чтобы из (3.7) получить нужный результат (3.6).

Лемма 3.2 позволяет в случае $\mu = \chi_{\mathcal{D}}$ дать точную формулу, представляющую $\mu^A(\vec{r}_0)$ (1.10) в виде ряда ОИ с Ω в качестве большого параметра.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mu = \chi_{\mathcal{D}} \in \{\mu^\omega, I\}$, $A \in \{A\}$ и, кроме того,

$$(3.9) \quad \xi^2 v_n \in L^1 \quad \left(\int_0^\infty \xi^2 |v_n(\xi)| d\xi < \infty \right).$$

Тогда имеет место представление (1.32) и при этом

$$(3.10) \quad \Delta \mu_T^A(\vec{r}_0) = \frac{i\Omega}{2\pi} \sum'_{n,m} e^{i2n\Omega\delta} J_{nm}, \quad \Delta \mu_q^A(\vec{r}_0) = \frac{i\Omega}{2\pi} \sum_{n \neq 0} J_{n0} e^{i2n\Omega\delta},$$

$$(3.11) \quad \Delta \mu_\varphi^A(\vec{r}_0) = \frac{i\Omega}{2\pi} \sum_{m \neq 0} J_{0m}, \quad \Delta \mu_L^A(\vec{r}_0) = \frac{i\Omega}{2\pi} \sum_{\substack{n \neq 0 \\ m \neq 0}} J_{nm} e^{i2n\Omega\delta},$$

$$(3.12) \quad \tilde{\mu}^A(\vec{r}_0) \equiv \mu_R^A(\vec{r}_0) = \frac{i\Omega}{2\pi} J_{00},$$

а δ ($0 \leq \delta < \Delta q$) определено в (1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой Пуассона на окружности

$$(3.13) \quad \sum_{k=0}^{2N_\varphi-1} f(\varphi_k) \Delta\varphi = \sum_m \int_0^{2\pi} e^{i2N_\varphi m \varphi} f(\varphi) d\varphi.$$

Для справедливости этой формулы достаточно сходимости ряда Фурье функции f в точках φ_k , т.е. ограниченности вариации этой функции в окрестностях точек φ_k . С помощью (3.13) запишем величину $\vec{\nabla} E(\vec{z})$ (3.5) в виде

$$(3.14) \quad \vec{\nabla} E(\vec{z}) = \frac{i}{2\pi} \sum_m \int_0^{2\pi} \vec{\eta} e^{-i2N_\varphi m \varphi + i\langle \vec{z}, \vec{\eta} \rangle} d\varphi.$$

Подставляя это выражение в (3.6), получим

$$(3.15) \quad \mu^A(\vec{r}_0) = \frac{i\Omega}{2\pi} \sum_n e^{i2n\Omega\delta} \int_0^\infty v_n(\xi) d\xi \sum_m \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\partial\mathcal{D}} ds e^{i\Omega\Phi_{nm}[\vec{\tau}, \vec{\eta}]},$$

Остается показать, что в правой части этого равенства можно изменить порядок суммирования по m и интегрирования по ξ . Обозначим через I_m интеграл по φ , s в правой части (3.15):

$$I_m = \int_{\partial\mathcal{D}} ds \int_0^{2\pi} e^{i2N_\varphi m \varphi} h(\varphi) d\varphi, \quad h(\varphi) = [\vec{\tau}, \vec{\eta}] e^{i\Omega\langle \xi \vec{l}(s) + 2n\vec{r}(s), \vec{\eta} \rangle}.$$

Интегрируя два раза по частям, получим $I_m = O(\xi^2 m^{-2})$, и тогда из условия (3.9) следует сходимость интеграла $\int_0^\infty |v_n(\xi)| I_m d\xi$. По принципу абсолютной сходимости этого достаточно для справедливости (1.32). Равенства (3.10), (3.11) доказываются точно так же. Подставляя в (3.2) выражение (3.8) для $\hat{\mu}(\lambda\vec{\eta})$, получим (3.12).

Теорема 3.2 фактически ниже не используется. Будем исходить непосредственно из леммы 3.2 и покажем, что ряд (3.10) для $\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0)$ можно заменить конечной суммой. Тем самым будет дано новое доказательство теоремы 3.2. В качестве первого шага перейдем от ряда $\vec{\nabla} E(\vec{z})$ (3.14) к конечной сумме

$$(3.16) \quad \vec{\nabla}_M E(\vec{z}) = \frac{i}{2\pi} \sum_{|m| < M} \int_0^{2\pi} e^{-i2N_\varphi m\varphi + i\langle \vec{z}, \vec{\eta} \rangle} d\varphi.$$

Для оценки величины $\vec{\nabla} E(\vec{z}) - \vec{\nabla}_M E(\vec{z})$ введем параметр

$$\beta = \frac{|\vec{z}|}{2N_\varphi M - 1} \quad (M \geq 1)$$

и функцию

$$(3.17) \quad f(\beta) = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} - \sqrt{1 - \beta^2},$$

определенную при $0 < \beta < 1$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $M \geq 1$ и выполняются условия

$$(3.18) \quad 0 < \beta \equiv \frac{|\vec{z}|}{2N_\varphi M - 1} < 1, \quad 2N_\varphi f(\beta) \geq 1.$$

Тогда

$$(3.19) \quad |\vec{\nabla} E(\vec{z}) - \vec{\nabla}_M E(\vec{z})| \leq \frac{CN_\varphi(M+2)e^{-(2N_\varphi M-1)f(\beta)}}{(1-\beta^2)^{1/4}\sqrt{2N_\varphi M-1}},$$

и в качестве константы C можно взять $8\pi^{-1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся интегральным представлением для функций Бесселя [30]

$$J_{2N_\varphi m}(|\vec{z}|) = (-1)^{N_\varphi m} e^{i2N_\varphi m\theta} \int_0^{2\pi} e^{-i2N_\varphi m\varphi + i\langle \vec{z}, \vec{\eta} \rangle} d\varphi \quad (\vec{z} = |\vec{z}|(\cos \theta, \sin \theta)).$$

Пусть $\vec{\nabla} E(\vec{z}) - \vec{\nabla}_M E(\vec{z}) = (\Delta_x^M E, \Delta_y^M E)$. Тогда

$$|\Delta_x^M E(\vec{z})| \leq \sum_{|m| \geq M} \left| \frac{\partial}{\partial z_x} (e^{i2N_\varphi m\theta} J_{2N_\varphi m}(|\vec{z}|)) \right|.$$

Так как $\left| \frac{\partial \theta}{\partial z_x} \right| \leq |\vec{z}|^{-1}$, $\left| \frac{\partial(|\vec{z}|)}{\partial z_x} \right| \leq 1$, то, используя соотношения

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad J_n^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)),$$

получим, что

$$(3.20) \quad |\Delta_x^M E(\vec{z})| \leq \sum_{|m| \geq M} \left(\frac{4N_\varphi |m|}{|\vec{z}|} J_{2N_\varphi m}(|\vec{z}|) + J_{2N_\varphi m-1}(|\vec{z}|) + J_{2N_\varphi m+1}(|\vec{z}|) \right).$$

Для оценки входящих в правую часть этого неравенства функций Бесселя воспользуемся *формулой Карлини* [30], согласно которой

$$(3.21) \quad |J_\nu(\nu x)| \leq G(\nu, x), \quad G(\nu, x) = \frac{e^{-\nu f(x)}}{(1-x^2)^{1/4} \sqrt{2\pi\nu}} \quad (0 < x < 1),$$

где f — функция, определенная в (3.17). Так как $f^{(1)}(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} < 0$, то при условии (3.18) из (3.20) и (3.21) следует, что

$$(3.22) \quad \begin{aligned} |\Delta_x^M E(\vec{z})| &\leq 8 \sum_{m \geq M} \frac{N_\varphi m}{|\vec{z}|} G\left(2N_\varphi m - 1, \frac{|\vec{z}|}{2N_\varphi m - 1}\right) \\ &\leq \frac{8N_\varphi}{|\vec{z}|} \frac{\exp(f(\beta))}{(1-\beta^2)^{1/4} \sqrt{2\pi(2N_\varphi M - 1)}} \sum_{m \geq M} m \exp(-2N_\varphi m f(\beta)). \end{aligned}$$

В силу условия (3.18) это ряд с монотонно убывающими членами и, следовательно,

$$\sum_{m \geq M} m e^{-2N_\varphi m f(\beta)} \leq (M+2) e^{-2N_\varphi M f(\beta)}.$$

Теперь из (3.22) получаем

$$|\nabla_x^M E(\vec{z})| \leq \frac{8N_\varphi (M+2) e^{-(2N_\varphi M - 1)f(\beta)}}{|\vec{z}| (1-\beta^2)^{1/4} \sqrt{2\pi(2N_\varphi M - 1)}}.$$

Эта же оценка справедлива и для $|\nabla_y^M E(\vec{z})|$. Отсюда сразу следует нужный результат (3.19).

При $\beta \leq \frac{1}{2}$ верно неравенство $f(\beta) \geq 0,45$, и, следовательно, если

$$(3.23) \quad N_\varphi \geq 2, \quad M \geq 1, \quad \frac{|\vec{z}|}{2N_\varphi M - 1} \leq 0.5,$$

то имеет место оценка

$$(3.24) \quad |\vec{\nabla} E(\vec{z}) - \vec{\nabla}_M E(\vec{z})| \leq C e^{-0.9N_\varphi M} \quad \left(C = \frac{24e^2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}3^{1/4}} \right),$$

которой мы и будем пользоваться ниже.

Ошибка регуляризации полностью исследована в работе [25], и простейшая нужная нам оценка этой величины приведена в приложении.

Рассмотрим ошибку дискретизации $\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0)$ (1.28), которая уже была представлена в виде ряда ОИ (3.10). Чтобы вместо этого ряда получить конечную сумму интегралов по конечной области, введем величину

$$(3.25) \quad \Delta\mu_{TF}^A(\vec{r}_0) = \frac{i\Omega}{2\pi} \sum_{n,m}^F \int_0^B d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\partial\mathcal{D}} ds e^{i\Omega\Phi_{nm}} u_n,$$

где по определению

$$\sum_{n,m}^F a_{nm} = \sum_{|n| \leq N_1} \sum_{\substack{|m| < M \\ (n,m) \neq (0,0)}} a_{nm}.$$

Оценим *ошибку обрезания* $\Delta_F\mu^A(\vec{r}_0)$, определяемую равенством

$$(3.26) \quad \Delta\mu_T^A(\vec{r}_0) = \Delta\mu_{TF}^A(\vec{r}_0) + \Delta_F\mu^A(\vec{r}_0).$$

ЛЕММА 3.4. Пусть $\mu = \chi_{\mathcal{D}} \in \{\mu^\omega, I\}$, $A \in \{A\}$ и выполняются условия

$$(3.27) \quad M \geq \frac{1}{2N_\varphi} + \frac{B + N_1}{L}, \quad N_\varphi \geq 2, \quad N_1 \geq B, \quad \varkappa_1 > 1, \quad \varkappa_2 > 0.$$

Тогда для ошибки обрезания $\Delta_F\mu^A(\vec{r}_0)$ в (3.26) справедлива оценка

$$(3.28) \quad |\Delta_F\mu^A(\vec{r}_0)| \leq \mathcal{L}\Omega \left[C_1 \frac{e^{-\tau_1 B}}{B^{\varkappa_1-1}} + C_2 \frac{e^{-\tau_2 N_1}}{N_1^{\varkappa_2}} + C_3 e^{-0.9N_\varphi M} + C_4 \frac{e^{-(\tau_1+\tau_2)B}}{B^{\varkappa_1+\varkappa_2-1}} \right].$$

Явный вид констант $C_k = C_k(\vec{A}, \varkappa_i, \tau_i)$ указан ниже и

$$(3.29) \quad C_k = C_k(\vec{A}, \varkappa_i, \tau_i) \leq CA_0 \left(\frac{1}{\varkappa_1 - 1} + \frac{1}{\varkappa_2} + \frac{1}{\varkappa_2(\varkappa_1 - 1)} \right),$$

где величина A_0 определена в (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве первого шага перейдем к конечному верхнему пределу интегрирования по ξ . Будем исходить из представления (3.6) и введем величины $\mu_B^A(\vec{r}_0)$, $\Delta\mu_B^A(\vec{r}_0)$:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \mu^A(\vec{r}_0) &= \mu_B^A(\vec{r}_0) + \Delta\mu_B^A(\vec{r}_0), \\ \mu_B^A(\vec{r}_0) &= \Omega \sum_n e^{i2n\Omega\delta} \int_0^B v_n(\xi) d\xi \int_{\partial\mathcal{D}} ds [\vec{\tau}, \vec{\nabla} E(\vec{z})]. \end{aligned}$$

Используя тривиальные оценки $|\nabla_x E(\vec{z})| \leq 1$, $|\nabla_y E(\vec{z})| \leq 1$, согласно определению алгоритма $A \in \{A\}$ (2.2)–(2.5) получим, что

$$\begin{aligned} |\Delta\mu_B^A(\vec{r}_0)| &\leq 2\Omega\mathcal{L} \int_B^\infty |P_A(\xi)| d\xi \cdot \max_{\xi \geq B} w(\xi), \\ w(\xi) &= \sum_n \frac{|T_A(\xi)| |S_n^\Pi(\xi + 2n)|}{|\xi + 2n|}. \end{aligned}$$

Функция w при $A \in \{A\}$ легко оценивается:

$$w(\xi) \leq 3A_2A_4(1 + \varkappa_2^{-1}) + A_1A_5,$$

и, следовательно,

$$(3.31) \quad |\Delta\mu_B^A(\vec{r}_0)| \leq C_1 \mathcal{L} \Omega \frac{e^{-\tau_1 B}}{B^{\varkappa_1-1}}, \quad C_1 = \frac{2A_0}{\varkappa_1-1} \left[\frac{3A_2A_4}{1+\varkappa_2^{-1}} + A_1A_5 \right].$$

Второй шаг состоит в переходе к конечной сумме по n в $\mu_B^A(\vec{r}_0)$ (3.30):

$$(3.32) \quad \mu_B^A(\vec{r}_0) = \mu_{BN_1}^A(\vec{r}_0) + \Delta\mu_{BN_1}^A(\vec{r}_0),$$

где по определению

$$(3.33) \quad \mu_{BN_1}^A(\vec{r}_0) = \Omega \sum_{|n| \leq N_1} e^{i2n\Omega\delta} \int_0^B v_n(\xi) d\xi \int_{\partial\mathcal{D}} ds [\vec{\tau}, \vec{\nabla} E(\vec{z})],$$

и, так как $|\xi + 2n| \geq |n|$ при $N \geq B_1$, то

$$\begin{aligned} |\Delta\mu_{BN_1}^A(\vec{r}_0)| &\leq 2\Omega\mathcal{L} \sum_{|n| \geq N_1+1} \int_0^B \frac{|S^A(\xi)| |S_n^\Pi(\xi + 2n)|}{|\xi + 2n|} d\xi \\ &\leq 2\Omega\mathcal{L} A_2 e^{-\tau_2(N_1+1)} \|S^A\|_{L^1} \varkappa_2^{-1} N_1^{-\varkappa_2}. \end{aligned}$$

Остается заметить, что при $A \in \{A\}$

$$\|S^A\|_{L^1} \leq A_4 \int_0^\infty |P_A(\xi)| d\xi \leq A_4 \left(A_3 + \frac{A_6 e^{-\tau_1}}{\varkappa_1 - 1} \right),$$

чтобы получить

$$(3.34) \quad |\Delta\mu_{BN_1}^A(\vec{r}_0)| \leq C_2 \frac{\Omega\mathcal{L} e^{-\alpha_2 N_1}}{N_1^{\varkappa_2}}, \quad C_2 = \frac{2A_2 e^{-\tau_2}}{\varkappa_2} \left(A_3 + \frac{A_0 e^{-\tau_1}}{\varkappa_1 - 1} \right) A_4.$$

На третьем этапе переходим в $\Delta\mu_{BN_1}^A(\vec{r}_0)$ к конечной сумме по m :

$$(3.35) \quad \mu_{BN_1}^A(\vec{r}_0) = \mu_{BN_1 M}^A(\vec{r}_0) + \Delta\mu_{BN_1 M}^A(\vec{r}_0),$$

где по определению

$$(3.36) \quad \mu_{BN_1 M}^A(\vec{r}_0) = \Omega \sum_{|n| \leq N_1} e^{i2n\Omega\delta} \int_0^B v_n(\xi) d\xi \int [\vec{\tau}, \vec{\nabla}_M E(\vec{z})] ds$$

и величина $\vec{\nabla}_M E(\vec{z})$ определяется равенством (3.16) при $\vec{z} = \Omega(\xi\vec{l} + 2n\vec{r})$.

Оценим величину

$$(3.37) \quad \Delta\mu_{BN_1M}^A(\vec{r}_0) = \Omega \sum_{|n| \leq N_1} e^{i2n\Omega\delta} \int_0^B v_n(\xi) d\xi \int_{\partial\mathcal{D}} ds [\vec{\tau}, \vec{\nabla} E(\vec{z}) - \vec{\nabla}_M E(\vec{z})].$$

Так как $|\vec{l}| \leq 1$, $|\vec{r}| \leq 0.5$, то $|z| \leq \Omega(B + N_1)$, выполняется условие (3.23), и, используя (3.24), получим оценку

$$(3.38) \quad \begin{aligned} |\Delta\mu_{BN_1M}^A(\vec{r}_0)| &\leq C\Omega\mathcal{L}e^{-0.9N_\varphi M} \sum_{|n| \leq N_1} \int_0^B |v_n(\xi)| d\xi \leq C_3\Omega\mathcal{L}e^{-0.9N_\varphi M}, \\ C_3 &= C(A_3 + A_6e^{-\tau_2}(\varkappa_1 - 1)^{-1})(3A_2A_4(1 + \varkappa_2^{-1}) + A_1A_5), \end{aligned}$$

что и дает третий член в правой части (3.28). Наличие в ней четвертого члена связано с тем, что в выражении (3.22) для величины $\mu_R^A(\vec{r}_0)$ интегрирование по ξ ведется от 0 до ∞ , а в $\mu_{BN_1M}^A(\vec{r}_0)$ и в члене с $n = 0$, $m = 0$ интегрирование по ξ ведется от 0 до B . Величина

$$\Delta\mu_{0B}(\vec{r}_0) = \frac{i\Omega}{2\pi} \int_B^\infty d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\partial\mathcal{D}} ds e^{i\Omega\Phi_{00}u_0}$$

легко оценивается:

$$(3.39) \quad |\Delta\mu_{0B}^A(\vec{r}_0)| \leq \frac{C_4\mathcal{L}\Omega e^{-(\tau_1+\tau_2)B}}{B^{\varkappa_2+\varkappa_1-1}}, \quad C_4 = \frac{A_2A_5A_6}{\varkappa_1 + \varkappa_2 - 1},$$

и дает четвертый член в правой части (3.28). Подставляя в (3.36) выражение $\vec{\nabla}_M E(\vec{z})$ из (3.16) при $\vec{z} = \Omega(\xi\vec{l} + 2n\vec{r})$, получим

$$(3.40) \quad \mu_{BN_1M}^A = \mu_R^A(\vec{r}_0) - \Delta\mu_{0B}^A(\vec{r}_0) + \Delta\mu_{TF}^A(\vec{r}_0).$$

Это равенство вместе с (3.32), (3.35) после подстановки их в (3.30) приводит к равенству (3.26), в котором

$$(3.41) \quad \Delta_F\mu^A(\vec{r}_0) = \Delta\mu_B^A(\vec{r}_0) + \Delta\mu_{BN_1}^A(\vec{r}_0) + \Delta\mu_{BN_1M}^A(\vec{r}_0) - \Delta\mu_{0B}^A(\vec{r}_0).$$

Это вместе с полученными оценками величин в правой части и дает нужный результат (3.28).

Заметим, что оценка (3.28) равномерна по τ_1, τ_2 и в ней можно положить $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

Рассмотрим, как изменятся оценки ошибки обрезания $\Delta_F\mu^A(\vec{r}_0)$ при дополнительных предположениях об алгоритме A . Соответствующие утверждения сформулируем в виде дополнения в лемме 3.4. Это дополнение доказывается так же, как и сама лемма 3.4.

ДОПОЛНЕНИЕ к лемме 3.4. 1. Пусть функция S_{Π} имеет бесконечный носитель, а функция S^A – конечный, и пусть $S^A(\xi) = 0$ ($|\xi| \geq a_A$). Тогда в оценке (3.28) можно положить $B = a_A$, $C_1 = C_4 = 0$.

2. Пусть функция S^A имеет бесконечный носитель, а функция S_{Π} – конечный, и пусть $S_{\Pi}(\xi) = 0$ ($|\xi| \geq a_{\Pi}$). Тогда в оценке (3.28) можно положить $C_2 = C_4 = 0$ и в выражениях C_1, C_2 сделать замену $A_2 \rightarrow a_{\Pi}A_1$, $\varkappa_2 \rightarrow \infty$.

3. Пусть обе функции S^A, S_{Π} имеют конечный носитель и

$$(3.42) \quad S^A(\xi) = 0 \quad (|\xi| \geq a_A), \quad S_{\Pi}(\xi) = 0 \quad (|\xi| \geq a_{\Pi}).$$

Тогда можно положить $B = a_A$, а условие $N_1 \geq B$ в (3.27) заменить на $N_1 \geq 0.5(a_A + a_{\Pi})$. В оценке (3.28) можно положить $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, а в выражении для C_3 сделать замену $A_2 \rightarrow a_{\Pi}A_1$, $\varkappa_1(\varkappa_2) \rightarrow \infty$. Таким образом, в этом случае ошибка обрезания экспоненциально мала.

Если выполняются условия (3.42) и сумма $a_A + a_{\Pi}$ достаточно мала, то экспоненциально малы все ошибки дискретизации.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\mu = \chi_{\mathcal{D}} \in \{\mu^{\omega}, I\}$, $A \in \{A\}$, выполнены условия (3.42) и при этом

$$a_{\Pi} + a_A < 2, \quad (2N_{\varphi})^{-1} + a_A L^{-1} < 1.$$

Тогда имеет место оценка

$$(3.43) \quad |\Delta \mu_T^A(\vec{r}_0)| = |\Delta_F \mu^A(\vec{r}_0)| \leq C_3 \Omega \mathcal{L} e^{-0.9 N_{\varphi}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $a_{\Pi} + a_A < 2$ $u_n \equiv 0$ ($|n| \neq 0$) и условие (3.27) выполняется при $M = 1$. В этом случае $\Delta \mu_{TF}^A(\vec{r}) = 0$ и остается воспользоваться утверждением 3 из дополнения к лемме 3.4.

Заметим, что лемма 3.5 верна для любого $\mu \in \{\mu^{\omega}, I\}$. Эта лемма вместе с оценками ошибки регуляризации (см. приложение) показывает, что существуют сходящиеся алгоритмы высокого разрешения и на классе $\{\mu^{\omega}, I\}$ показатель сходимости может быть сколь угодно большим. К сожалению, на практике условия $a_{\Pi} + a_A < 2$ никогда не выполняются.

§ 4. Анализ критических точек

В §3 было показано, что оценка ошибки дискретизации сводится к исследованию трехкратных ОИ J_{nm} (1.33) с фазой

$$(4.1) \quad \Phi(z) \equiv \Phi(\varphi, \xi, s) = -2Lm\varphi + \langle \xi \vec{l}(s) + 2n\vec{r}(s), \vec{\eta} \rangle \\ (\vec{l}(s) = \vec{r}(s) - \vec{r}_0, \quad \vec{r}(s) \in \partial \mathcal{D}, \quad z = (z_1, z_2, z_3) \equiv (\varphi, \xi, s)).$$

В этом параграфе будет дан анализ критических точек $z_c = (\varphi_c, \xi_c, s_c)$ фазы Φ при $(n, m) \neq (0, 0)$. Везде ниже предполагается, что $d(\vec{r}_0, \partial \mathcal{D}) \geq d_0 > 0$. Целочисленные индексы n, m считаются фиксированными, и зависимости различных величин от $n, m, \vec{r}_0$ часто явно не указываются.

Покажем, что критические точки z_c при $m \neq 0$ или $\vec{r}_0 \neq 0$ изолированы, имеют $\text{corank} \leq 1$, и, следовательно, все особенности фазы Φ принадлежат к классам A_k [23].

Рассмотрим критические точки $\varphi_c(s)$, $\xi_c(s)$ фазы Φ как функции двух переменных φ , ξ , считая s параметром. Эти точки задаются выбором знака $\varepsilon_{\pm} = \pm 1$, $(\varphi_c(s), \xi_c(s)) = (\varphi_{\pm}(s), \xi_{\pm}(s))$ и определяются из соотношений

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \vec{\eta}_{\pm}(s) &= \varepsilon_{\pm} l_1^*(s), \quad \varphi_{-}(s) = \varphi_{+}(s) + \pi, \quad \langle \vec{l}, \vec{\eta}_{\pm} \rangle = 0, \\ \xi_{\pm}(s) &\equiv \xi_{nm}^{\pm}(s) = -\frac{2Lm + 2n[\vec{r}, \vec{\eta}_{\pm}]}{[\vec{l}, \vec{\eta}_{\pm}]} = -\varepsilon_{\pm} l^{-1} (2Lm + 2n[\vec{r}, \vec{\eta}_{\pm}]), \end{aligned}$$

где $\vec{l}_1^*$ – единичный вектор, перпендикулярный к $\vec{l} = l \cdot \vec{l}_1$ ($[\vec{l}_1, \vec{l}_1^*] = 1$, $l_1^* = l^{-1}(-l_y, l_x)$, $\langle \vec{l}, \vec{l}_1^* \rangle = 0$). Из (4.2) следует, что

$$(4.3) \quad \xi_{\pm}(s) + 2n = -\frac{2Lm + 2n[\vec{r}_0, \vec{\eta}_{\pm}]}{[\vec{l}, \vec{\eta}_{\pm}]}.$$

Матрица $\Phi_c'' = \Phi_{\pm}''$ вторых производных легко вычисляется:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Phi_{\pm}'' &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{ik} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial z_k}(\varphi_T, \xi_{\pm}) \quad (i, k = 1, 2), \\ a_{11} &= -2n\langle \vec{r}_0, \vec{\eta}_{\pm} \rangle, \quad a_{12} = -\varepsilon_{\pm} l, \quad \det \Phi_{\pm}'' = -l^2. \end{aligned}$$

Таким образом, критические точки $(\varphi_{\pm}, \xi_{\pm})$ при $d(\vec{r}_0, \partial \mathcal{D}) > 0$ невырождены, и остается рассмотреть критические точки фазы

$$S(s) \equiv S_{\pm}(s) = \Phi(\varphi_{\pm}(s), \xi_{\pm}(s), s).$$

Считая выбор знака $\varepsilon_{\pm}$ фиксированным, ниже мы его часто не указываем, $\varphi(s) \equiv \varphi_{\pm}(s)$, $\xi(s) \equiv \xi_{\pm}(s)$. Так как $\langle \vec{l}, \vec{\eta}_{\pm} \rangle = 0$, то $\langle \vec{r}, \vec{\eta}_{\pm} \rangle = \langle \vec{r}_0, \vec{\eta}_{\pm} \rangle$, и, следовательно, функция $S \equiv S_{\pm}$ задается соотношениями

$$(4.5) \quad \begin{aligned} S(s) &= -2Lm\varphi(s) + 2n\langle \vec{r}_0, \vec{\eta}(s) \rangle, \\ \langle \vec{l}(s), \vec{\eta}(s) \rangle &= 0 \quad (\vec{l}(s) \equiv \vec{l}(r_0, s) = \vec{r}(s) - \vec{r}_0). \end{aligned}$$

Везде ниже в этом параграфе предполагается, что

$$(4.6) \quad m \neq 0 \quad \text{либо} \quad \vec{r}_0 \neq 0.$$

Найдем критические точки s_c фазы S и покажем, что они изолированы и имеют конечную кратность. Дифференцируя равенство $\langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle = 0$, определяющее зависимость $\varphi(s)$, имеем

$$\varphi^{(1)}(s) = l^{-2}[\vec{l}, \vec{\tau}],$$

и, следовательно,

$$(4.7) \quad S^{(1)}(s) = -(2Lm + 2n[\vec{r}_0, \vec{\eta}(s)])\varphi^{(1)}(s) = (\xi(s) + 2n)\varepsilon_{\pm} \frac{[\vec{l}, \vec{\tau}]}{l}.$$

Таким образом, критические точки s_c могут быть одного из следующих трех типов:

$$(4.8) \quad \begin{array}{ll} 1\text{-й тип} & (s_c \equiv s_c^1) : \quad [\vec{l}(s_c^1), \vec{\tau}(s_c^1)] = 0, \quad \xi(s_c^1) + 2n \neq 0, \\ 2\text{-й тип} & (s_c \equiv s_c^2) : \quad [\vec{l}(s_c^2), \vec{\tau}(s_c^2)] \neq 0, \quad \xi(s_c^2) + 2n = 0, \\ 3\text{-й тип} & (s_c \equiv s_c^3) : \quad [\vec{l}(s_c^3), \vec{\tau}(s_c^3)] = 0, \quad \xi(s_c^3) + 2n = 0. \end{array}$$

Соответственно будем различать и три типа z_c^i критических точек фазы Φ : $z_c^i = (\varphi_c^i, \xi_c^i, s_c^i)$. Здесь и ниже используются обозначения $\varphi_c^i = \varphi_{\pm}(s_c^i)$, $\xi_c^i = \xi_{\pm}(s_c^i)$ ($i = 1, 2, 3$).

Рассмотрим критические точки первого типа. В этом случае

$$(4.9) \quad \vec{l}(s_c^1) = \varepsilon_1^c \vec{\tau}(s_c^1) l(s_c^1), \quad \varepsilon_1^c = \pm 1,$$

и для определения $s_c^1 \equiv s_c^1(\vec{r}_0)$ достаточно из точки $\vec{r}_0$ провести касательные к $\partial\mathcal{D}$, $\vec{\tau}(s_c^1)$ – точки касания. Знак ε_1^c при этом фиксируется автоматически и

$$(4.10) \quad \vec{\eta}(s_c^1) = \varepsilon_2^c \vec{\nu}(s_c^1), \quad \varepsilon_2^c = \pm 1.$$

Знак ε_2^c определяется выбором $\varepsilon_{\pm}$

$$\varepsilon_1^c \varepsilon_2^c \varepsilon_{\pm} = -1.$$

Таким образом, для критических точек первого типа $z_c^1 = (\varphi_c^1, \xi_c^1, s_c^1)$ величина s_c^1 определяется из (4.9), φ_c^1 – из (4.10) и

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \xi_c^1 &\equiv \xi_{nm}^{\pm}(s_c^1, \vec{r}_0) = \varepsilon_{\pm} l(s_c^1)^{-1} 2Lm - 2n \langle \vec{r}(s_c^1), \vec{l}(s_c^1) \rangle l(s_c^1)^{-2}, \\ \xi_c^1 + 2n &= \varepsilon_{\pm} l(s_c^1)^{-1} 2Lm - 2n \langle \vec{r}_0, \vec{l}(s_c^1) \rangle l(s_c^1)^{-2}. \end{aligned}$$

Точка z_c^1 задается выбором знака $\varepsilon_{\pm}$ (или ε_2^c) и точки касания $\vec{r}(s_c^1)$. Напомним, что через $T(\partial\mathcal{D})$ обозначается объединение касательных прямых к контуру $\partial\mathcal{D}$ и $\vec{r}_0 \in T(\partial\mathcal{D})$ – необходимое и достаточное условие существования критических точек первого типа. Пусть s_i^0 – точка уплощения, p_i – ее порядок (2.8) и $T_0 = \bigcup T(s_i^0)$ – объединение касательных $T(s_i^0)$, проведенных через точки уплощения s_i^0 . Граница ∂T множества $T(\partial\mathcal{D}) = \bigcup T(s)$ состоит из дуг, высекаемых из $\partial\mathcal{D}$ некоторыми прямыми $T(s_i^0)$, и отрезков этих прямых. На рис. 3 заштрихованы области, не принадлежащие $T(\partial\mathcal{D})$, и указаны критические точки $s_c^1 \equiv s_c^1(\vec{r}_0)$. Обратим внимание на очевидную аналогию рис. 3 и рис. 2.

Основные факты о критических точках s_c фазы S следуют из явного вида производных

$$(4.12) \quad \begin{aligned} S^{(p)}(s) &= F^{(1)} \varphi^{(1)} + \sum_{(\alpha)} F^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_{p-1})} (\varphi^{(1)})^{\alpha_1} \dots (\varphi^{(p-1)})^{\alpha_{p-1}}, \\ F(\varphi) &= -2Lm\varphi + 2n \langle \vec{r}_0, \vec{\eta} \rangle \quad \left(F^{(k)} = \left(\frac{d}{d\varphi} \right)^k F, \quad \varphi^{(k)} = \left(\frac{d}{ds} \right)^k \varphi \right), \\ (\alpha) &= (\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}), \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (p-1)\alpha_{p-1} = p, \end{aligned}$$

Рис. 3

с учетом того, что

$$(4.13) \quad \varphi^{(m)}(s) = \frac{k^{(m-2)}(s)[\vec{l}, \vec{v}]}{l^2} + k^{(m-3)}(s)B_{m-3}^m + \dots + k(s)B_0^m + [\vec{l}, \vec{\tau}]A_m,$$

где коэффициенты B_j^m зависят от производных $k^{(p)}$ при $p \leq m - j$ и величины A_m не зависят от k .

В частности, из этих формул следует, что при $\vec{r}_0 \in T(\partial\mathcal{D})$, $\vec{r}_0 \notin T_0$ все критические точки s_c^1 первого типа невырождены и

$$(4.14) \quad S^{(2)}(s_c^1) = -\varepsilon_{\pm} k(s_c^1)(\xi_c^1 + 2n).$$

Если $\vec{r}_0 \in T(s_i^0)$, то кроме невырожденных критических точек $s_c^1 \neq s_i^0$ имеется вырожденная точка $s_c^1 = s_i^0$, в которой

$$(4.15) \quad \begin{aligned} S^{(m)}(s_c^1) &= 0 \quad (m \leq p_i + 1, s_c^1 = s_i^0), \\ S^{(p_i+2)}(s_c^1) &= -\varepsilon_{\pm} k^{(p_i)}(s_i^0)(\xi_c^1 + 2n). \end{aligned}$$

Рассмотрим критические точки s_c^2 второго типа. Они определяются из условий

$$(4.16) \quad \langle \vec{r}_0, \vec{\eta}^* \rangle = \gamma, \quad \vec{l}_1(s_c^2) = -\varepsilon_{\pm} \vec{\eta}^*(s_c^2) \quad \left(\gamma \equiv \frac{Lm}{n} \right).$$

Так как $|\vec{r}_0| < 0.5$, то таких точек нет, если $|\gamma| > 0.5$. В носителе амплитуды u_n (1.35) их нет и при $n \geq 0$, так как $\xi \geq 0$ при $z \in \text{supp } u_n$ (2.19). Определим угол α из условия

$$\cos \alpha = \frac{|\gamma|}{|\vec{r}_0|} \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Точки s_c^2 находятся следующим образом. Проведем, как показано на рис. 4, через точку $\vec{r}_0$ две прямые под углами $\pm\alpha$ к прямой, соединяющей начало координат $\vec{O}$ и точку $\vec{r}_0$, и припишем им значения $\varepsilon_{\pm} \text{sgn } \gamma, \varepsilon'$. Четыре луча, выходящие из точки $\vec{r}_0$, нумеруются значениями $\varepsilon_{\pm} \text{sgn } \gamma, \varepsilon'$ ($\varepsilon' = \pm 1$). Точка s_c^2 , отвечающая заданным значениям $\varepsilon_{\pm} \text{sgn } \gamma, \varepsilon'$, существует, если соответствующий луч пересекает $\partial\mathcal{D}$ и $\vec{r}(s_c^2) \in \partial\mathcal{D}$ – точка пересечения.

Рис. 4

Если при $\varepsilon_{\pm} = \pm 1$ существуют (для заданного γ) критические точки s_c^2 второго типа, то мы говорим, что $\vec{r}_0 \in \mathcal{P}_{\gamma}(\partial\mathcal{D})$. Необходимым условием существования точек s_c^2 является

$$|\vec{r}_0| \geq |\gamma|, \quad |\gamma| < 0.5.$$

Геометрия области $\mathcal{P}_{\gamma}(\partial\mathcal{D})$ будет рассмотрена при анализе точек s_c^3 третьего типа, а сейчас рассмотрим условия вырождения точек s_c^3 . Через S_{γ} обозначим окружность $|\vec{r}_0| = |\gamma|$ с центром в начале координат $\vec{O}$ (см. рис. 4). Пусть $\vec{r}_0 \in S_{\gamma}$; будем говорить, что $\vec{r}_0 \in S_{\gamma}^0 \subset S_{\gamma}$, если прямая, соединяющая точки $\vec{r}_0$ и $\vec{O}$, пересекает $\partial\mathcal{D}$. Если $\vec{r}_0 \in \mathcal{D}$, то $S_{\gamma}^0 = S_{\gamma}$, а если $\vec{r}_0 \notin \mathcal{D}$, то S_{γ}^0 есть объединение двух дуг, высекаемых из S_{γ} внешними касательными к $\partial\mathcal{D}$, проведенными из начала координат. Если $\vec{r}_0 \notin S_{\gamma}^0$, то $\langle \vec{r}_0, \vec{\eta}(s_c^2) \rangle \neq 0$ ($\alpha \neq 0$) и критические точки s_c^2 невырождены. В этом случае

$$(4.17) \quad S^{(2)}(s_c^2) = 2nl^{-4}[\vec{l}, \vec{\tau}]^2[\vec{r}_0, \vec{\eta}](s_c^2).$$

Если $\vec{r}_0 \in S_{\gamma}^0$, то $\langle \vec{r}_0, \vec{\eta}(s_c^2) \rangle = 0$ ($\alpha = 0$) и критические точки s_c^2 вырождены ($S^{(2)}(s_c^2) = 0$), но $S^{(3)}(s_c^2) \neq 0$, точнее,

$$(4.18) \quad S^{(3)}(s_c^2) = -2nl^{-6}[\vec{l}, \vec{\tau}]^3 \varepsilon_3^c |\vec{r}_0| \quad (\varepsilon_3^c = \pm 1, \langle \vec{r}_0, \vec{\eta}^*(s_c^2) \rangle = \varepsilon_3^c |\vec{r}_0|).$$

Напомним, что в силу предположения (4.6) при $\vec{r}_0 = 0$ точек второго типа нет, так как при этом $m \neq 0$.

Остается рассмотреть критические точки s_c^3 третьего типа. Так как это одновременно точки первого и второго типов, то при $s = s_c^3$ должны одновременно выполняться условия (4.10) и (4.16), т.е.

$$(4.19) \quad \langle \vec{r}_0, \vec{\tau} \rangle = \gamma \varepsilon_2, \quad [\vec{l}, \vec{\tau}] = 0.$$

Это возможно, только если точка $\vec{r}_0$ лежит на кривой Γ_γ , определяемой уравнением

$$(4.20) \quad \vec{r}_\Gamma(s) = \vec{r}(s) - \vec{\tau} \langle \vec{r}, \vec{\tau} \rangle + \varepsilon_2 \gamma \vec{\tau} \quad (\vec{r}_\Gamma(s) \in \Gamma_\gamma).$$

При $\gamma = 0$ это уравнение *педальной кривой* [24], для которой вектор $\vec{r}_\Gamma(s)$ — это нормаль из начала координат на касательную прямую $T(s)$ в точке $\vec{r}(s) \in \partial \mathcal{D}$. Кривая $\Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma(\partial \mathcal{D}, \vec{O})$ зависит от взаимного расположения контура $\partial \mathcal{D}$ и начала координат. Способ ее построения ясен из определения вектора $\vec{r}_\Gamma(s) \in \Gamma_\gamma$ (4.20).

Рис. 5

На рис. 5 представлены кривые $\Gamma_0, \Gamma_\pm$ в случае, когда $\mathcal{D}$ — круг и $\vec{r}_0 \notin \mathcal{D}$. Кривая Γ_0 отвечает $\gamma = 0$, а кривые $\Gamma_\pm - \varepsilon_2 \gamma = \pm |\gamma|$. Эти кривые составляют границу $\partial \mathcal{P}_\gamma$ области $\mathcal{P}_\gamma(\partial \mathcal{D})$, где есть точки второго типа. На рис. 5 заштрихована область, где таких точек нет. Отметим, что кривые Γ_γ и S_γ не пересекаются, но могут касаться друг друга, например, в крайних точках дуг S_γ^0 . Обозначим через $T(\vec{O})$ объединение касательных к $\partial \mathcal{D}$, проведенных из начала координат $\vec{O}$. Тогда $T(\vec{O}) \cap S_\gamma \subset S_\gamma^0$.

и Γ_γ касается S_γ в точках $T(\vec{O}) \cap S_\gamma$. Если на контуре $\partial\mathcal{D}$ имеется точка уплощения s_i^0 , то $\vec{r}_\Gamma(s_i^0)$ – точка возврата кривой Γ_γ , лежащая на прямой $T(s_i^0)$. На двойной касательной к $\partial\mathcal{D}$ лежит точка самопересечения кривой Γ_γ . Таким образом, при прохождении дуги (s_1, s_2) между точками с общей касательной ($T(s_1) = T(s_2)$) в Γ_γ вклеивается граница луночки, как показано на рис. 6.

Рис. 6

Заметим, что если $\vec{r}_\Gamma(s) \notin \partial\mathcal{D}$, то касательная к Γ_γ в точке $\vec{r}_\Gamma(s)$ не совпадает с $\vec{r}(s)$, т.е. $T(s)$ трансверсально пересекает Γ_γ в точке $\vec{r}_\Gamma(s)$.

Пусть $\vec{r}_0 \in \Gamma_\gamma$ и, следовательно, имеются критические точки третьего типа. Они всегда вырождены, и каждая из них получается слиянием по крайней мере двух точек второго типа. Для заданного $\vec{r}_0 \in \Gamma_\gamma$ могут существовать несколько точек третьего типа различной кратности вырождения.

Прямое вычисление с помощью формул (4.22), (4.13) показывает, что все варианты исчерпываются следующими случаями.

1. Пусть $\vec{r}_0 \in \Gamma_\gamma$, $\vec{r}_0 \notin T_0$, $\vec{r}_0 \notin T(\vec{O}) \cap S_\gamma$. Тогда для всех точек s_c^3

$$(4.21) \quad S^{(m)}(s_c^3) = 0 \quad (m \leq 3), \quad S^{(4)}(s_c^3) = -\frac{3k^2}{l^2} 2n\varepsilon_2 \langle \vec{r}_0, \vec{\nu} \rangle (s_c^3).$$

2. Пусть $\vec{r}_0 \in \Gamma_\gamma$, $\vec{r}_0 \notin T_0$, $\vec{r}_0 \in T(\vec{O}) \cap S_\gamma$. Тогда для всех точек s_c^3

$$(4.22) \quad S^{(m)}(s_c^3) = 0 \quad (m \leq 5), \quad S^{(6)}(s_c^3) = 15k^3(s_c^3) 2n\varepsilon_3 |\vec{r}_0|.$$

3. Пусть $\vec{r}_0 \in \Gamma_\gamma \cap T(s_i^0)$, $\vec{r}_0 \notin T(\vec{O}) \cap S_\gamma$. Тогда существует точка $s_c^3 = s_i^0$ такая, что

$$(4.23) \quad \begin{aligned} S^{(m)}(s_i^0) &= 0 \quad (m \leq 2p_i + 3), \\ S^{(2p_i+4)}(s_i^0) &= -2n\varepsilon_2 \left(\frac{\langle \vec{r}_0, \vec{\nu} \rangle k^{(p_i)}}{l^2} \right) (s_i^0) \frac{(2p_i + 1)!}{2((p_i + 2)!)^2}. \end{aligned}$$

Кроме того, возможно, существуют точки s_c^3 , описанные в п. 1.

4. Пусть $\vec{r}_0 \in \Gamma_\gamma \cap T(s_i^0)$, $\vec{r}_0 \in T(\vec{O}) \cap S_\gamma$. Тогда существует точка $s_c^3 = s_i^0$ такая, что

$$(4.24) \quad \begin{aligned} S^{(m)}(s_i^0) &= 0 \quad (m \leq 3p_i + 5), \\ S^{(3p_i+6)}(s_i^0) &= \varepsilon_2 \varepsilon \pm \varepsilon_3 \frac{(2p_i + 6)! 2n}{6((2p_i + 2)!)^2} \frac{(k^{(p_i)}(s_i^0))^3}{l(s_i^0)^3}, \end{aligned}$$

и, возможно, существуют точки s_c^3 , описанные в п. 2.

Случай 4 реализуется, только если касательные к $\partial\mathcal{D}$, проведенные из начала координат, проходят через точки уплощения, т.е. $T_0 \cap T(\vec{O}) \neq \emptyset$.

Сформулируем полученные результаты в виде леммы.

ЛЕММА 4.1. Пусть $d(\vec{r}_0, \partial\mathcal{D}) > 0$, $(m, n) \neq (0, 0)$, $\partial\mathcal{D} \in \{\partial\mathcal{D}^\omega\}$, $\vec{r}_0 \neq 0$ или $m \neq 0$. Тогда

- 1) все критические точки z_c фазы Φ (4.1) имеют $\text{corank} \leq 1$, и все особенности фазы Φ принадлежат к классам A_k ;
- 2) критические точки могут быть вырождены тогда и только тогда, когда

$$\vec{r}_0 \in T_0 \cup \Gamma_\gamma \cup S_\gamma^0;$$

- 3) порядок особенности A_k определяется кратностью вырождения критических точек функции S , задаваемой соотношениями (4.5), и соответствующие k и $S^{(k+1)}(s_c)$ указаны выше и задаются соотношениями (4.14), (4.15), (4.17), (4.18), (4.21)–(4.24).

§ 5. Оценка ошибки дискретизации

5.1. Предварительные замечания. Исходным пунктом доказательства теоремы 2.1 служит соотношение (3.26), в котором величину $\Delta\mu_{TF}^A(\vec{r}_0)$ (3.25) можно представить в виде

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \Delta\mu_{TF}^A(\vec{r}_0) &= \frac{i\Omega}{2\pi} \sum_{n,m}^F J_{nm}^B e^{i2n\Omega\delta}, \\ J_{nm}^B &\equiv J_m^B[u_n] = \int_0^B d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\partial\mathcal{D}} ds e^{i\Omega\Phi_{nm}} = u_n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(5.2) \quad |\Delta\mu_{TF}^A(\vec{r}_0)| \leq \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{n,m}^F |J_{nm}^B[u_n]|,$$

и вопрос сводится к оценке ОИ $J_{nm}^B[u_n]$. Чтобы преодолеть технические трудности, связанные с негладкостью амплитуды u_n (1.35), и рассматривать вклады точек нарушения гладкости по отдельности, введем разбиение единицы

$$(5.3) \quad 1 = \tilde{\rho}(\xi) + \rho_0(\xi) + \sum_{\xi_i^n \neq (0, B)} \rho_i(\xi) + \rho_B(\xi), \quad \rho_0, \rho_i, \rho_B \in C_0^\infty,$$

с центрами в точках нарушения гладкости $0, \xi_i^n, B$ и масштабами a_0, a_i, a_B ,

$$(5.4) \quad \rho_t(\xi) = \begin{cases} 1 & (|\xi - \xi_t| \leq a_t), \\ 0 & (|\xi - \xi_t| \geq 2a_t), \end{cases} \quad |\rho_t^{(k)}(\xi)| \leq C_k a_t^{-k} \quad (t = 0, i, B).$$

Предполагается, что $\rho_t \in C_0^\infty$ и (см. (2.4))

$$(5.5) \quad \min\{a_0, a_i, a_B\} \geq a > 0, \quad 4a_0 < \Delta\xi, \quad 4a_i < \Delta\xi, \quad 4a_B < \Delta\xi.$$

В этом случае носители функций ρ_0, ρ_i, ρ_B не пересекаются, и равенство (5.3) служит определением функции $\tilde{\rho}$. Запишем интеграл $J_{nm}^B[u_n]$ в виде

$$(5.6) \quad J_{nm}^B[u_n] = J_{nm}[\tilde{\rho}u_n] + J_{nm}[\rho_0u_n] + \sum_{\xi_i^n \neq (0, B)} J_{nm}[\rho_iu_n] + J_{nm}[\rho_Bu_n].$$

Здесь и ниже верхний индекс B у интегралов $J_{nm}^B[\tilde{\rho}u_n], J_{nm}^B[\rho_Bu_n]$ опускается. Интегралы в правой части (5.6) оцениваются по отдельности, и метод их оценки зависит от того, какая из двух областей — $D_{\beta_1\beta_2}^1 \cup D_{\beta_1\beta_2}^2$ (2.1) или $D_{\beta_1\beta_2}^3$ — рассматривается. Основное утверждение состоит в том, что *результатов, приведенных в приложении, достаточно для доказательства теоремы 2.1*. Использование этих результатов требует рутинных, но достаточно трудоемких вычислений, которые мы не приводим, хотя все необходимые оценки и условия их применимости будут выписаны. При этом наша цель состоит не в получении наилучших оценок, а в демонстрации возможности явно провести все эти оценки и выписать условия их применимости, что и позволяет убедиться в непротиворечивости этих условий.

При применении результатов из приложения мы без дополнительных оговорок будем использовать введенные там обозначения. *Ссылки на утверждения и формулы из приложения снабжены буквой Π^1 .*

Введем некоторые определения, которые будут использоваться ниже. Предположим, что удалось получить представление вида

$$(5.7) \quad \Delta\mu_T^A(\vec{r}_0) = \mu_0(\vec{r}_0) + \mu_1(\vec{r}_0) \quad \text{и} \quad |\mu_1(\vec{r}_0)| \leq \begin{cases} R & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^1 \cup D_{\beta_1\beta_2}^2), \\ R_1 & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^3), \end{cases}$$

в котором величины R, R_1 удовлетворяют оценкам (2.28), (2.31). *В этом случае будем говорить, что величина μ_1 допускает удовлетворительную оценку или что μ_1 не вносит основного вклада в оценку $\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0)$. Этот факт будет записываться в виде $\mu \in \{O\}$. Аналогично, если $J_{nm} = J_{nm}^0 + J_{nm}^1$ и при этом*

$$|J_{nm}^1| \leq \bar{J}_{nm}^1 \quad \text{и} \quad \Omega \sum_{n,m}^F \bar{J}_{nm}^1 \leq \begin{cases} C\gamma(\ln \Omega)\Omega^{-0.5-\varepsilon} & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^1 \cup D_{\beta_1\beta_2}^2), \\ C\gamma\Omega^{-2} & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^3), \end{cases}$$

то мы говорим, что оценка $|J_{nm}^1| \leq \bar{J}_{nm}^1$ удовлетворительна или что $J_{nm}^1 \in \{O\}$ и величина J_{nm}^1 не вносит основного вклада в оценку $\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0)$. Пусть для величины J_{nm}^1 получена оценка вида

$$(5.8) \quad |J_{nm}^1| \leq \bar{J}_{nm}^1 = C(\varkappa, j_0, j_1)|n|^k A(n)F,$$

¹Список обозначений приведен в конце приложения.

где значение $A(n)$ определено в (3.4) и $\varkappa > k + 1$. Тогда

$$\Omega \sum_{n,m}^F \bar{J}_{nm}^1 \leq C(\varkappa, j_0, j_1) A_0 \frac{\gamma N_1}{L} F$$

и оценка (5.8) удовлетворительна ($J_{nm}^1 \in \{O\}$), если

$$(5.9) \quad \Omega \frac{A_0 N_1}{L} F \leq \begin{cases} (\ln \Omega) \Omega^{-0.5-\varepsilon} & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^1 \cup D_{\beta_1 \beta_2}^2), \\ \Omega^{-2} & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^3). \end{cases}$$

Ниже используется именно этот *грубый критерий удовлетворительности* оценок.

В § 2 были определены величины $\beta_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$). Введем $\beta_4, \beta_5, \beta_6$ ($\beta_i > 0$) и положим $d \equiv d(r_0, \partial \mathcal{D}) \geq d_0$ и

$$(5.10) \quad \begin{aligned} d_0 &= C \Omega^{-\beta_1}, & D_0 &= C \Omega^{-\beta_2}, & D' &= C \Omega^{-\beta_3}, & N_1 &= C \Omega^{\beta_4}, \\ a &= C \Omega^{-\beta_5}, & a_0 &= C \Omega^{-\beta_6}, & \beta_i &> 0, & \beta_2 &> \beta_3, & \beta_5 &\geq \beta_6. \end{aligned}$$

Величины B, M в соответствии с (3.27) выбираются из условий

$$(5.11) \quad B = N_1, \quad 0.9M = \gamma N_1 L^{-1} \quad (\gamma \geq 1).$$

В этом случае из (3.28) следует (например, при $\varkappa_1 \geq 1.5, \varkappa_2 \geq 0.5$), что

$$(5.12) \quad |\Delta_F \mu^A(\vec{r}_0)| \leq C \mathcal{L} A_0 [N_1^{-(\varkappa-1)} + e^{-\gamma N_1 \Omega}],$$

и эта оценка удовлетворительна ($\Delta_F \mu^A(r_0) \in \{O\}$), если (см. (5.9))

$$(5.13) \quad (\varkappa - 1) \beta_4 \geq \begin{cases} C\alpha + 1.5 + \varepsilon & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^1 \cup D_{\beta_1 \beta_2}^2), \\ C\alpha + 3 & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^3). \end{cases}$$

Непосредственно из определения интеграла $J_{nm}[\rho_B u_n]$ следует, что при условиях

$$4a_B \leq B, \quad e^{2\tau_1 a_B} \leq C,$$

которые ниже предполагаются выполненными, имеет место оценка

$$(5.14) \quad |J_{nm}[\rho_B u_n]| \leq C \mathcal{L} A(n) e^{-\tau_1 N_1} N_1^{-\varkappa_1},$$

которая удовлетворительна при тех же условиях (5.13).

Таким образом, остается оценить интегралы $J_{nm}[\rho_t u_n]$ ($\rho_t = \tilde{\rho}, \rho_0, \rho_i$) и показать, что все условия справедливости полученных оценок совместны при $\beta_i > 0$ ($i = 1, \dots, 6$), $\alpha > 0, \varepsilon > 0$. Заметим, что требование $\beta_5 \geq \beta_6 > 0$ позволяет существенно упростить оценки вклада точек нарушения гладкости. Пункты 1, 2 из теоремы 2.1 являются прямым следствием более точных оценок, приведенных соответственно в пунктах 1, 2 следующей леммы.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\mu = \chi_{\mathcal{D}} \in \{\mu^\omega, I\}$, $A \in \{A\}$. Тогда можно указать числа $\alpha > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\beta_i > 0$ ($i = 1, \dots, 6$), $\varkappa_0, j_0, j_1$ такие, что при выполнении условий (2.26) для любого достаточно гладкого алгоритма A справедливы следующие утверждения.

1. При $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^1$ оценка величины $\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0)$ определяется вкладом критических точек $s_c^1(\vec{r}_0)$ первого типа, т.е.

$$(5.15) \quad |\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0)| \leq \sum_{\substack{|n|=0 \\ (n,m) \neq (0,0)}}^{N_1} \sum_{|m|=0}^{M-1} \sum_{s_c^1(\vec{r}_0)} \sum_{\pm} \frac{C|w_{nm}^\pm(s_c^1, \vec{r}_0)|}{|\Omega k(s_c^1)|^{1/2} |\xi_{nm}^\pm(s_c^1) + 2n|} + R$$

и для R выполняется оценка (2.28). Суммирование в этой формуле ведется по всем $s_c^1(\vec{r}_0)$, $\pm$, n , m таким, что

$$|\xi_{nm}^\pm(s_c^1) + 2n| \geq a, \quad \xi_{nm}^\pm(s_c^1) \geq 0,$$

а функции $w_{nm}^\pm$ задаются равенствами

$$w_{nm}^\pm(s, \vec{r}_0) = \pm \langle \vec{\tau}(s), \vec{l}(s) \rangle l(s)^{-2} v_n(\xi_{nm}^\pm(s)).$$

Величины $\xi_{nm}^\pm(s_c^1) \equiv \xi_{nm}^\pm(s_c^1(\vec{r}_0), \vec{r}_0)$ определены в (4.11).

2. При $\vec{r}_0 \in U(\beta_2, T(s_j^0))$, $|\vec{r}_0 - \vec{r}_m^0| \geq D'$ оценка определяется вкладом критических точек $s_c^1(\vec{r}_{0j}) \neq s_j^0$ и точки утолщения s_j^0 ($\vec{r}_m^0$ – точки пересечения прямых $T(s_i^0)$ (2.30)):

$$(5.16) \quad |\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0)| \leq \sum_{|n|=0}^{N_1} \sum_{|m|=0}^{M-1} \sum_{\pm} \left[\sum_{s_c^1(r_{0j})} \frac{C|w_{nm}^\pm(s_c^1(r_{0j}), \vec{r}_{0j})|}{|\Omega k(s_c^1(r_{0j}))|^{1/2} |\xi_{nm}^\pm(s_c^1(r_{0j}), r_{0j}) + 2n|^{1/2}} + \frac{CB_j[w_{nm}^\pm]}{(\Omega K_j |\xi_{nm}^\pm(s_j^0, r_{0j}) + 2n|^{1/(p_j+1)}} \right] + R.$$

В этой формуле величина $B_j[w_{nm}^\pm]$ удовлетворяет оценке

$$(5.17) \quad B_j[w_{nm}^\pm] \leq |w_{nm}^\pm(s_j^0, \vec{r}_{0j})| + C \overline{\partial_t w_{nm}^\pm} D_0 + C \overline{(w_{nm}^\pm)^{(1)}} \delta_j + C d_0^{-1} A(n) a^{j_0},$$

в которой $\delta_j \leq C\Omega^{-\eta_j}$, $\eta_j > 0$ и $\vec{r}_{0j}$ – проекция $\vec{r}_0$ на $T(s_j^0)$, $\overline{(w_{nm}^\pm)^{(1)}}$ – верхняя оценка производной $(w_{nm}^\pm)^{(1)}$ по s , ∂_t – оператор дифференцирования по параметрам $t = \vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, а определено в (5.5), (5.10) и для R верна оценка (2.28).

5.2. Доказательство леммы 5.1. На формальном уровне равенства

$$(5.18) \quad J_{nm}[u_n] = \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{\pm} I_1^\pm[w_{nm}^\pm] + \Delta J_{nm},$$

$$(5.19) \quad I_1^\pm[w_{nm}^\pm] = \int_{\partial\mathcal{D}} e^{i\Omega S_\pm(s)} w_{nm}^\pm(s) ds$$

сразу получаются, если в интеграле $J_{nm}[u_n]$ проинтегрировать по φ , ξ с помощью метода стационарной фазы [31], (П.15) (критические точки $\varphi_\pm$, $\xi_\pm$ в (П.33) – невырождены – (4.4)) и при этом ограничиться главным критическим вкладом (П.15). Пока будем понимать равенство (5.18) как определение величины ΔJ_{nm} , а ниже будет показано, что $\Delta J_{nm} \in \{O\}$.

5.2.1. Одномерный интеграл $I_1[u]$. Рассмотрим одномерный интеграл $I_1^\pm[w_{nm}^\pm]$ (5.19). Будем использовать обозначения (5.10), и, таким образом, $D_{\beta_1\beta_2}^1 = \{\vec{r}_0 \in D \cap T(\partial\mathcal{D}) \mid d(\vec{r}_0, \partial\mathcal{D}) \geq d_0, d(\vec{r}_0, T_0) \geq D_0\}$, $D_{\beta_1\beta_2}^2 = \{\vec{r}_0 \in D \mid d(\vec{r}_0, \partial\mathcal{D}) \geq d_0, d(r_0, T_0) \leq D_0\}$, а величины D_0, d_0 можно рассматривать как параметры. Условие достаточной гладкости позволяет упростить оценки и не рассматривать критические точки второго и третьего типов. Заметим, что вклад этих точек также может быть оценен на основе результатов, изложенных в приложении. Введем функции

$$\chi_{nm}^\pm(s) = 0 \quad (n \geq 0), \quad \chi_{nm}^\pm(s) = \begin{cases} 1, & |\xi_{nm}^\pm(s) + 2n| \leq a, \\ 0, & |\xi_{nm}^\pm(s) + 2n| > a, \end{cases}$$

и представим интеграл $I_1^\pm[w_{nm}^\pm]$ в виде

$$I_1^\pm[w_{nm}^\pm] = I_1^\pm[(1 - \chi_{nm}^\pm)w_{nm}^\pm] + I_1^\pm[\chi_{nm}^\pm w_{nm}^\pm].$$

Второй интеграл в правой части оценим тривиально:

$$(5.20) \quad |I_1^\pm[\chi_{nm}^\pm w_{nm}^\pm]| \leq CA(n)\mathcal{L}d_0^{-1}a^{j_0}.$$

Чтобы оценить интегралы $I_1^\pm[(1 - \chi_{nm}^\pm)w_{nm}^\pm]$, рассмотрим общий ОИ

$$(5.21) \quad I_1(u) = \int_{\partial\mathcal{D}} u e^{i\Omega S} ds \quad (S = S_\pm; \text{ см. (4.5)}).$$

Предполагая наличие множителя $(1 - \chi_{nm}^\pm)$ в амплитуде, ограничимся его оценкой в специальном случае, когда (см. (4.7), (5.5))

$$|S^{(1)}(s)| \geq |\Psi(s)|, \quad \Psi(s) = a[\vec{l}(s), \vec{\tau}(s)].$$

Критические точки первого типа совпадают с нулями функции Ψ .

Для оценки ОИ $I_1[u]$ используем леммы П.1, П.2. Как и везде ниже, приведем только окончательные результаты. Методика их получения продемонстрирована на ряде примеров в работе [25].

С помощью формул Серре–Френе (2.10) и (2.7) получим, что

$$(5.22) \quad |\varphi^{(n)}(s)| \leq C_n \frac{\bar{k}b^{n-2}}{d_0^n}, \quad |S^{(n)}(s)| \leq C_n \frac{N_1 \bar{k}b^{n-2}}{d_0^n}.$$

Для числа $\mathcal{N}_1$ критических точек s_c^1 справедлива оценка (см. (2.9)):

$$(5.23) \quad \mathcal{N}_1 \leq C \frac{\mathcal{L}}{\min\{\Delta_i\}} \leq C\mathcal{L}\bar{k}b^{p+1}K_0^{-1}.$$

Нужные оценки снизу для величин $k(s_c^1)$ получаются с помощью леммы П.3. Рассмотрим *трубчатые окрестности* T_{D_i} прямых $T(s_i^0)$ ($T_{D_i} = \{\vec{r}_0 \mid d_i \leq D_i\}$, $d_i = d(\vec{r}_0, T(s_i^0))$) и будем предполагать, что $D_i \geq D_0$. Пусть выполнены условия

$$(5.24) \quad D_i \leq C_i \left(\frac{d_0 K_i}{E_i} \right)^{p_i+2}, \quad \left(\frac{D_i}{d_0 K_i} \right)^{\frac{1}{p_i+1}} \leq C_i \Delta_i, \\ K_i^{\frac{1}{p_i+1}} D_i^{\frac{p_i+2}{p_i+1}} \leq C_i \tilde{k}, \quad E_i \equiv C_i \mathcal{L}^{p_i+3} (\bar{k})^2 b^{2p_i+3} \quad (C_i \equiv C(p_i)).$$

Тогда если $\vec{r}_0 \in T_{D_i} \ (\forall i)$, то с помощью леммы П.3 получим

$$(5.25) \quad |k(s_c^1)| \geq \min_i \left\{ C_i K_i^{\frac{1}{p_i+1}} D_i^{\frac{p_i}{p_i+1}} \right\} \geq k_D, \quad k_D = C K_0^{1/2} D_0.$$

Если $\vec{r}_0 \in T_{D_j}$, то для “близких” в смысле леммы П.3 к s_j^0 точек s_c^1

$$k(s_c^1) \asymp C_j K_j \left(\frac{d_j}{d(\vec{r}_0, \vec{r}(s_j^0))} \right)^{\frac{p_j}{p_j+2}},$$

а для всех остальных точек

$$(5.26) \quad k(s_c^1) \geq k_d \equiv \min_i \left\{ C K_i \left(\frac{d_0 K_i}{E_i} \right)^{p_i}, \tilde{k} \right\}.$$

Рассмотрим область $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^1$. Условия (5.24) при $D_i = D_0$ выполняются, если

$$(5.27) \quad \beta_2 \geq C_1(p)\alpha + C_2(p)\beta_1.$$

Экстремальные точки s_{ex} функции $\Psi = [\vec{l}, \vec{r}]$ ($\Psi^{(1)}(s_{\text{ex}}) = 0$) легко находятся: $s_{\text{ex}} = (s_i^0, s_{\text{ex}}^1)$ ($[\vec{l}, \vec{r}](s_{\text{ex}}^1) = 0$). Отсюда следует, что в (П.23) можно взять $\Psi_\Delta = C a D_0$. Используя формулы (4.12), (4.13), удастся показать, что в оценке (П.23) можно положить

$$(5.28) \quad \Delta_c = C \frac{k_D d_0^2}{\bar{k} b}, \quad \delta_c = \delta_0 = C \frac{k_D d_0^4 a}{\bar{k} b N_1} \quad \text{и} \quad \Phi_1 = C \frac{K_0^2 a^2 d_0^6 D_0^6}{(\bar{k})^3 b^2 N_1 \mathcal{L}}.$$

С помощью леммы П.1, (П.21), получаем, что

$$(5.29) \quad |I_1[u]| \leq \sum_{s_c^1} \frac{A_c[u]}{|\Omega S^{(2)}(s_c^1)|^{1/2}} + \frac{A[u, S]}{\Omega},$$

и все величины в правой части этой оценки явно выражены через введенные параметры. Теперь нужная оценка интеграла $I_1^\pm[(1 - \chi_{nm}^\pm)w_{nm}^\pm]$ получается из (5.29). Подставляя полученную оценку и (5.20) в (5.18), имеем

$$(5.30) \quad \begin{aligned} |J_{nm}[u_n]| &\leq \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{\pm} \sum_{s_c^1} \frac{A_c[w_{nm}^\pm(1 - \chi_{nm}^\pm)]}{|\Omega S_{\pm}^{(2)}(s_c^1)|^{1/2}} + \Delta_1 J_{nm} + \Delta J_{nm}, \\ |\Delta_1 J_{nm}| &\leq \frac{C N_1^2 (\bar{k})^3 b^{p+3} \mathcal{L}^2 A(n)}{\Omega^2 k_D^3 d_0^8 a^2 D_0^6} + \frac{C \mathcal{L} a^{j_0} A(n)}{\Omega d_0} \end{aligned}$$

и, следовательно, $\Delta_1 J_{nm} \in \{0\}$ при условиях

$$(5.31) \quad 8\beta_1 + 6\beta_2 + 3\beta_4 + 2\beta_5 + C(p)\alpha \leq \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad \beta_5 j_0 \geq \frac{1}{2} + \varepsilon + \beta_4 + \beta_1 + C\alpha.$$

В частности, отсюда следует, что $\beta_4 < \frac{1}{6}$, и из (5.13) получаем, что $\varkappa > 10$. Это условие – наиболее сильное ограничение на скорость убывания S^A .

Пусть теперь $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^2$, $|\vec{r}_0 - \vec{r}_m^0| \geq D'$. Тогда достаточно рассмотреть случай $d_j \equiv d(\vec{r}_0, T(s_j^0)) \leq D_0$. Даже если касательные $T(s_i^0)$, $T(s_j^0)$ пересекаются, вклады точек s_i^0 , s_j^0 можно рассматривать по отдельности. При $|\vec{r}_0 - \vec{r}_m^0| \leq D'$ происходит простое суммирование вкладов точек s_i^0 , отвечающих прямым $T(s_i^0)$, пересекающимся в точке $\vec{r}_m^0$ ($i \subset (m)$) (2.30)). Поэтому случай $|\vec{r}_0 - \vec{r}_m^0| \leq D'$ можно отдельно не рассматривать. Чтобы его рассмотреть, достаточно в полученных при $|\vec{r}_0 - \vec{r}_m^0| \geq D'$ оценках заменить $\vec{r}_{0j}$ на $\vec{r}_m^0$ и D_0 на D' . Пусть $\vec{r}_0 \in T_{D_j}$ и j фиксировано. Для оценки интеграла $I_1[u]$ (5.21) будем использовать лемму П.2, согласно которой все оценки производятся для точки $\vec{r}_{0j}$ – проекции $\vec{r}_0$ на $T(s_j^0)$. Множество критических точек $s_{0c} \equiv s_c^1(r_{0j})$ включает невырожденные критические точки s_{0c}^1 и вырожденную $-s_j^0$. Так как невырожденные точки s_{0c}^1 “далеки” от s_j^0 в смысле леммы П.3, то (см. (4.14), (4.15))

$$|S^{(2)}(s_{0c}^1)| \geq a|k(s_{0c}^1)|, \quad |S^{(p_j+2)}(s_j^0)| \geq aK_j$$

и для $k(s_{0c}^1)$ выполняется оценка (5.26). Величины $\delta_{0c} = (\delta_0, \delta_j)$, $\Delta_{0c} = (\Delta_0, \Delta_j)$, Ψ_Δ в оценке (П.28) можно выбрать следующим образом:

$$(5.32) \quad \begin{aligned} \delta_c = \delta_0 &= C \frac{k_d d_0^4 a}{\bar{k} b N_1}, \quad \delta_j = C \frac{d_0^{p_j+4} K_j a^{\frac{1}{p_j+1}}}{\bar{k} b^{p_j+1} N_1^{1/(p_j+1)}}, \\ \Delta_0 &= C \frac{k_d d_0^2}{\bar{k} b}, \quad \Delta_j = C \frac{K_j d_0^{p_j+1}}{\bar{k} b^{p_j+1}}, \quad \Psi_\Delta = C a D'. \end{aligned}$$

Это позволяет явно указать величину Φ_{01} (П.28) в оценке (П.27). Условие (П.25) выполняется, если

$$(5.33) \quad \beta_2 \geq C(p)\alpha + 2\beta_5 + 2\beta_4, \quad \beta_2 \geq \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + 2\alpha.$$

Используя оценку (П.26) при $u = (1 - \chi_{nm}^\pm)u_n$ и подставляя результат в (5.18), получим при $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^2$, $d_j \leq D_0$ (с учетом (5.20))

$$(5.34) \quad |J_{nm}[u_n]| \leq \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{\pm} \left[\sum_{s_c^1(\vec{r}_{0j})} \frac{A_{0c}[w_{nm}^\pm(1 - \chi_{nm}^\pm)]}{|\Omega S_\pm^{(2)}(s_{0c}^1, r_{0j})|^{1/2}} + \frac{A_j[w_{nm}^\pm(1 - \chi_{nm}^\pm)]}{|\Omega S_\pm^{(p_j+2)}(s_j^0)|^{1/(p_j+2)}} \right] + \Delta_1 J_{nm} + \Delta J_{nm}.$$

В этой формуле $A_j[u] \equiv A_{0c}[u]$ ($s_{0c} = s_j^0$), функционалы $A_{0c}[u]$ оценены в (П.27) и $\Delta_1 J_{nm} \in \{0\}$ при условиях

$$(5.35) \quad C(p)\beta_1 + 3\beta_4 + C(p)\alpha \leq \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad \beta_5 j_0 \geq \frac{1}{2} + \varepsilon + \beta_4 + C\alpha + \beta_1.$$

Таким образом, для доказательства леммы 5.1 достаточно получить удовлетворительную оценку величины ΔJ_{nm} в (5.18). Для этого рассмотрим по отдельности интегралы трех типов: $J_{nm}[\rho_t u_n]$ ($\rho_t = \tilde{\rho}, \rho_0, \rho_i$).

5.2.2. Интеграл $J_{nm}[\tilde{\rho}u_n]$. Везде ниже используется обозначение

$$(5.36) \quad J_{nm}^2[u_n] = \int_0^B d\xi \int_0^{2\pi} e^{i\Omega\Phi_{nm}u_n} d\varphi.$$

В этом интеграле s играет роль параметра и зависимости различных величин от s явно не указываются.

Рассмотрим двумерный интеграл $J_{nm}^2[\tilde{\rho}u_n]$, входящий в выражение

$$(5.37) \quad J_{nm}[\tilde{\rho}u_n] = \int_{\partial\mathcal{D}} ds J_{nm}^2[\tilde{\rho}u_n].$$

Так как

$$\begin{aligned} \Phi_{nm}(\varphi, \xi) &= f(\varphi) + \xi g(\varphi), \\ f(\varphi) &= -2Lm\varphi + 2n\langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle, \quad g(\varphi) = \langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle, \end{aligned}$$

то $J_{nm}^2[\tilde{\rho}u_n]$ – специальный двумерный интеграл, рассмотренный в приложении. Критические точки $(\varphi_c, \xi_c) = (\varphi_{\pm}, \xi_{\pm})$ фазы Φ_{nm} как функции от переменных φ, ξ проанализированы в §4, где показано, что $g^{(1)}(\varphi_c) = l, g^{(2)}(\varphi_c) = 0$. Таким образом, можно использовать теорему П.2, и в интересующем нас случае (см. (3.4))

$$(5.38) \quad \lambda = N_1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad g_1 = \tilde{g} = \bar{g} = l \geq d_0, \quad v_{|\alpha|} = A(n).$$

Условия (П.31), (П.32) имеют вид

$$N_1^5 d_0^{-6} \leq C \Omega^{1-\varepsilon_2}, \quad N_1^3 d_0^{-4} a^{-2} \leq C \Omega^{1-\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1,$$

и они выполняются, если

$$(5.39) \quad 5\beta_4 + 6\beta_1 \leq 1 - \varepsilon_2, \quad 3\beta_4 + 4\beta_1 + 2\beta_5 \leq 1 - \varepsilon_1.$$

В случае $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^1 \cup D_{\beta_1\beta_2}^2$ достаточно в (П.33) взять $Q = 0, T = 2$, чтобы получить

$$(5.40) \quad J_{nm}[\tilde{\rho}u_n] = \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{\pm} I_1^{\pm}[\tilde{\rho}u_n] + \Delta_2 J_{nm}$$

вместе с оценкой

$$(5.41) \quad |\Delta_2 J_{nm}| \leq \frac{C(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mathcal{L} A(n) N_1}{\Omega^2 a^2 d_0^3},$$

где величина $A(n)$ определена в (3.4).

5.2.3. Интеграл $J_{nm}[\rho_0 u_n]$. Начнем с рассмотрения двух специальных случаев, когда этот интеграл легко оценивается.

Пусть $n = 0, m \neq 0$; рассмотрим интеграл $J_{0m}^2[\rho_0 u_n]$ (5.36). При $n = 0$ $|\xi_{nm}^\pm| \geq 2L$ и, следовательно, если $L \geq 2a_0$, то для этого интеграла в носителе амплитуды $\rho_0 u_0$ нет критических точек. Используем оценку

$$|J_{0m}[\rho_0 u]| \leq \mathcal{L} \max_s |J_{0m}^2[\rho_0 u_0]|.$$

Интеграл $J_{0m}^2[\rho_0 u_0]$ оценивается с помощью (П.2), (П.4). При выполнении условий

$$(5.42) \quad \alpha + \beta_6 \leq 1 - \varepsilon', \quad 4\alpha \leq 1 - \varepsilon', \quad \beta_6 > \alpha$$

для всех $T, \varepsilon' > 0$ имеет место оценка

$$(5.43) \quad |J_{0m}[\rho_0 u_0]| \leq C_T(\varepsilon') A(n) \mathcal{L} \Omega^{-T}.$$

Рассмотрим теперь случай $L|m| \geq 4|n|, n \neq 0$. Интеграл $J_{nm}[\rho_0 u_n]$ запишем в виде

$$J_{nm}[\rho_0 u_n] = \int_0^\infty d\xi \int_{\partial \mathcal{D}} ds \rho_0(\xi) v_n(\xi) Y_{nm}^1, \\ Y_{nm}^1 = \int_0^{2\pi} e^{i\Omega \Phi_{nm}}[\vec{\tau}, \vec{\eta}] d\varphi.$$

Так как $|\partial_\varphi \Phi_{nm}| \geq CL|m|$ при $L|m| \geq 4|n|$, то интегрируя в Y_{nm}^1 по частям, с помощью (П.2), (П.4) и используя оценку

$$|J_{nm}[\rho_0 u_n]| \leq a_0 \mathcal{L} \max_{\xi, s} |Y_{nm}^1|,$$

получим, что при $L|m| \geq 4|n|$ и тех же условиях (5.42)

$$(5.44) \quad |J_{nm}[\rho_0 u_n]| \leq C_T(\varepsilon') A(n) \mathcal{L} \Omega^{-T} \quad \forall T, \varepsilon' > 0.$$

Обе оценки (5.43), (5.44) равномерны по $\vec{r}_0$ и не зависят от предположения, что $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^1 \cup D_{\beta_1 \beta_2}^2$.

Осталось рассмотреть случай $L|m| \leq C|n|, n \neq 0$. В этом случае используется представление

$$(5.45) \quad J_{nm}[\rho_0 u_n] = \int_{\partial \mathcal{D}} ds J_{nm}^2[\rho_0 u_n],$$

и для исследования интеграла $J_{nm}^2[\rho_0 u_n]$ (5.36) применяется теорема П.4, в которой

$$n_0 = 1, \quad \lambda = C|n|, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad g_1 = \tilde{g} = \bar{g} = l, \\ t_0 = C\Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} |n|^{5/2} l^{-3}, \quad v|_\alpha = A(n).$$

Условия теоремы П.4 будут выполнены, если к условиям (5.39) добавить требование

$$a_0 \geq C \Omega^{-\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{6}} d_0^{-3} \quad \left(\sigma = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{3} \text{ в (П.54)} \right),$$

которое выполняется, если

$$(5.46) \quad \beta_6 + 3\beta_1 < \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{6}.$$

При $J_2[u] \equiv J_{nm}^2[\rho_0 u_n]$ в (П.44) граничный член $(J_{nm}^2)_0^P$ оценивается с помощью (П.50). Выбирая в (П.44) $Q = 0$, $T = 2$ и подставляя результат в (5.45), имеем

$$(5.47) \quad J_{nm}[\rho_0 u_n] = \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{\pm} I_1^{\pm}[\rho_0 w_{nm}^{\pm}] - \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{(\pm) \subset (1)} I_1^{\pm}[\rho_0 w_{nm}^{\pm}] + \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{(\pm) \subset (1)} I_1^{\pm}[w_{nm}^{\pm,1}] + \Delta_3^1 J_{nm}.$$

В этой формуле запись $(\pm) \subset (1)$ означает, что $|\xi_{nm}^{\pm}| \leq Ct_0$. В обозначениях теоремы П.3 условиям $(\pm) \subset (1)$ отвечают критические точки (φ_{c1}, ξ_{c1}) и функция $w_{nm}^{\pm,1}$ в (5.47) определяется равенством

$$w_{nm}^{\pm,1}(s) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial_{\xi}^k u_n(\varphi_{\pm}, 0)}{k! l} (\xi_{nm}^{\pm}(s))^k [\mathcal{K}_{\pm} - i\pi],$$

где $N = N(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $\mathcal{K}_{\pm} \equiv \mathcal{K}_{c1}$ (П.45). Используя (П.76), получим, что

$$\begin{aligned} w_{nm}^{\pm,1}(s) &= w_{nm}^{\pm,2}(s) + w_{nm}^{\pm,3}(s), \\ w_{nm}^{\pm,2}(s) &= i\pi \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial_{\xi}^k u_n(\varphi_{\pm}, 0)}{k! l(s)} (\xi_{nm}^{\pm}(s))^k (1 + \operatorname{sgn} \xi_{nm}^{\pm}(s)), \\ w_{nm}^{\pm,3}(s) &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial_{\xi}^k u_n(\varphi_{\pm}, 0)}{k! l(s)} (\xi_{nm}^{\pm}(s))^k \Delta \mathcal{K}_{\pm} \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$I_1^{\pm}[\rho_0, w_{nm}^{\pm,1}] = I_1^{\pm}[\rho_0 w_{nm}^{\pm,2}] + I_1^{\pm}[\rho_0 w_{nm}^{\pm,3}].$$

Прямо из (П.50), (П.55) при $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ следует оценка последнего члена в (5.47):

$$(5.48) \quad |\Delta_3^1 J_{nm}| \leq C(\varepsilon_1 \varepsilon_2) \mathcal{L} A(n) \left[\frac{(\ln \Omega) |n|}{\Omega^2 a_0^6 d_0^3} + \frac{1}{a_0 |n|^{\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2}} \Omega^{\frac{3}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2}}} + \frac{|n|^5}{a_0^3 d_0^6 \Omega^{2 - \varepsilon_1}} \right].$$

Оценка второго и третьего членов в правой части (5.47) сводится к оценке интегралов $I_1^{\pm}[\rho_0 w_{nm}^{\pm}]$, $I_1^{\pm}[\rho_0 w_{nm}^{\pm, i}]$ ($i = 1, 2$), амплитуда в которых мала, так как $|\xi_{nm}^{\pm}(s)| \leq t_0$. Первый и второй из этих интегралов оценивается так же, как интеграл $I_1[u]$ в п. 5.2.1.

Рассмотрим оценку интеграла $I_{nm}^{\pm}[\rho_0 w_{nm}^{\pm,3}]$. В этом случае трудности связаны с тем, что хотя амплитуда мала, $|w_{nm}^{\pm,3}| \leq C(\ln \Omega)t_0$, но она может быстро осциллировать. Оценка этого интеграла основана на результатах, изложенных в п. 6 приложения. В интересующем нас случае (см. (П.51), (П.72)) $b_1 = -\xi_{nm}^{\pm}(s)$, $b_2 = -n(\vec{l}, \vec{r}) \times (l(s))^{-2}$, $y_0 = C(l(s))^{-1}|n|^{3/2}\Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}}$.

Разделим область интегрирования U в интеграле $I_1^{\pm}[\rho_0 w_{nm}^{\pm,3}]$ на две области $U = U_1 \cup U_2$, в которых соответственно $s \in U_1 \Leftrightarrow |b_2| \leq C\Omega^{-\varepsilon_1+2\varepsilon}|n|^5 d_0^{-6}$ и $s \in U_2 \Leftrightarrow C\Omega^{-\varepsilon_1+2\varepsilon}|n|^5 d_0^{-6} < |b_2|$. Тогда $I_1^{\pm}[\rho_0 w_{nm}^{\pm,3}] = I_{11} + I_{12}$. Интеграл I_{11} по области U_1 оценивается тривиально: $|I_{11}| \leq C\mathcal{L}t_0 A(n)|\Delta\mathcal{K}_{\pm}|$, и для $|\Delta\mathcal{K}_{\pm}|$ используется оценка (П.80). В области U_2 $\Omega|b_2|y_0^2 > C\Omega^{2\varepsilon}$, и для оценки интеграла I_{12} используется лемма П.5. При этом возникает ОИ $Y_{\pm}$ с фазой $F_{\pm}$ ($F_{\pm}(s) = S_{\pm}(s) + b_1^2/(4|b_2|)$), и критические точки этой фазы близки к s_c^1 . Область интегрирования U_2 снова разбиваем на две области: $U_2 = U_2^1 \cup U_2^2$, в которых, соответственно, $|s - s_c^1| < \delta$ и $|s - s_c^1| > \delta$ для всех s_c^1 . Интеграл $Y_{\pm}^1$ по области U_2^1 оценивается тривиально: $|Y_{\pm}^1| \leq CA(n)t_0\delta\mathcal{N}_1$, а интеграл $Y_{\pm}^2$ по области U_2^2 , где нет критических точек, оценивается с помощью интегрирования по частям. Выбирая подходящим образом величину δ , получим оценку $Y_{\pm}$, а следовательно, и оценку $I_1^{\pm}[\rho_0 w_{nm}^{\pm,3}]$. Собирая все оценки, имеем

$$(5.49) \quad J_{nm}[\rho_0 u_n] = \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{\pm} I_1^{\pm}[\rho_0 w_{nm}^{\pm}] + \Delta_3 J_{nm},$$

и при этом

$$(5.50) \quad |\Delta_3 J_{nm}| \leq |\Delta_3^1 J_{nm}| + |\Delta_3^2 J_{nm}|,$$

где величина $\Delta_3^1 J_{nm}$ оценена в (5.48) и

$$(5.51) \quad |\Delta_3^2 J_{nm}| \leq \frac{C}{\Omega} \begin{cases} \Delta I_1(k_D) & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^1), \\ \Delta I_1^1 & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^2). \end{cases}$$

В этой формуле

$$(5.52) \quad \Delta I_1(k_D) = C_N(\varepsilon)A(n) \left[\frac{\mathcal{L}|n|^8}{\Omega^{1-2\varepsilon_1}d_0^{10}} + \frac{\mathcal{L}^2(\vec{k})^3 b^2 \mathcal{N}_1}{k_D^4 d_0^9 D_0^2 \Omega^{1-\frac{7\varepsilon_1}{2}}} + \frac{|n|^{\frac{5}{2}} \mathcal{N}_1}{\Omega^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2}-\varepsilon} d_0^3} \right],$$

$$(5.53) \quad \Delta I_1^1 = \Delta I_1(k_d) + C_N(\varepsilon)A(n) \times \left[\frac{\mathcal{N}_1 |\vec{k}|^3 (p+1) b^2 (p+1)^2}{(K_0)^{3p+4} d_0^{(p+1)(p+8)+1} \Omega^{1-\varepsilon_1} (p+\frac{5}{2})} + \frac{\mathcal{N}_1 \mathcal{L}^2}{d_0^2 (D')^2 \Omega^{1-\frac{7\varepsilon_1}{2}}} \right].$$

Оценка (5.52) справедлива при условии

$$(5.54) \quad 8\beta_1 + 6\beta_2 + C\alpha < \frac{1}{2} - \frac{5\varepsilon_1}{2},$$

оценка (5.53) – при условиях

$$(5.55) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 < 1/4, \quad \beta_3 < \frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon_1}{2}, \quad \beta_2 > \beta_3 + \alpha, \\ C_1(p)\beta_1 + C_2(p)\alpha \leq \frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon_1}{2} + \varepsilon_1 p, \quad \beta_2 \geq C_2(p)\beta_1 + C_1(p)\alpha. \end{aligned}$$

Как уже указывалось, для оценки интегралов $I_1^\pm[\rho_0 w_{nm}^\pm]$, $I_1^\pm[\rho_0 w_{nm}^{\pm,2}]$ можно воспользоваться результатами, полученными в п. 5.2.1 при оценке интегралов вида $I_1[u]$. Учитывая, что нас интересует случай $(\pm) \subset (1)$, получим, что

$$|I_1^\pm[\rho_0 w_{nm}^{\pm,2}]| \leq \begin{cases} \Delta I_1(k_D), \\ \Delta I_1^1. \end{cases}$$

Теперь заметим, что $I_1^\pm[\rho_0 w_{nm}^\pm] = 0$, если $n = 0$ или $L|m| \geq 4|n|$. Выбирая в оценках (5.43), (5.44) величину T нужным образом, получим, что оценки (5.50), (5.48), (5.51) верны во всей области $(n, m) \neq (0, 0)$.

5.2.4. Интеграл $J_{nm}[\rho_i u_n]$. Снова используем представление

$$J_{nm}[\rho_i u_n] = \int_{\partial\mathcal{D}} ds J_{nm}^2[\rho_i u_n].$$

Фазу Φ_{nm} в интеграле $J_{nm}^2[\rho_i u_n]$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{nm}(\varphi, \xi) &= f_i(\varphi) + (\xi - \xi_i^n)g(\varphi), \\ f_i(\varphi) &= -2Lm\varphi + \langle \xi_i^n \vec{l} + 2n\vec{r}, \vec{\eta} \rangle, \quad g(\varphi) = \langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, $J_{nm}^2[\rho_i u_n] \in \{\tilde{J}_2\}$ и можно использовать следствие П.1 теоремы П.5. При этом $n_0 = j_1$, $n_1 = 1$, выполняется (5.38) и $t_0 = C\Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} N_1^{\frac{5}{2}} d_0^{-3}$. Выбирая в (П.65) $Q = 0$, $T = 3$, получим

$$(5.56) \quad J_{nm}^2[\rho_i u_n] = \sum_{\pm} (J_{nm}^2)_\pm^0 + \Delta J_{nm}^2[\rho_i u_n].$$

Первый член в правой части этой формулы – главный критический вклад точек $(\varphi_\pm, \xi_\pm)$ (П.15), и в соответствии с (П.65)

$$\begin{aligned} \Delta J_{nm}^2[\rho_i u_n] &= (J_{nm}^2)_0^P + \Delta_{03}(J_{nm}^2[\rho_i u_n]) + \Delta^1(J_{nm}^2[\rho_i u_n]) \\ &\quad + i\Omega^{-1} \sum_{(\pm) \subset (1)} e^{i\Omega f_i(\varphi_\pm)} \mathcal{K}_\pm T_\pm^0. \end{aligned}$$

Три первых члена в правой части этого выражения оценены соответственно в (П.50), (П.36), (П.66), а величина $T_\pm^0$ определена в (П.64), и из этого равенства сразу следует оценка $T_\pm^0$, так как $|b_1| \leq t_0$. Из (П.52) получаем, что $|\mathcal{K}_\pm| \leq C \ln \Omega$. Выбираем

согласно (П.54) $\sigma = \frac{1}{3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ ($p = \frac{1}{6}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$). Тогда условия следствия П.1 выполняются, если, кроме (5.39), выполнено неравенство

$$(5.57) \quad 3\beta_1 + \beta_5 \leq \frac{1}{6}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (a > C\Omega^{-\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{6}} d_0^{-3}).$$

Подставляя (5.56) в исходное представление для $J_{nm}[\rho_i u_n]$, получим

$$(5.58) \quad \sum_{\xi_c^n} J_{nm}[\rho_i u_n] = \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{\xi_i^n} I_1^\pm[\rho_i u_n] + \Delta_4 J_{nm}.$$

Так как $\Delta\xi \geq C \simeq 1$ (2.4), то, используя полученные оценки, имеем

$$(5.59) \quad \begin{aligned} |\Delta_4 J_{nm}| &\leq \frac{\mathcal{L} N_1}{\Delta\xi} \max_{s,i} |\Delta J_{nm}^2[\rho_i u_n]| \\ &\leq C(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mathcal{L} A(n) N_1 \left[\frac{N_1}{\Omega^2 d_0^2 a^6} + \ln \Omega \left(\frac{N_1^{5/2}}{\Omega^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} d_0^3 a_0^2} \right)^{j_1} + \frac{1}{\Omega^{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{3} j_1}} \right]. \end{aligned}$$

5.2.5. Завершение доказательства леммы 5.1. Складывая (5.40), (5.49), (5.58) и учитывая (5.14), получим равенство (5.18), в котором

$$|\Delta J_{nm}| \leq \sum_{k=2}^5 |\Delta_k J_{nm}|, \quad |\Delta_5 J_{nm}| \leq C \mathcal{L} A(n) \Omega^{-\beta_4 \varkappa},$$

а величины $\Delta_k J_{nm}$ ($k = 2, 3, 4$) оценены в (5.41), (5.50), (5.59). В оценки (5.34), (5.30) входит еще и величина $\Delta_1 J_{nm}$, и $\Delta_1 J_{nm} \in \{O\}$ при условиях (5.35), (5.31).

Пусть $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^1$. Рассмотрим условия, при которых $\Delta_k J_{nm} \in \{O\}$ ($k = 1, \dots, 5$). Полученные оценки $\Delta_k J_{nm}$ имеют вид $|\Delta_k J_{nm}| \leq \Delta_k^1 J_{nm} + \Delta_k^2 J_{nm}$, где величины $\Delta_k^1 J_{nm}$ не зависят от гладкости алгоритма, т.е. от $\varkappa, j_0, j_1$, а величины $\Delta_k^2 J_{nm}$ — зависят. Из (5.9) и (5.59) следует, что $\Delta_4^2 J_{nm} \in \{O\}$, если

$$(5.60) \quad \begin{aligned} j_1 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{6} &\geq \frac{3}{2} + \varepsilon + 2\beta_4 + C\alpha, \\ j_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{5\beta_4}{2} - 2\beta_5 + 3\beta_1 \right) &\geq \frac{3}{2} + \varepsilon + 2\beta_4 + C\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Delta_k^2 J_{nm} \in \{O\}$, $\Delta_F \mu^A \in \{O\}$ при условиях (5.13), (5.31), (5.60). Рассмотрим величины $\Delta_k^1 J_{nm}$ ($k = 1, \dots, 4$). Они имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_k^1 J_{nm} &= \sum_{p=1}^{p(k)} C_k \frac{A(n) Q_{kp}(\ln \Omega)}{\Omega^{3/2 + \gamma_{kp}}} \quad (\gamma_{kp} > 0), \\ Q_{kp} &= \frac{N_1^{x_4}}{d_0^{x_1} D_0^{x_2} a^{x_3}} \cdot \frac{t_1^{y_1} \dots t_4^{y_4}}{t_5^{y_5} \dots t_8^{y_8}} \quad (y_i \equiv y_{k,p,i}, \quad x_i = x_{k,p,i}). \end{aligned}$$

Напомним, что $t_1, \dots, t_4$ – большие, а $t_5, \dots, t_8$ – малые параметры (см. (2.17)). Используя (5.9), запишем условия, при которых $\Delta_k^1 J_{nm} \in \{O\}$, в виде²

$$\sum_{i=1}^5 C_{kp}^i \beta_i + C_{kp} \alpha \leq \gamma_{kp} - \varepsilon \quad (p = 1, \dots, p(k), \quad k = 1, \dots, 4).$$

Из приведенных выше условий извлекается явный вид величин γ_{kp} и констант C_{kp}^i, C_{kp} . В частности, из этих условий следует, что $\gamma_{1p} = \gamma_{2p} = \gamma_{4p} = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \min_p \gamma_{3p} &= \min \left\{ \frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{7\varepsilon_1}{2} \right\} & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^1), \\ \min_p \gamma_{3p} &= \min \left\{ \frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{2} + p \right) \varepsilon_1 \right\} & (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^2). \end{aligned}$$

При $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^1$, подставляя (5.12), (5.30) в (5.2), получим с учетом (5.26), (5.12)

$$(5.61) \quad |\Delta \mu_T^A(\vec{r}_0)| \leq C \sum_{n,m}^F \sum_{\pm} \sum_{s_c^1} \frac{A_c[(1 - \chi_{nm}^{\pm})w_{nm}^{\pm}]}{|\Omega S_{\pm}^{(2)}(s_c^1)|^{1/2}} + R,$$

где суммирование ведется по всем $n, m, \pm, s_c^1$ таким, что

$$\begin{aligned} (m, n) &\neq (0, 0), \quad |n| \leq N_1 = C\Omega^{\beta_4}, \quad |m| \leq M = C\gamma N_1 L^{-1}, \\ |\xi_{nm}^{\pm}(s_c^1) + 2n| &> a, \quad \xi_{nm}^{\pm}(s_c^1) \geq 0 \quad (a = C\Omega^{-\beta_5}), \end{aligned}$$

и функционал $A_c[u]$ оценен в (П.22), а R – в (2.28). Для функционала A_c в (5.61) имеет место оценка

$$A_c[(1 - \chi_{nm}^{\pm})w_{nm}^{\pm}] \leq |w_{nm}^{\pm}(s_c^1(\vec{r}_0), \vec{r}_0)| + 3\delta_c \overline{(w_{nm}^{\pm})_c^1} + A(n)d_0^{-1}a^{j_0},$$

и для завершения доказательства п. 1 леммы 5.1 достаточно показать, что

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &\leq CR, \\ R_1 &= \sum_{n,m}^F \sum_{\pm} \sum_{s_c^1} \frac{\delta_c \overline{(w_{nm}^{\pm})_c^1}}{\Omega S_{\pm}^{(2)}(s_c^1)}, \quad R_2 = \sum_{n,m}^F \sum_{\pm} \sum_{s_c^1} \frac{A(n)a^{j_0}}{d_0 |\Omega S_{\pm}^{(2)}(s_c^1)|^{1/2}}, \end{aligned}$$

и для R верна оценка (2.28). Так как из (5.23), (5.25) следует оценка

$$R_2 \leq C \frac{\mathcal{L} \bar{k} b^{p+1} a^{j_0 - \frac{1}{2}} N_1}{\Omega^{1/2} K_0^{5/4} D_0^{1/2} d_0 L},$$

²Это условия (5.27), (5.31), (5.33), (5.35), (5.39), (5.42), (5.46), (5.54), (5.55), (5.57).

то $R_2 \leq C\Omega^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$, если

$$(5.62) \quad \left(j_0 - \frac{1}{2}\right) \beta_5 \geq C(p)\alpha + \beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 + \varepsilon.$$

Используя оценку

$$(5.63) \quad \left| \frac{d}{ds} \xi_{nm}^{\pm}(s) \right| \leq 2(L|m| + |n|)d_0^{-2},$$

получим, что $|(w_{nm}^{\pm})^{(1)}(s)| \leq C(\bar{v}_n + \bar{v}_n^{(1)}) \frac{L|m| + |n|}{d_0^3}$. Величина δ_c определена в (5.28), и, таким образом, *используя черту сверху для обозначения верхней оценки*, получаем

$$R_1 \leq \frac{C\mathcal{L}b^p \bar{k} k_D^{1/2} a^{1/2} d_0}{\Omega^{1/2} N_1} \sum_{\pm} \sum_{n,m} (\overline{v_n(\xi_{nm}^{\pm})} + \overline{v^{(1)}(\xi_{nm}^{\pm})}) (L|m| + |n|).$$

Непосредственно из определения величин $\xi_{nm}^{\pm}$ (4.2) получаем при $A \in \{A\}$ (см. (3.4))

$$\sum_{n,m}^F (\overline{v_n(\xi_{nm}^{\pm})} + \overline{v^{(1)}(\xi_{nm}^{\pm})}) (L|m| + |n|) \leq C A_0 L^{-\varkappa}$$

и, следовательно,

$$R_1 \leq \frac{C\mathcal{L}(k_D)^{1/2} \bar{k} a^{1/2} d_0}{\Omega^{1/2} N_1} \cdot \frac{A_0}{L^{\varkappa}}.$$

Условие $R_1 \leq C\Omega^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ выполняется, если

$$(5.64) \quad \beta_4 + \frac{1}{2}\beta_5 + \frac{1}{2}\beta_2 \geq \varepsilon + C(\varkappa, p)\alpha.$$

Нужная оценка (5.15) теперь следует из (5.61) и остается убедиться в непротиворечивости условий на α , β_i , которые были сформулированы выше. Выделим среди них условия, зависящие от гладкости, т.е. включающие величины j_0 , j_1 , $\varkappa$. Все такие условия выполняются при достаточно больших j_0 , j_1 , $\varkappa$, если

$$\beta_5 > 0, \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1, \quad 1 > \varepsilon_1 + 5\beta_4 + 4\beta_5 + 6\beta_1.$$

Остальные условия не зависят от гладкости и имеют вид

$$\sum_{i=1}^5 C_i^k \beta_i + C_k \alpha + C_k' \varepsilon \leq F_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (k = 1, \dots, k_M).$$

Те из них, где $F_k > 0$, не представляют опасности, так как их всегда можно удовлетворить при достаточно малых β_i , α , ε . Остается убедиться, что непротиворечивы и условия, для которых $F_k = 0$. Эти условия содержатся в (5.27), (5.33), (5.55), (5.64), и все они имеют вид

$$\beta_2 \geq C(p)\alpha + \sum_{i \neq 2} C_i \beta_i$$

и также могут быть удовлетворены при достаточно малых β_i, α . Таким образом, п. 1 леммы 5.1 доказан.

Доказательство п. 2 полностью аналогично. Нужно только учесть, что в (5.34)

$$(5.65) \quad A_j [w_{nm}^\pm (1 - \chi_{nm}^\pm)] \leq w_{nm}^\pm (s_c^1(r_{0j}), \vec{r}_{0j}) + C \overline{\partial_t w_{nm}^\pm} D_0 + C \overline{(w_{nm}^\pm)^{(1)}} \delta_j + C d_0^{-1} A(n) a^{j_0}.$$

В этой формуле $\partial_t = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ и $|\partial_t w_{nm}^\pm(s_c^1, \vec{r}_0)| \leq C(\bar{v}_n + \bar{v}_n^{(1)}) \frac{L|m| + |n|}{d_0^2}$ ($\vec{r}_0 = (x, y)$).

Аналоги условий (5.62), (5.64) получаются при использовании значения δ_j (5.32) и имеют вид

$$\left(j_0 - \frac{1}{2}\right) \beta_5 \geq C(p) \alpha + \beta_1 + \beta_4 + \varepsilon, \quad \beta_4 + \frac{1}{2} \beta_5 \geq \varepsilon + C(\varkappa + 1) \alpha, \\ \beta_2 \geq C_1(p) \beta_1 + C_2(p, \varkappa) \alpha.$$

Лемма 5.1 доказана.

5.3. Доказательство пп. 1, 2 теоремы 2.1. Если $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^1$, из (5.15) сразу следует нужная оценка ошибки дискретизации

$$|\Delta \mu_T^A(\vec{r}_0)| \leq C G_0(A, \vec{r}_0) \sum_{s_c^1(\vec{r}_0)} |\Omega k(s_c^1)|^{-1/2} l(s_c^1)^{-1} + R,$$

где величина G_0 определена в (2.24). Сравнение этой оценки с (2.27) показывает, что для доказательства п. 1 теоремы 2.1 достаточно получить удовлетворительную оценку ошибки регуляризации, т.е. показать, что $\Delta \mu_R^A(\vec{r}_0) \in \{O\}$. Выше уже отмечалось (см. (3.2)), что величина $\tilde{\mu}^A(\vec{r}_0)$ получается введением регуляризатора

$$(5.66) \quad G(\xi) = R_{A, \Pi}(\lambda) = R^A(\lambda) \frac{1}{2} (\hat{\Pi}(\lambda) + \hat{\Pi}(-\lambda)) = \frac{2\pi}{\xi} S^A(\xi) S_0^\Pi(\xi) = 2\pi v_0(\xi)$$

в формулу обращения преобразования Фурье. Учитывая (3.4), получим, что $\|G^{(N+1)}\|_{L^1} \leq C_N A_0$ при $\varkappa_1 + \varkappa_2 > 2$. Для достаточно гладких алгоритмов можно взять $N = \min\{j_0, j_1\}$, и тогда оценка (П.29) удовлетворительна ($\Delta \mu_R^A(\vec{r}_0) \in \{O\}$ (5.7)) во всей рассматриваемой области $\vec{r}_0$, если

$$(1 - \beta_1) j_0 \geq 2 + \beta_1 + 2\alpha, \quad (1 - \beta_1) j_1 \geq 2 + \beta_1 + 2\alpha.$$

Для достаточно гладких алгоритмов это условие выполняется при достаточно малых α, β_i , и далее при доказательстве пп. 2, 3 теоремы 2.1 *ошибки регуляризации не рассматриваются*.

Докажем п. 2 теоремы 2.1. Так как (см. (5.17), (5.63))

$$B_j[w_{nm}^\pm] \leq |w_{nm}^\pm(s_j^0, \vec{r}_{0j})| + (\bar{v}_n + \bar{v}_n^{(1)}) \frac{L|m| + |n|}{d_0^2} \left(D_0 + \frac{\bar{k} \delta_j}{d_0}\right) + \frac{C A(n) a^{j_0}}{d_0},$$

то из (5.16) с учетом выражения для δ_j (5.32) получим, что при $\vec{r}_0 \in U(\beta_2, T(s_j^0))$, $|\vec{r}_0 - \vec{r}_m^0| \geq D'$

(5.67)

$$\begin{aligned} |\Delta\mu^A(\vec{r}_0)| \leq & \sum_{s_c^1(\vec{r}_{0j})} \frac{G_0(A, \vec{r}_{0j})}{|\Omega k(s_c^1(\vec{r}_{0j}))|^{1/2} l(\vec{r}_{0j}, s_c^1(\vec{r}_{0j}))} + \frac{G_j(A, \vec{r}_{0j})}{(\Omega K_j)^{1/(p_j+2)} l(\vec{r}_{0j}, s_j^0)} \\ & + \frac{\gamma A_0 N_1 a^{j_0-1/(p_j+2)}}{L d_0 (\Omega K_j)^{1/(p_j+2)}} + \frac{\gamma A_0 (D_0 + \bar{k} d_0^{-1} \delta_j)}{L \varkappa d_0^2 (\Omega K_j a)^{1/(p_j+2)}} + R \quad (\forall \gamma \geq 1). \end{aligned}$$

Оценим третий и четвертый члены в правой части этой формулы. Третий член меньше $C\Omega^{-0.5-\varepsilon}$ при условии, что

$$\beta_5(j_0 - 1/3) \geq \frac{1}{2} + C(p)\alpha + \beta_4 + \varepsilon.$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} A_0 D_0 d_0^{-2} a^{-1/(p_j+2)} L^{-\varkappa} & \leq C\Omega^{-\beta'}, \quad \bar{k} \delta_j d_0^{-3} a^{-1/(p_j+2)} L^{-\varkappa} \leq C\Omega^{-\beta'}, \\ \beta' = \min \left\{ \beta_2 - 2\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_5 + C(\varkappa)\alpha, \frac{\beta_4}{p+1} + 2\beta_1 + \frac{\beta_5}{(p+1)(p+2)} - \varkappa\alpha \right\}, \end{aligned}$$

и, следовательно, при

$$\beta' \geq \varepsilon$$

нужная оценка (2.29) следует из (5.67). Оценка (2.30) доказывается точно так же, нужно только везде заменить $\vec{r}_{0j}$ на $\vec{r}_m^0$, D_0 на D' , δ_j на δ_i ($i \subset (m)$) и ввести суммирование по $i \subset (m)$ (2.30). В частности, таким образом получаются аналоги оценок (5.16), (5.67) в области $|\vec{r}_0 - \vec{r}_m^0| \leq D' = C\Omega^{-\beta_3}$.

Непротиворечивость всех условий справедливости оценок (2.29), (2.30) и возможность их выполнения при достаточно малых α , ε_0 в (2.26) для достаточно гладких алгоритмов (2.22) следует из явного вида этих условий и проверяется точно так же, как и при доказательстве п. 1. Таким образом, пункты 1, 2 теоремы 2.1 доказаны.

Заметим, что если в оценках (2.27), (2.29) заменить G_0 и G_j их оценками вида $C A_0 L^{-\varkappa}$ (2.25), то полученные оценки будут трансляционно-инвариантными. Зависимость величин G_0 , G_j (2.24) от $\vec{r}_0$ позволяет качественно объяснить наблюдаемую геометрию артефактов (см. рис. 1). Рассмотрим, например, восстановление характеристической функции круга радиуса B с центром в точке $\vec{a}$ при $|\vec{a}| > B$. Тогда центр сканирования $\vec{O} \notin \mathcal{D}$.

Рассмотрим случай $L \gtrsim 1$, $l(\vec{r}_0, s_c^1) \ll L$. Так как функции S^A , S_Π достаточно быстро убывают, то основной вклад в величину $\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0)$ дают члены с $m = 0$, для которых (см. (4.11))

$$\xi_{n0}^\pm(s_c^1) = -\frac{2n\langle \vec{r}(s_c^1), \vec{l}(s_c^1) \rangle}{l^2(s_c^1)}, \quad \xi_{n0}^\pm(s_c^1) + 2n = -\frac{2n\langle \vec{r}_0, \vec{l}(s_c^1) \rangle}{l^2(s_c^1)},$$

а среди членов с $n \neq 0$ максимальный вклад дает член с $n = -1$. Условие $\xi_{n0}^\pm(s_c^1) \geq 0$ приводит к тому, что артефакты локализованы в области, где $(\langle \vec{r}(s_c^1), \vec{l}(s_c^1) \rangle) > 0$. Это и объясняет эффект “притяжения” артефактов к центру сканирования, наблюдаемый на томограммах (см. рис. 1).

5.4. Доказательство п. 3 теоремы 2.1. Так же, как и при доказательстве леммы 5.1, будем последовательно оценивать интегралы $J_{nm}[\rho_t u_n]$ ($\rho_t = \tilde{\rho}, \rho_i, \rho_0$) при $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^3$.

5.4.1. Оценка интегралов $J_{nm}[\tilde{\rho} u_n]$. Покажем, что $J_{nm}[\rho_t u_n] \in \{O\}$ при $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^3$ ($\rho_t = \tilde{\rho}, \tilde{\rho}_i$). Начнем с оценки интеграла $J_{nm}[\tilde{\rho} u_n]$. Как и в п. 5.2.2, будем исходить из представления (5.37) и использовать теорему П.2, но теперь величину Q не фиксируем. При условии (5.39) получаем равенство

$$J_{nm}[\tilde{\rho} u_n] = \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{\pm} \sum_{q=0}^Q \Omega^{-q} I_1^{\pm}[f_q^{\pm}] + \Delta_{QT}[J_{nm}[\tilde{\rho} u_n]],$$

в котором интегралы $I_1^{\pm}[f_q^{\pm}]$ задаются формулой (5.21) и $f_q^{\pm}(s) = l(s)^{-1} D_q(s)$, а величины $D_q^{\pm}(s)$ определены в (П.6). При этом остаточный член $\Delta_{QT}[J_{nm}[\tilde{\rho} u_n]]$ допускает оценку ($\forall Q, T$)

$$|\Delta_{QT}[J_{nm}[\tilde{\rho} u_n]]| \leq \frac{C_{Q,T}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\Omega d_0} \left(\frac{N_1}{a^2 d_0^2 \Omega} \right)^{Q+1} + \frac{C_T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\Omega^T}.$$

Так как (см. (2.33)) $|\vec{l}, \vec{\tau}| \geq d_T \geq D_0$, то $|S^{(1)}(s)| \geq ad_T$, и интеграл $I_1^{\pm}[f_q^{\pm}]$ можно оценивать, интегрируя по частям. Из (5.22), (5.63) следуют оценки

$$|(D_q^{\pm})^{(p)}| \leq C_p A(n) \bar{k} \left(\frac{\bar{k} b N_1}{d_0^2 a} \right)^p \left(\frac{(\bar{k})^3 N_1}{d_0^2 a^2} \right)^q.$$

В (П.4) для интересующего нас случая можно взять $\lambda = N_1 b^{-2}$, $\lambda_1 = b d_0^{-1}$, $G(x) \geq \tilde{\Phi}_1^2 = a^2 d_T^2$, тогда получим, что $J_{nm}[\tilde{\rho} u_n] \in \{O\}$ при условиях

$$(5.68) \quad \begin{aligned} \beta_4 + \beta_5 + \beta_1 &> \alpha, & C\alpha + 2\beta_1 + \beta_4 + 2\beta_5 &< 1, \\ C\alpha + \beta_4 + 2\beta_5 + 2\beta_2 &\leq 1 - \varepsilon' & (\varepsilon' > 0). \end{aligned}$$

Оценим интеграл $J_{nm}[\rho_i u_n]$ при $\xi_i^n + 2n = 0$ и в этом случае будем писать $\rho_i \equiv \rho_n$. Так же, как в п. 5.2.4, используем следствие П.1 и в рассматриваемом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda = N_1$, $g_1 = \bar{g} = \tilde{g} = l$, $n_0 = n_1 = j_0$, $v_{|\alpha|} = A(n)$.

Из (П.65), (П.60) следует равенство

$$(5.69) \quad \begin{aligned} J_{nm}^2[\rho_n u_n] &= \sum_{c1} (J_{nm}^2[\rho_n u_n])_{c1}^0 + \sum_{c2} (J_{nm}^2[\rho_n u_n])_{c2}^Q \\ &+ (J_{nm}^2[\rho_n u_n])_0^P + \Delta_{QT}(J_{nm}^2[\rho_n u_n]) \\ &+ \sum_{(\pm) \subset (1)} e^{i\Omega f(\varphi_{\pm})} \mathcal{K}_{\pm} T_{\text{ant}}^0 \end{aligned}$$

(запись $(\pm) \subset (1)$ объяснена в (5.47)). Для величины $\Delta_{QT}(J_{nm}^2[\rho_n u_n])$ используем оценку (П.55) при $T = T(Q)$, граничный член $(J_{nm}^2[\rho_n u_n])_0^P$ оценивается с помощью (П.50). Из (П.52), (П.64) при $N = N(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ получаем

$$\left| \sum_{(\pm) \subset (1)} e^{i\Omega f(\varphi_{\pm})} \mathcal{K}_{\pm} T_{\text{ant}}^0 \right| \leq C(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \frac{A(n)}{\Omega d_0} t_0^{j_0} (\ln \Omega) \quad (t_0 = C \Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} N_1^{\frac{5}{2}} d_0^{-3}).$$

Полагая в (5.69) $Q = j_0$. Два первых члена в правой части (5.69) оцениваются сверху величинами

$$C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)A(n)t_0^{j_0}(\Omega d_0)^{-1}, \quad C(\varepsilon_1 \varepsilon_2)A(n)a^{j_0}(\Omega d_0)^{-1}.$$

Используя тривиальную оценку $|J_{nm}[\rho_n u_n]| \leq \mathcal{L} \max_s |J_{nm}^2[\rho_n u_n]|$, имеем

$$\begin{aligned} |J_{nm}[\rho_n u_n]| &\leq C(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mathcal{L} A(n) \\ &\times \left[\frac{a^{j_0}(\ln \Omega)}{\Omega d_0} + (\ln \Omega) (N_1^{5/2} \Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} d_0^{-2} a^{-2})^{j_0} + \Omega^{-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{3} j_0} \right] \end{aligned}$$

и, следовательно, $J_{nm}[\rho_n u_n] \in \{O\}$, если

$$(5.70) \quad \begin{aligned} \beta_5 j_0 &\geq 2\beta_1 + 2\alpha + \beta_4, \quad j_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \geq 3 + 2\alpha + \beta_4, \\ j_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} - 2\beta_1 - 2\beta_5 + \frac{5}{2}\beta_4 \right) &\geq 3 + 2\alpha + \beta_4. \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть интеграл $J_{nm}[\rho_i u_n]$ при $\xi_i^n + 2n \neq 0$. В этом случае вместо (П.65) используем представление (П.68), из которого следует, что

$$(5.71) \quad \begin{aligned} J_{nm}^2[\rho_i u_n] &= \sum_{c1} (J_{nm}^2)_{p,c1} + \sum_{c2} (J_{nm}^2)_{c2}^Q + \sum_{(\pm) \subset (1)} e^{i\Omega f(\varphi_{\pm})} \mathcal{K}_{\pm} T_{\text{ant}}^0 \\ &+ (J_{nm}^2[\rho_i u_n])_0^P + \Delta_{QT}(J_{nm}^2[\rho_i u_n]) + \Delta^p J_{nm}^2, \end{aligned}$$

и в этой формуле (см. (П.70))

$$(J_{nm}^2)_{p,c1} = i\pi e^{i\Omega f(\varphi_{\pm})} \sum_{q=0}^{p-1} T_{\text{sym}}^q.$$

Величина $\Delta^p J_{nm}^2$ в (5.71) оценивается с помощью (П.69) при $\lambda_{\varphi} = d_0^{-1}$. Остальные члены в правой части (5.71), кроме первого, оцениваются так же, как и выше при $\rho_i = \rho_n$. Остается оценить интеграл

$$\int (J_{nm}^2)_{p,c1} ds = i\pi \sum_{q=0}^{p-1} \int e^{i\Omega S} T_{\text{sym}}^q ds.$$

Интегралы в правой части этого равенства оцениваются с помощью p -кратного интегрирования по частям (П.2), (П.4). Беря $p = P(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и используя оценки

$$\left| \left(\frac{d}{ds} \right)^m T_{\text{sym}}^q \right| \leq C_q \left(\frac{\bar{k}b}{d_0^2 t_0} \right)^p \bar{T}_{\text{sym}}^q, \quad |T_{\text{sym}}^q| \leq \bar{T}_{\text{sym}}^q = \frac{C_{Nq} A(n) N_1^q}{\Omega^{q+1} d_0^{2q} a^{4q}},$$

получим, что $J_{nm}[\rho_i u_n] = \{O\}$, если

$$(5.72) \quad \begin{aligned} \beta_4 + 4\beta_5 + 2\beta_2 + 2\beta_1 &\leq 1 - \varepsilon'', \quad 2\alpha + \beta_5 + \beta_1 \leq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} - \varepsilon'', \quad \varepsilon'' > 0, \\ j_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} - 2\beta_1 - 2\beta_5 - \frac{5}{2}\beta_4 \right) &\geq 3 + 2\alpha + \beta_4, \quad \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} j_1 \geq 3 + 2\alpha + 2\beta_4. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^3$ основной вклад в величину $\Delta \mu_T^A(\vec{r}_0)$ дает интеграл $J_{nm}[\rho_0 u_n]$.

5.4.2. Оценка интеграла $J_{nm}[\rho_0 u_n]$ и завершение доказательства теоремы 2.1. Случай $n = 0$ и $L|m| \geq 4|n|$ уже были рассмотрены выше (см. п. 5.2.3). Ниже предполагается, что выполнены условия (5.42), при которых справедливы оценки (5.43), (5.44), и рассматривается случай $L|m| < 4|n|$, $n \neq 0$.

Для получения асимптотически точных оценок подход, используемый при $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^1 \cup D_{\beta_1 \beta_2}^2$ и основанный на представлении (5.45), не дает нужной точности, так как производная амплитуды, продолженной нулем в область $\xi < 0$, имеет в точке $\xi = 0$ разрыв первого рода и $j_{0n}^0 = j_{0n}^1 = 1$ (2.20), (2.21). При $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^3$ будем исходить из представления

$$(5.73) \quad J_{nm}[\rho_0 u_n] = \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{nm}^2[\rho_0 u_n] e^{i\Omega f},$$

в котором

$$Y_{nm}^2[\rho_0 u_n] = \int_0^\infty d\xi \int_{\partial\mathcal{D}} ds \rho_0(\xi) u_n e^{i\Omega \Psi}$$

и функции f , Ψ определяются из соотношений

$$f(\varphi) = -2Lm\varphi + 2n\langle \vec{r}_0, \vec{\eta} \rangle, \quad \Psi(\xi, s) = (\xi + 2n)\langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle.$$

Фаза Ψ как функция ξ , s не имеет при $\xi \in \text{supp } \rho_0$, $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1 \beta_2}^3$, критических точек, и, учитывая определение (2.33) величины d_T , получаем

$$G \equiv \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \right)^2 \geq C d_T^2.$$

Интегрируя выражение для Y_{nm}^2 по частям, с помощью (П.2) получим равенство

$$(5.74) \quad Y_{nm}^2[\rho_0 u_n] = \sum_{j=1}^N \left(\frac{i}{\Omega} \right)^{j+1} Y_{nm}^1[w_j] + \Delta_N Y_{nm}^2,$$

в котором Y_{nm}^1 — одномерный ОИ вида

$$(5.75) \quad Y_{nm}^1[w_j] = \int_{\partial\mathcal{D}} w_j e^{i\Omega 2n\langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle} ds, \quad w_j(\varphi, s) = \frac{\langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle A_{\Psi}^j(u_n)|_{\xi=0}}{\langle \vec{l}, \vec{\eta} \rangle^2 + 4n^2 \langle \vec{\tau}, \vec{\eta} \rangle^2}.$$

Из (П.4), учитывая, что для фазы Ψ можно считать, что $\lambda = \bar{k}nb^{-2}$, $\lambda_1 = b$, $G \geq C D_0^2$, при дополнительных условиях

$$(5.76) \quad \beta_6 > \alpha, \quad \beta_2 > \beta_6 + \beta_4 + \alpha$$

получим

$$(5.77) \quad |\Delta_N Y_{nm}^2| \leq \Omega^{-N} \left| \int_0^\infty d\xi \int_{\partial\mathcal{D}} ds A_{\Psi}^N[\rho_0 u_n] \right| \leq C_N k \mathcal{L} a_0 b^{-1} \left(\frac{\bar{k}n}{D_0^2 \Omega} \right)^N.$$

Подстановка разложения (5.74) в (5.73) дает

$$(5.78) \quad J_{nm}[\rho_0 u_n] = \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{i}{\Omega} \right)^{N+1} I_{nm}[w_j] + \Delta_N J_{nm}[\rho_0 u_n].$$

В этой формуле $I_{nm}[w_j]$ – двумерный ОИ вида

$$(5.79) \quad \begin{aligned} I_{nm}[w_j] &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\partial\mathcal{D}} ds e^{i\Omega\Phi(\varphi, s)} w_j, \\ \Phi(\varphi, s) &= \Phi_{nm}(\varphi, 0, s) = -2Lm\varphi + 2n\langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle. \end{aligned}$$

Из (5.77) следует оценка остаточного члена $\Delta_N J_{nm}[\rho_0 u_n]$ в (5.78):

$$|\Delta_N J_{nm}[\rho_0 u_n]| \leq C_N \mathcal{L} a_0 b^{-1} \left(\frac{\bar{k} N_1}{D_0^2 \Omega} \right)^N.$$

Таким образом, задача сводится к оценке ОИ $I_{nm}[w_j]$ (5.7.9). Для этого используется разбиение единицы по s

$$1 = \sum_i \rho_i(s) + \tilde{\rho}(s)$$

с центрами в точках уплощения s_i^0 и масштабами δ_i такими, что

$$(5.80) \quad \begin{aligned} \delta_i &\geq \delta_s > 0, \quad \delta_i \leq \frac{1}{2} \Delta_i \equiv C_i K_i (\bar{k} b^{p_i+1})^{-1}, \\ \delta_i &\leq C K_i^{1/p_i}. \end{aligned}$$

В этом случае имеются оценки

$$(5.81) \quad |k(s)| \geq k_\delta = \min\{C_i K_i \delta_i^{p_i}, \tilde{k}\} \quad (s \in \text{supp } \tilde{\rho}),$$

$$(5.82) \quad |k(s)| \leq \frac{1}{2} \quad (s \in \text{supp } \rho_i).$$

Запишем интеграл $I_{nm}[w_j]$ в виде

$$(5.83) \quad I_{nm}[w_j] = \sum_i I_{nm}[w_j \rho_i(s)] + I_{nm}[w_j \tilde{\rho}(s)]$$

и будем оценивать интегралы $I_{nm}[w_j \rho_i(s)]$, $I_{nm}[w_j \tilde{\rho}(s)]$ по отдельности.

Начнем с интеграла $I_{nm}[\tilde{\rho}(s)w_j]$ и используем представление

$$(5.84) \quad \begin{aligned} I_{nm}[\tilde{\rho}(s)w_j] &= \int_0^{2\pi} e^{-i\Omega 2Lm\varphi} I_{nm}^1 d\varphi, \\ I_{nm}^1 &= \int_{\partial\mathcal{D}} e^{i\Omega_1 \Phi(s)} \tilde{\rho}(s) w_j ds, \quad \Omega_1 = 2n\Omega, \quad \Phi(s) = \langle \vec{r}(s), \vec{\eta} \rangle. \end{aligned}$$

Покажем, что критические точки $s_c(\varphi)$ фазы Φ как функции одного переменного s невырождены. Эти точки определяются из условий

$$\vec{\nu}(s_c(\varphi)) = \varepsilon_2 \vec{\eta}, \quad \varepsilon_2 = \pm 1 \quad (\langle \vec{\tau}(s_c(\varphi)), \vec{\eta} \rangle = 0),$$

и они невырождены, так как $\Phi^{(2)}(s) = (k \langle \vec{\nu}, \vec{\eta} \rangle)(s)$ (см. (5.81)) и

$$\Phi^{(2)}(s_c(\varphi)) = k(s_c(\varphi))\varepsilon_2, \quad |\Phi^{(2)}(s_c(\varphi))| \geq k_\delta.$$

Для исследования интеграла I_{nm}^1 используем теорему П.1. В рассматриваемом случае можно взять

$$\delta_c = \delta_0, \quad \lambda^c = \lambda = \bar{k}b^{-2}, \quad \lambda_1^c = \lambda_1 = b, \quad B_0 = k_\delta.$$

Так как $\Phi^{(1)}(s_{cx}) = 1$, то величины δ_c достаточно малы при $k_\delta \delta_0 < 1$. Осталось еще определить величины λ_2 , λ_2^c , v_j (П.5), (П.8) такие, что

$$|\partial_s^m w_j| \leq C_{jm} v_j \lambda_2^{-m}, \quad |\partial_s^m w_j| \leq C_{jm} v_j (\lambda_2^c)^{-m} \quad (|s - s_c(\varphi)| < 2\delta_0).$$

Предположим, что величины δ_i (5.80) удовлетворяют условиям

$$(5.85) \quad \delta_i = \delta_s, \quad C \frac{D_0}{|n|b} \leq \delta_s \leq \frac{C}{b}.$$

Тогда можно взять

$$(5.86) \quad v_j = A(n) \frac{\bar{k}}{b d_T^2} \left(\frac{\bar{k}|n|}{D_0^2} \right)^j, \quad \lambda_2 = \left(\frac{d_T^2}{\bar{k} b n^2} \right)^{-1}, \quad \lambda_2^c = \left(\frac{d_T}{(\bar{k})^{1/2} |n| b} \right)^{-1}.$$

Величина δ_0 определяется в (П.9), т.е. $\delta_0 = C \Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} (\bar{k})^{1/2} (k_\delta)^{-1}$. Теперь условия (П.10) имеют вид

$$(5.87) \quad \frac{D_0^2 k_\delta}{\bar{k} b |n|^{5/2}} > C \Omega^{-\frac{1-\varepsilon_2}{2}}, \quad \frac{(\bar{k})^3 b^2}{(k_\delta)^6} < C \Omega^{1+\varepsilon_2}, \quad \frac{(\bar{k})^5 b^2 |n|^5}{D_0^6 (k_\delta)^3} < C \Omega,$$

и при их выполнении для интеграла I_{nm}^1 имеет место представление (П.11). Используя это представление в (5.84) и переходя от переменной φ к переменной s ($\varphi = \varphi(s) \Leftrightarrow \langle \vec{\tau}, \vec{\eta} \rangle = 0$), получим

$$(5.88) \quad I_{nm}[\tilde{\rho}(s)w_j] = \sum_{\varepsilon_2} \left(\frac{2\pi}{\Omega|n|} \right)^{1/2} e^{\frac{i\pi}{4}\varkappa_c} \sum_{t=0}^Q \frac{I_2[|k|^{1/2} D_t^c(\tilde{\rho}(s), w_j)]}{(\Omega|n|)^t} + \Delta_{QT}(I_{nm}[\tilde{\rho}(s)w_j]).$$

В этой формуле $I_2[u]$ — одномерный ОИ вида

$$(5.89) \quad I_2[u] = \int_{\partial \mathcal{D}} e^{i\Omega_1 S} u \, ds,$$

в котором

$$(5.90) \quad \Omega_1 = -2n\varepsilon_2\Omega, \quad S(s) = \gamma\varphi(s) - \langle \vec{r}(s), \vec{\eta} \rangle, \\ \gamma = \frac{Lm}{n}\varepsilon_2.$$

Величины $D_t^c[\tilde{\rho}(s)w_j]$ задаются равенствами (П.6), и из (П.14) следует оценка

$$|D_t^c[\tilde{\rho}(s)w_j]| \leq C_t v_{6t} \left(\frac{\bar{k}b^2|n|^5}{(d_T)^6(k_\delta)^3} \right)^t,$$

а для остаточного члена $\Delta_{QT}(I_{nm}[\tilde{\rho}(s)w_j])$ имеется оценка (П.13) и $\forall T, Q$

$$(5.91) \quad \Delta_{QT}(I_{nm}[\tilde{\rho}(s)w_j]) \leq \frac{C_T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\Omega^T} + \frac{C_{QT}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\mathcal{N}_2}{|n|^{1/2}\Omega^{1/2}k_\delta} \left(\frac{(\bar{k})^3b^2|n|^5}{D_0^6(k_\delta)^3\Omega} \right)^{Q+1},$$

где $\mathcal{N}_2 \leq C\mathcal{L}\bar{k}b^{p+1}K_0^{-1}$ – число критических точек $s_c(\varphi)$.

Будем оценивать интеграл $I_2[u]$ (5.89), в котором (см. (5.81))

$$|k(s)| \geq k_\delta \quad (s \in \text{supp } u), \quad |\vec{r}(s)| \leq \frac{1}{2}, \quad |\gamma| < 4.$$

Так как функция $\varphi(s)$ определяется из условия $\langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle = 0$, то $\frac{d\varphi}{ds} = -k(s)$. Величины $k(s)$, ε_2 не меняют знака на связной компоненте $\text{supp } \tilde{\rho}$. Фаза S не зависит от $\vec{r}_0$, и единственным параметром является γ . Так как $S^{(1)}(s) = k(-\gamma + \langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle)$, то критические точки s_c фазы S (5.90) определяются из условий $\langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle = \gamma$. Эти точки существуют только при $|\gamma| < \frac{1}{2}$. Из (П.26) следует, что при $|\gamma| \geq 1$

$$|I_2[u]| \leq \frac{c\bar{k}b^2\mathcal{L}}{\Omega|n|(k_\delta)^2},$$

и ниже предполагается, что $|\gamma| < 1$.

Так как $S^{(2)}(s_c) = k(s_c)f(s_c)$, где функция f определена в (2.11), то критическая точка s_c вырождена тогда и только тогда, когда $s = s_\alpha$ где s_α – экстремальная точка функции $\langle \vec{r}, \vec{\tau} \rangle$ (см. (2.12)). Точки s_α зависят только от контура $\partial\mathcal{D}$ и отмеченной точки $\vec{O}$ – начала координат. Опишем алгоритм их нахождения. Пусть $\vec{r}_E(s) \in E$, E – эволюта контура $\partial\mathcal{D}$ ($\vec{r}_E(s) = \vec{r}(s) + (k(s))^{-1}\vec{\nu}(s)$). Уравнение для точек s_α имеет вид $\langle \vec{r}_E(s_\alpha), \vec{\nu}(s_\alpha) \rangle = 0$. Так как нормаль $\vec{\nu}(s)$ направлена по касательной к эволюте, то точка s_α определяется из условия: вектор $\vec{r}_E(s_\alpha)$ перпендикулярен к эволюте.

Единственной аналитической кривой, для которой точки s_α неизолированы, является окружность с центром в начале координат, и этот случай будет рассмотрен отдельно.

Условия вырождения $s_c = s_\alpha$ выполняются только при $\gamma = \gamma_\alpha$, где величины γ_α определены в (2.13). Множество $\bigcup \gamma_\alpha$ является каустикой фазы S (5.90), и точки γ_α предполагаются изолированными.

Оценка интеграла $I_2[u]$ производится с помощью лемм П.1, П.2, а нужную информацию о локализации критических точек дает лемма П.3. Не останавливаясь на вычислениях, сформулируем результаты. Пусть $\gamma_i \subset \cup \gamma_\alpha$ – ближайшая к γ точка каустики. Будем говорить, что $\alpha \subset i$ ($\alpha \neq i$), если $|\gamma - \gamma_\alpha| \leq C f_\alpha^{q_\alpha+1} (\bar{k} b^{q_\alpha+1})^{-q_\alpha-1}$. В области

$$(5.92) \quad |\gamma - \gamma_i| \geq C \frac{\bar{k} b^{10/3} \mathcal{L}^{2/3}}{k_\delta \Omega_1^{1/4} F_i}, \quad F_i = \min_{\alpha \subset i} \{f_\alpha^{1/(q_\alpha+1)}\}$$

имеет место оценка

$$(5.93) \quad |I_2[u]| \leq \frac{C(\bar{u} + \bar{u}^{(1)} \mathcal{L}) \mathcal{N}_3}{|\Omega_1 k_\delta \tilde{f}_i(\gamma)|^{1/2}},$$

$$\tilde{f}_i(\gamma) = \min_{\alpha \subset i} \{\tilde{f}, f_\alpha^{1/(q_\alpha+1)} |\gamma - \gamma_\alpha| (\alpha \subset i)\}.$$

Относительно используемых обозначений и определений величин $\tilde{f}$, f_α , f_0 см. §2. В (5.93) $\mathcal{N}_3$ – число критических точек фазы S (5.90). Оценка (5.93) получена с помощью леммы П.1, в которой $\Psi(s) = k_\delta(-\gamma + \langle \vec{r}, \vec{\eta} \rangle)$, и условия справедливости оценки (5.93) имеют вид

$$(5.94) \quad \frac{(\bar{k})^3 b^5 \mathcal{L}}{(k_\delta)^{3/2} \tilde{f}^{3/2}} \leq C \Omega_1^{1/2}, \quad f_\alpha \left(\frac{f_\alpha}{\bar{k} b^{q_\alpha+1}} \right)^{q_\alpha+1} \geq C \frac{(\bar{k})^2 b^2 \mathcal{L} \tilde{f}^4}{\Omega_1 (k_\delta)^3},$$

$$\frac{\bar{k} b \mathcal{L}}{\Omega_1^{1/4} (k_\delta)^{3/2}} \leq C, \quad \tilde{f} \geq \frac{\bar{k} b^{10/3} \mathcal{L}^{2/3}}{k_\delta \Omega_1^{1/3}}.$$

В области, где не выполняются условия (5.92), надо учитывать вырождение и использовать лемму П.2. В этой области

$$(5.95) \quad |I_2[u]| \leq C \frac{(\bar{u} + \bar{u}^{(1)} \mathcal{L}) \mathcal{N}_3}{(\Omega_1 k_\delta f_i)^{1/(q_j+2)}},$$

и эта оценка имеет место, если (см. (2.14))

$$(5.96) \quad \min_{\alpha \neq i} \{|\gamma_\alpha - \gamma_i|\} \geq \Delta^0 \geq \frac{C_i \bar{k} b^{25/6} \mathcal{L}^{5/2}}{(k_\delta)^{3/2} F_i^{3/2} \Omega_1^{1/8}},$$

$$\frac{(\bar{k})^{2q_i+4} b^{2(q_j+1)^2 + \frac{13}{3}}}{(k_\delta)^{2q_j+5} f_i^{2q_i+4} F_i \tilde{f}^2} \leq C \Omega_1^{1/4}.$$

Так как $F_i \geq C_i f_0^{1/3}$, $\mathcal{N}_3 \leq C_q \mathcal{L} \bar{k} b^{q+1} f_0^{-1}$, то из (5.93), (5.95) следует грубая, но равномерная по γ оценка

$$(5.97) \quad |I_2[u]| \leq \frac{C_q (\bar{u} + \bar{u}^{(1)} \mathcal{L})}{(\Omega_1 k_\delta)^{1/(q+2)} f_0^{1/3}} \cdot \frac{\mathcal{L} \bar{k} b^{q+1}}{f_0},$$

которая используется ниже.

В интересующем нас случае $u(s) = k(s)^{1/2} D_t[\tilde{\rho}(s)w_j]$. В неравенстве $|u^{(1)}(s)| \leq \overline{u^{(1)}}$ можно взять $\overline{u^{(1)}} = C\lambda_2\bar{u}$, где величина λ_2 определена в (5.86). Из (5.88), (5.91), (5.97) при $Q = Q(\varepsilon', T)$ следует, что $\forall T$

$$(5.98) \quad |I_{nm}[\tilde{\rho}(s)w_j]| \leq \frac{C_{jT}(\varepsilon')A(n)\mathcal{L}^2(\bar{k})^{7/2}b^{q+1}|n|^{3/2}}{\Omega^{1/2+1/(q+2)}(k_\delta)^{1/(q+2)}d_T^4f_0^{4/3}} \left(\frac{\bar{k}|n|}{D_0^2}\right)^j + \frac{C_{jT}(\varepsilon')\mathcal{L}\bar{k}b^{q+1}}{f_0\Omega^T},$$

и эта оценка верна при дополнительном условии

$$(5.99) \quad \frac{(\bar{k})^3b^2N_1^5}{D_0^6(k_\delta)^3\Omega} \leq C\Omega^{-\varepsilon'} \quad (\varepsilon' > 0).$$

Напомним, что рассматривается случай $L|m| \leq |n|$.

Рассмотрим специальный случай: $\partial\mathcal{D}$ – окружность радиуса B с центром в начале координат. Возвращаясь в интеграле $I_2[u]$ (5.89) к переменной φ , имеем

$$I_2[|k|^{1/2}D_c^t(\tilde{\rho}(s)w_j)] = \int_0^{2\pi} e^{i2Lm\varphi} u_t(\varphi) d\varphi, \\ u_t(\varphi) = (D_c^t|k|^{-1/2})(s(\varphi)).$$

Отсюда сразу следует оценка

$$I_2[|k|^{1/2}D_c^t(\tilde{\rho}(s)w_j)] \leq \begin{cases} 2\pi\bar{u}_t & (m=0), \\ \frac{C(\bar{u}_t + \overline{u_t^{(1)}}\mathcal{L})}{\Omega L|m|} & (m \neq 0), \end{cases}$$

и вместо (5.98) получаем

$$(5.100) \quad |I_{nm}[\tilde{\rho}(s)w_j]| \leq \frac{C_{Tj}(\varepsilon')A(n)}{(\Omega|n|k_\delta)^{1/2}} \left(\frac{\bar{k}}{bd_T^2}\right)^j + \frac{C_T(\varepsilon')}{\Omega^T}.$$

Заметим, что эта оценка получена для любого значения δ_s , удовлетворяющего условиям (5.80), (5.85).

Переходим к оценке интеграла $I_{nm}[\rho_i(s)w_j]$. По определению (5.83)

$$I_{nm}[\rho_i w_j] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\partial\mathcal{D}} ds e^{i\Omega\Phi(\varphi,s)} \rho_i(s)w_j, \\ \Phi(\varphi,s) = -2Lm\varphi + 2n\langle\vec{r}(s), \vec{\eta}\rangle.$$

При условиях (5.80) критические точки (φ_c, s_c) фазы Φ невырождены. Действительно, эти точки находятся из условий $\vec{\eta}(\varphi_c) = \varepsilon_2\vec{\nu}(s_c)$, $\langle\vec{r}(s_c), \vec{\tau}(s_c)\rangle = \gamma$ и, следовательно, $|\det \Phi_c''| = 4n^2|1 + k(s_c)\langle\vec{r}(s_c), \vec{\nu}(s_c)\rangle| \geq 2n^2$, так как $|k(s_c)| \leq 0.5$ (5.82). Для оценки интеграла $I_{nm}[\rho_i(s)w_j]$ можно использовать теорему П.1, в которой $\delta_c = \delta_0$, $\lambda = |n|b^{-2}$, $\lambda_1 = b$, $B_c = B_0 = C|n|$, а условие достаточной малости δ_c имеет вид

$\delta_0 \leq Cb^{-1}$. Это следует из того, что в области, где $|s - s_c| > \delta_0$ или $|\varphi - \varphi_c| > \delta_0$, справедлива оценка

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 \geq C|n|^2 \delta_0^2.$$

Фигурирующие в формулировке теоремы П.4 величины λ_2 , λ_2^c , v_j определяются равенствами (5.86), в которых надо положить $\bar{k} = 1$. Непосредственно проверяется, что условия теоремы П.1 выполняются, если выполнены условия (5.87). Для оценки критического вклада используем (П.14). Число $\mathcal{N}_4$ критических точек (φ_c, s_c) удовлетворяет условию $\mathcal{N}_4 < 2\mathcal{N}_3$, а число $\mathcal{N}_3$ было оценено выше. При условии (5.99), выбирая нужным образом Q в (П.11), получим $(\forall T)$

$$(5.101) \quad |I_{nm}[\rho_i(s)w_j]| \leq C_{jT}(\varepsilon') \frac{\mathcal{L}\bar{k}b^{q+1}}{f_0} \left[\frac{1}{\Omega^T} + \frac{A(n)}{\Omega|n|d_T^2 b} \left(\frac{|n|}{D_0^2} \right)^j \right].$$

Оценка

$$(5.102) \quad |I_{nm}[w_j]| \leq \frac{C_{jT}(\varepsilon') \mathcal{L}^2(\bar{k})^{7/2} b^{q+1} |n|^{3/2}}{\Omega^{1/2+1/(q+2)} (k_\delta)^{1/(q+2)} d_T^4 f_0^{4/3}} \left(\frac{\bar{k}|n|}{D_0^2} \right)^j + \frac{C_{jT}(\varepsilon') \mathcal{L}\bar{k}b^{q+1}}{f_0 \Omega^T}$$

получается простым сложением оценок (5.98), (5.101) с учетом оценки $\mathcal{N} \leq C\mathcal{L}(\min \Delta_i)^{-1}$ (5.23) для числа $\mathcal{N}$ точек уплощения.

Выбирая в (5.78) $N = N(T, \varepsilon')$ и используя (5.102) при $L|m| \leq |n|$, имеем

$$(5.103) \quad |I_{nm}[\rho_0 u_n]| \leq \frac{C_{jT}(\varepsilon') \mathcal{L}^2(\bar{k})^{7/2} b^{q+1} |n|^{3/2}}{\Omega^{5/2+1/(q+2)} (k_\delta)^{1/(q+2)} d_T^4 f_0^{4/3}} + \frac{C_{jT}(\varepsilon') \mathcal{L}\bar{k}b^{q+1}}{f_0 \Omega^{T+2}}.$$

Рассмотрим условия, при которых доказана эта оценка. Выбирая в соответствии с (5.80) $\delta_s = K_0(\bar{k}b^{p+1})^{-1}$, получим, что условия (5.85) выполняются, если

$$(5.104) \quad \beta_2 > C(p)\alpha,$$

и тогда (см. (2.33))

$$k_\delta = \tilde{K}_p = \min \left\{ C \frac{K_0^{p+1}}{(\bar{k})^p b^{p^2}}, \tilde{k} \right\}.$$

Условия (5.99) выполняются, если

$$(5.105) \quad 5\beta_4 + 6\beta_2 + C(p)\alpha \leq 1 - \varepsilon'.$$

За исключением условий (5.76), (5.104) все условия справедливости (5.103), (5.87), (5.94), (5.96) также имеют вид (см. (5.10))

$$C_k^1 \beta_4 + C_k^2 \beta_2 + C_k^3(q, p)\alpha < F'_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad F'_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0 \quad \text{при } \varepsilon_i < 1.$$

Чтобы перейти к оценке величины $\Delta \mu_T^A(\vec{r}_0)$, к этим условиям надо добавить условия (5.70), (5.72), которые выполняются для достаточно гладкого алгоритма, и условия (5.68), (5.70), (5.39), при выполнении которых $J_{nm}[\rho_t u_n] \in \{O\}$ ($\rho_t = \tilde{\rho}, \rho_i$). Явный вид всех перечисленных условий показывает, что все их можно удовлетворить, зафиксировав достаточно малые положительные $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Оценим вклад $\Delta\mu_{TF}^A(\rho_0)$ интегралов $I_{nm}[\rho_0 u_n]$ в ошибку дискретизации:

$$\begin{aligned} |\Delta\mu_{TF}^A(\rho_0)| &\equiv \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{n,m}^F |J_{nm}[\rho_0 u_n]| \leq \frac{\Omega}{2\pi} \left[\sum_{|m| \neq 0}^{CN_1 L^{-1}} |J_{0m}[\rho_0 u_0]| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{L|m| \geq C|n|}^F J_{nm}[\rho_0 u_n] + \sum_{L|m| < C|n|} |J_{nm}[\rho_0 u_0]| \right]. \end{aligned}$$

Используя оценки (5.43), (5.44), (5.103) и выбирая нужным образом T, ε' , при условиях (5.42), (5.11) получим, что для общего контура $\partial\mathcal{D}$, $\forall \gamma \geq 1$

$$|\Delta\mu_{TF}^A(\rho_0)| \leq \gamma \frac{C(\varepsilon_0) A_0 \mathcal{L}^2(\bar{k})^2 b^{q+1}}{\Omega^{3/2+1/(q+2)} (\tilde{K}_p)^{1/(q+2)} L f_0^{4/3}}.$$

Эта оценка совпадает с первым членом оценки (2.31), и учитывая, что при условии (5.13) $\Delta_F \mu^A(\vec{r}_0) \in \{O\}$, получим нужный результат, так как $J_{nm}[\tilde{\rho}_t u_n] \in \{O\}$ ($\rho_t = \tilde{\rho}, \rho_i$).

Доказательство оценки (2.35) полностью аналогично, надо только вместо (5.98) использовать (5.100). Так как шп. 1, 2 теоремы 2.1 были доказаны выше, доказательство этой теоремы завершено.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$, $A \in \{A\}$ – достаточно гладкий алгоритм и $\sigma_\infty(\vec{r}_0)$ – асимптотический показатель сходимости (1.21). Тогда при $\vec{r}_0 \notin \partial\mathcal{D}$

$$(5.106) \quad \sigma_\infty(\vec{r}_0) \geq \begin{cases} \frac{1}{2} & (\vec{r}_0 \in T(\partial\mathcal{D}), \quad \vec{r}_0 \notin T_0), \\ \frac{1}{p+2} & (\vec{r}_0 \in \cap T(s_i^0)), \quad p = \max p_i, \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{q+2} & (\vec{r}_0 \notin T(\partial\mathcal{D})). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изложенный в [19] метод разложения по гладкости позволяет заключить, что минимум показателя сходимости для заданного алгоритма $A \in \{A\}$ при $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$ достигается на функциях вида $\mu = \chi_{\mathcal{D}}$. Оценка (5.106) показателя сходимости прямо следует из теоремы 2.1.

5.5. Формальный показатель сходимости и точность полученных оценок. Чтобы рассмотреть вопрос о точности полученных оценок, введем *формальный показатель сходимости* $\sigma_1^A(\vec{r}_0)$. Сначала определим *формальный показатель сходимости* $\sigma_1^T(\vec{r}_0)$ для ошибки дискретизации. Пусть имеется асимптотически точное равенство

$$J_{nm}[u_n] = O(\Omega^{-\gamma_{nm}(\vec{r}_0)}) \quad (\Omega \rightarrow \infty, m^2 + n^2 \geq 1, d(r_0, \partial\mathcal{D}) > 0),$$

в котором m, n рассматриваются как непрерывные параметры. Тогда по определению

$$\sigma_1^T(\vec{r}_0) = \left(\min_{m^2+n^2 \geq 1} \{\gamma_{nm}(r_0)\} \right) - 1.$$

Если, кроме того, для ошибки регуляризации $\Delta\mu_R^A(\vec{r}_0)$ имеется асимптотически точное равенство

$$\Delta\mu_R^A(\vec{r}_0) = O(\Omega^{-\sigma_1^R(\vec{r}_0)}) \quad (d(\vec{r}_0, \partial\mathcal{D}) > 0),$$

то величина $\sigma_1^A(\vec{r}_0)$ определяется соотношением

$$\sigma_1^A(\vec{r}_0) = \min\{\sigma_1^T(\vec{r}_0), \sigma_1^R(\vec{r}_0)\}.$$

Предположим, что при суммировании по n, m в выражении (3.10) для $\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0)$ не происходит сокращения главных членов асимптотики интегралов $J_{nm}[u_n]$, тогда $\sigma_\infty^A(\vec{r}_0) = \sigma_1^A(\vec{r}_0)$ и величина $\sigma_1^A(\vec{r}_0)$ может служить в качестве ориентира для оценки сверху величины $\sigma_\infty^A(\vec{r}_0)$.

Для гладкой амплитуды u_n величину $\sigma_1^T(\vec{r}_0)$ можно вычислить с помощью леммы 4.1 и формул (П.16), (П.17). При рассмотрении ОИ с негладкой амплитудой возникает вопрос об их равномерной оценке в области параметров, где критические точки близки к точкам нарушения гладкости амплитуды. Однако, если нас интересует оценка величины $\sigma_1^T(\vec{r}_0)$ сверху, то можно ограничиться рассмотрением следующих двух случаев: критические точки далеки от точек нарушения гладкости и критические точки совпадают с точками нарушения гладкости. Таким образом, можно использовать неравномерные (индивидуальные) оценки, т.е. оценки при фиксированных параметрах, учитывая, что индивидуальный показатель сходимости не меньше равномерного. Теперь заметим, что теоремы П.1–П.5 с минимальными изменениями справедливы и в том случае, когда невырожденные критические точки попадают на границу области интегрирования. В этом случае надо только поставить коэффициент $1/2$ у критического вклада такой точки и заменить u на $\tilde{\rho}u$ в граничных членах $J_{\partial M}^P, (J_2)_0^P$. Эти замечания вместе с леммой 4.1 и формулами (П.16), (П.17) позволяют оценить сверху формальный показатель сходимости для негладких алгоритмов и контуров $\partial\mathcal{D}$. При этом надо действовать так же, как при доказательстве теоремы 2.1, но учитывать и граничные члены $J_{\partial M}^P, (J_2)_0^P$ и т. д. Если предположить, что равномерный показатель сходимости при приближении критических точек к точкам нарушения гладкости равен индивидуальному, то в приведенных ниже результатах можно взять знак равенства вместо оценки сверху, и тогда эти результаты дают точный формальный показатель сходимости и можно предположить, что это точный асимптотический показатель сходимости для любого алгоритма $A \in \{A\}$ и кусочно-гладкого контура $\partial\mathcal{D}$.

Введем некоторые определения. Через j обозначим нижнюю границу порядка нуля функции S^A в точках $\xi = 2k$ ($\exists k(S^A)^{(m)}(2k) = 0, m \leq j-1, (S^A)^{(j)}(2k) \neq 0$). Напомним, что для сходящихся алгоритмов $j \geq 1$. Рассмотрим функцию $\Psi_\pm(s) = 2Lt \mp \langle \xi_t^0 \vec{r} + 2n\vec{r}, \vec{v} \rangle$, где ξ_t^0 – точка разрыва первого рода функции S^A , если такая точка есть. Через $\tilde{q}$ обозначим максимальный по параметрам Lm, n, ξ_t^0 порядок нуля функции $\Psi_\pm$:

$$(5.107) \quad \Psi_\pm(s_c), \dots, \Psi_\pm^{(n_c-1)}(s_c) = 0, \quad \Psi_\pm^{(n_c)}(s_c) \neq 0, \\ \tilde{q} = \max_{\pm, s_c, Lm, n, \xi_t^0} \{n_c\}.$$

Заметим, что для контура общего положения $\tilde{q} \leq 5$.

Теперь все готово, чтобы сформулировать результат вычислений.

Пусть $\mu = \chi_{\mathcal{D}}$ и контур $\partial\mathcal{D}$ состоит из конечного числа гладких дуг, каждая из которых имеет конечное число точек уплощения конечного порядка. В этом случае справедливы следующие оценки сверху для величин $\sigma_1^T(\vec{r}_0)$, $\sigma_1^R(\vec{r}_0)$ при $d(\vec{r}_0, \partial\mathcal{D}) > 0$.

1. Если $\vec{r}_0 \in T(\partial\mathcal{D})$, то

$$\sigma_1^R(r_0) \leq \begin{cases} 1/2, & \vec{r}_0 \notin T_0, \\ 1/(p+2), & \vec{r}_0 \in \cap T(s_i^0), \quad p = \max\{p_i\}, \end{cases}$$

где p_i – порядок точки уплощения (2.8).

2. Если $\vec{r}_0 \notin T(\partial\mathcal{D})$, контур $\partial\mathcal{D}$ не имеет угловых точек и функция S^A непрерывна, а число q определено в (2.12), то

$$\sigma_1^+(\vec{r}_0) \leq \begin{cases} 1, & |\vec{r}_0| = 0 \\ \frac{4}{3}, & |\vec{r}_0| \neq 0 \end{cases} \quad (j=1), \quad \sigma_1^T(\vec{r}_0) \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{q+2} \quad (j \geq 2).$$

Если функция S^A непрерывна, но у контура $\partial\mathcal{D}$ есть угловые точки, то

$$(5.108) \quad \sigma_1^T(\vec{r}_0) \leq 1.$$

Если функция S^A имеет разрывы первого рода и $\tilde{q}$ определено в (5.107), то

$$\sigma_1^T(\vec{r}_0) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\tilde{q}+1}.$$

3. Пусть n_0 , n – минимальные целые числа такие, что $G^{(n_0)}(0) \neq 0$, $G^{(n)}(\xi_t + 0) - G^{(n)}(\xi_t - 0) \neq 0$, где ξ_t – точка нарушения гладкости функции G (5.66). Тогда

$$\sigma_1^R(\vec{r}_0) = \min\{n_0, n + \beta\}, \quad \beta \geq 1/2,$$

и для контура общего положения [25]

$$\beta = \begin{cases} 1 & (\vec{r}_0 \notin E), \\ 5/6 & (\vec{r}_0 \in E, \vec{r}_0 \notin E_0), \\ 3/4 & (r_0 \in E_0), \end{cases}$$

где E – эволюта $\partial\mathcal{D}$ и E_0 – объединение ее точек возврата.

Эти результаты показывают, что полученные в теореме 2.1 оценки точны в предположении, что не происходит сокращения главных членов асимптотик интегралов $J_{nm}[u_n]$ при суммировании по n , m . Заметим, что при восстановлении характеристической функции круга такого сокращения не происходит.

5.6. Заключительные замечания. 1. Используя результаты [25] и § 4, можно явно выписать первые члены неравномерных (индивидуальных) асимптотик интегралов $J_{nm}[u_n]$ при $\Omega \rightarrow \infty \forall \vec{r}_0 \notin \partial\mathcal{D}$. В частности, при $\vec{r}_0 \in T(\partial\mathcal{D})$, $\vec{r}_0 \notin T_0$ (см. § 4 и приложение)

$$J_{nm}[u_n] = \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{3/2} \sum_{\pm} \sum_{s_c^1} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\kappa_c + i\Omega S_{\pm}(s_c^1)} u_n(\varphi_c^1, \xi_c^1, s_c^1)}{|k(s_c^1)|^{\frac{1}{2}} |\xi_c^1 + 2n|^{1/2}} \quad (\Omega \rightarrow \infty, (n, m) \neq (0, 0)).$$

Подстановка этой формулы в ряд (3.10) в случае, когда $\mathcal{D}$ – круг и $\vec{r}_0 \notin \mathcal{D}$, показывает, что сокращения главных членов при суммировании по n, m не происходит. Результат такой подстановки (формальный ответ) удивительно хорошо описывает картину артефактов, представленную на рис. 1.

2. От полученных при доказательстве теоремы 2.1 ограничений снизу на величины j_0, j_1 , характеризующие гладкость алгоритма, можно избавиться, если учесть критические точки второго и третьего типов. Результаты, приведенные в приложении, позволяют это сделать. Соответствующие оценки для интеграла $I_1[u]$ (5.21) не рассматривались только в целях экономии места. Проводя оценки более аккуратно, можно также существенно ослабить ограничения снизу на величину d_0 , т.е. сузить область $U(\beta_1, \partial\mathcal{D})$, где оценки не рассматриваются (см. рис. 2). Наибольшую сложность представляет вопрос об ослаблении требований на κ (2.18), т.е. на скорость убывания величины S^A при $|\xi| \rightarrow \infty$. В сущности, этот вопрос упирается в необходимость ослабления условия (П.31) применимости теоремы П.3.

3. Все результаты в тексте были сформулированы для случая $\mu = \chi_{\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D}$ – область с аналитической границей $\partial\mathcal{D}$. Если воспользоваться формулой

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} e^{i\lambda\langle\vec{r}, \vec{\eta}\rangle} f(\vec{r}, \varphi) dx dy &= \frac{i}{\lambda} \int_{\partial\mathcal{D}} e^{i\lambda\langle\vec{r}, \vec{\eta}\rangle} f(\vec{r}, \varphi) [\vec{r}, \vec{\eta}] ds \\ &+ \frac{i}{\lambda} \iint_{\mathcal{D}} e^{i\lambda\langle\vec{r}, \vec{\eta}\rangle} (\langle\vec{\nabla}, \vec{\eta}\rangle f)(\vec{r}, \varphi) dx dy \quad \left(\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right), \end{aligned}$$

то все эти результаты сразу переносятся на функции $\mu \in \{\mu^\omega, I\}$ вида (1.1) (см. [19]). Требование аналитичности границы $\partial\mathcal{D}$ также можно существенно ослабить. Для применимости используемого метода при $\vec{r} \in D_{\beta_1\beta_2}^2 \cup D_{\beta_1\beta_2}^3$ достаточно предположить, что $\partial\mathcal{D}$ состоит из конечного числа дуг ограниченной, но достаточно большой гладкости и каждая из этих дуг либо прямая, либо на ней имеется только конечное число точек уплощения конечного порядка. При $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^3$ метод работает, если каждая из этих дуг – либо дуга окружности, либо функция f (2.11) на ней имеет конечное число нулей конечного порядка. Наличие угловых точек, где угол наклона касательной испытывает скачок Δ_α при $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^1 \cup D_{\beta_1\beta_2}^2$, вообще не изменяет результата, так как при выводе оценок в этой области мы сначала интегрировали по φ, ξ , а затем по s и оценка интегралов по s проводилась с помощью лемм П.1, П.2, которые, в сущности, не содержат ограничений на гладкость амплитуды. Для $\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^3$ при наличии угловых точек надо учесть граничные члены и критические точки второго типа. Для этого достаточно воспользоваться результатами из приложения, и для достаточно гладкого алгоритма получается оценка вида

$$|\Delta\mu_T^A(\vec{r}_0)| \leq C \sum_{\alpha} \frac{\Delta_\alpha}{\Omega d_T L} \quad (\vec{r}_0 \in D_{\beta_1\beta_2}^3),$$

которая согласуется с (5.108).

Приложение. Оценки осциллирующих интегралов

В этом приложении без доказательств приведены все используемые в основном тексте сведения об оценках осциллирующих интегралов ОИ. Приложение содержит шесть пунктов. Результаты пп. 1–4 доказаны в работе [25]. Результаты, приведенные в пп. 5, 6, по-видимому, являются новыми, и их доказательства будут опубликованы в другом месте.

1. Интегрирование по частям. Рассмотрим n -мерный ОИ

$$(П.1) \quad J[u] = \int_M e^{i\Omega\Phi(x)} u(x) dx \quad (x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

по параллелепипеду $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$. Квадрат нормы градиента $\nabla \Phi$ фазы Φ обозначим через G ($G = \sum_i \partial_i \Phi, \partial_i = \partial/\partial x_i$). Через A_Φ обозначим оператор, действующий по формуле

$$A_\Phi(f) = \sum_{i=1}^n \partial_i (f G^{-1} \partial_i \Phi).$$

Если в носителе функции u нет критических точек фазы Φ или в этих точках функция u имеет ноль достаточно высокого порядка, то $\forall P \geq 0$ верна *формула интегрирования по частям*

$$(П.2) \quad J[u] = J_{\partial M}^P[u] + \left(\frac{i}{\Omega}\right)^P J[A_\Phi^P u],$$

где граничный член $J_{\partial M}^P[u]$ – сумма $(n-1)$ -мерных ОИ

$$(П.3) \quad J_{\partial M}^P[u] = - \sum_{p=0}^{P-1} \left(\frac{i}{\Omega}\right)^{p+1} \sum_{k=1}^n \int_{M_k} [(A_\Phi^p u) G^{-1} \partial_k \Phi e^{i\Omega\Phi}]_{a_k}^{b_k} d\hat{x}_k.$$

В этих формулах $\partial M = \bigcup M_k$, $M_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k = a_k \text{ или } x_k = b_k\}$ и $d\hat{x}_k = dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n$.

Если производные $\partial^\alpha \Phi$ ($\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = |\alpha|$) удовлетворяют условиям $|\partial^\alpha \Phi(x)| \leq C_{|\alpha|} \lambda \lambda_1^{|\alpha|}$ ($2 \leq |\alpha| \leq N+1$), то для степеней A_Φ^N оператора A_Φ справедлива оценка

$$(П.4) \quad |(A_\Phi^N f)(x)| \leq C_{Nn} \sum_{|\alpha|=0}^N |\partial^\alpha f(x)| \sum_{p=0}^{N-|\alpha|} G(x)^{-\frac{N+p}{2}} \lambda^p \lambda_1^{N-|\alpha|+p}.$$

2. Остаточный член в методе стационарной фазы. Рассмотрим n -мерный ОИ (П.1) и будем предполагать, что все критические точки фазы Φ невырождены. Через $\langle x, y \rangle$ будем обозначать скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $|x|$ – норма элемента $x \in \mathbb{R}^n$, $d(x, U)$ – расстояние от x до множества $U \subset \mathbb{R}^n$. Критическая точка x_c ($\nabla \Phi(x_c) = 0$, $\nabla = (\partial_1 \dots \partial_n)$) называется невырожденной, если $\det \Phi_c'' \neq 0$, где $\Phi_c'' = (a_{ik}^c)$, $a_{ik}^c = \partial_i \partial_k \Phi(x_c)$ – матрица вторых производных Φ в точке x_c . Через B_c, B_0 обозначим любые константы такие, что $0 < B_0 \leq B_c \leq \|(\Phi_c'')^{-1}\|^{-1}$, где $\|A\|$ – евклидова норма матрицы A . Фаза Φ , как и амплитуда u , может зависеть от параметров $t = (t_1, \dots, t_m)$. Предполагается, что в рассматриваемой области параметров T ($t \in T$) фаза имеет конечное число невырожденных критических точек. Зависимости всех величин и оценок от t ниже явно не указываются.

Пусть фиксированы некоторые положительные числа $\delta_c \geq \delta_0 > 0$. Будем говорить, что эти числа δ_c достаточно малы, если минимум величины $G = (\nabla \Phi)^2$ в области $|x - x_c| \geq \delta_c$ достигается на одной из сфер $|x - x_c| = \delta_c$. Величины δ_c заведомо достаточно малы, если

$$B_c \delta_c \leq G(x_{\text{ex}})^{1/2}, \quad B_c \delta_c \leq \min_{x \in \partial M} G(x)^{1/2},$$

где $x_{\text{ex}} \neq x_c$ – экстремальные точки функции G ($\nabla G(x_{\text{ex}}) = 0$).

Будем предполагать, что $(u, \Phi) \in \Lambda_{\overline{\alpha}}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$. Это означает, что для u, Φ имеют место оценки

$$(П.5) \quad \begin{aligned} |\partial^\alpha \Phi(x)| &\leq C_{|\alpha|} \lambda \lambda_1^{|\alpha|} \quad (2 \leq |\alpha| \leq \overline{\alpha}), \\ |\partial^\alpha u(x)| &\leq C_{|\alpha|} \lambda_2^{|\alpha|} v_{|\alpha|}(x), \quad v_{|\alpha|} \in L^1. \end{aligned}$$

Функции h_c, Ψ_μ^c и величины $D_q^c, b_{\mu,p}^c$ определим с помощью соотношений

$$(П.6) \quad \begin{cases} h_c(x) = \Phi(x) - \Phi(x_c) - \frac{1}{2} \langle \Phi_c''(x - x_c), x - x_c \rangle, \\ \Psi_\mu^c(x) = u(x) (h_c(x))^\mu, \\ b_{\mu,p}^c = \frac{i^{p+\mu}}{\mu! p! 2^p} (\langle (\Phi_c'')^{-1} \nabla, \nabla \rangle^p \Psi_\mu^c)(x_c), \\ D_q^c = \sum_{\mu=0}^{2q} b_{\mu, \mu+q}^c. \end{cases}$$

Кроме того, будем предполагать, что

$$(П.7) \quad \begin{aligned} \|v_j\|_{L^1} &\leq \|v\|_m \quad (j \leq m), \quad |v_j(x)| \leq \overline{v}_{m,c} \quad (j \leq m, |x - x_c| \leq 2\delta_c), \\ |v_j(x)| &\leq \overline{v}_j^c \quad (|x - x_c| \leq 2\delta_c) \end{aligned}$$

и в шаре $|x - x_c| \leq 2\delta_c$

$$(П.8) \quad |\partial^\alpha \Phi(x)| \leq C_{|\alpha|} \lambda^c (\lambda_1^c)^{|\alpha|}, \quad |\partial^\alpha u(x)| \leq C_{|\alpha|} (\lambda_2^c)^{|\alpha|} v_{|\alpha|}(x).$$

ТЕОРЕМА П.1. Пусть $(u, \Phi) \in \Lambda_{\bar{\alpha}}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$, все критические точки x_c невырождены, их число $K \leq K_M$ и выполнены следующие условия:

1) величины

$$(П.9) \quad \delta_c = \delta_0 = C_n \Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \lambda^{1/2} \lambda_1 B_0$$

достаточно малы и $d(x_c, \partial M) \geq 2\delta_0$, $\delta_0 \leq \lambda_1^{-1} < 1$;

2) существуют не зависящие от Ω константы θ_i такие, что

$$\|v\|_{\bar{\alpha}} \leq C\Omega^{\theta_1}, \quad \bar{v}_{\bar{\alpha},c} \leq C\Omega^{\theta_2}, \quad \lambda \leq C\Omega^{\theta_3}, \quad K_M \leq C\Omega^{\theta_4};$$

3) величины λ , λ_1 , λ_2 , Ω , B_c удовлетворяют условиям $\lambda_1 \geq 1$, $\lambda\Omega \geq 1$, $\Omega \geq 1$ и

$$(П.10) \quad \lambda^5 \lambda_1^{12} B_0^{-6} \leq C\Omega^{1-\varepsilon_2}, \quad \lambda_c^2 (\bar{\lambda}_1^c)^2 B_c^{-3} \leq C\Omega,$$

в которых $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 > 0$, $\bar{\lambda}_1^c = \max\{\lambda_1^c, \lambda_2^c\}$;

4) целые числа P , N , k , r определяются из соотношений

$$\begin{aligned} P &= [(T + \theta_1)\varepsilon_1^{-1}] + 1, & N &= 3q, & r &= 2q, \\ q &= [(T + \theta_2 + \theta_4)\varepsilon_2^{-1}] + 1, & k &= [(2\theta_3 + 2 + \varepsilon_2)(T + \theta_2 + \theta_4)(\varepsilon_2\varepsilon_1)^{-1}] + 1, \end{aligned}$$

где T – любое фиксированное число и $[a]$ – целая часть числа a .

Тогда для любых таких ε_i , θ_i , T и любого Q такого, что

$$Q \leq [(1/3)(k-1)], \quad Q \leq [(1/2)(r-1)] \quad \text{при} \quad \bar{\alpha} \geq \max\{P+1, 3q+1, 2k+n+1\},$$

ОИ $J[u]$ (П.1) можно представить в виде

$$(П.11) \quad J[u] = \sum_{x_c \in M} J_c^Q + \Delta J_{QT} + J_{\partial M}^P[u].$$

В этом представлении

$$(П.12) \quad J_c^Q = \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}\kappa_c + i\Omega\Phi(x_c)} \sum_{q=0}^Q \frac{D_q^c}{\Omega^q},$$

где κ_c – индекс (разность между числом положительных и числом отрицательных собственных значений) матрицы Φ_c'' . Граничный член $J_{\partial M}^P[u]$ задается соотношением (П.3), и имеют место оценки

(П.13)

$$|\Delta J_{QT}| \leq C_n(Q, T, \varepsilon_i, \theta_i) \left[\Omega^{-T} + \sum_{x_c} \frac{\bar{v}_{2k-2}^c}{\Omega^{n/2} |\det \Phi_c''|^{1/2}} \left(\frac{(\lambda^c)^2 (\bar{\lambda}_1^c)^6}{B_c^3 \Omega} \right)^{Q+1} \right],$$

(П.14)

$$|D_q^c| \leq C_{nq} \bar{v}_{6q}^c \left(\frac{(\lambda^c)^2 (\bar{\lambda}_1^c)^6}{B_c^3} \right)^q.$$

Величина

$$(P.15) \quad J_c^0 = \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{e^{i\Omega\Phi(x_c) + \frac{i\pi}{4}\nu_c}}{|\det \Phi_c''|^{1/2}} u(x_c)$$

называется *главным критическим вкладом точки* x_c , и при $u(x_c) \neq 0$ величины J_c^0 определяют асимптотику ОИ $J[u]$ при $\Omega \rightarrow \infty$.

В работе [25] для одномерного случая получен явный вид разложения $J[u]$ и для вырожденных критических точек (аналог теоремы П.1).

Пусть в критической точке x_c $\Phi^{(1)}(x_c) = 0, \dots, \Phi^{(\nu_c-1)}(x_c) = 0, \Phi^{(\nu_c)}(x_c) \neq 0$ и $n = 1$. Тогда легко посчитать порядок главного члена асимптотики критического вклада $J[u]$ точки x_c при $\Omega \rightarrow \infty$. Предположим, что $n = 1, u^{(p)}(x_c) = 0, p \leq k-1, u^{(k)}(x_c) \neq 0$, тогда при нечетном ν_c

$$(P.16) \quad J_c^Q = C_{k,\nu_c}[u, \Phi] \Omega^{-\frac{k+1}{\nu_c}} \quad (\Omega \rightarrow \infty, n = 1).$$

Если ν_c – четное число и $u^{(p)}(x_c) = 0$ ($p \leq 2j-2$) или $u^{(2j)}(x_c) \neq 0$, то

$$(P.17) \quad J_c^Q = C_{j,\nu_c}[u, \Phi] \Omega^{-\frac{2j+1}{\nu_c}} \quad (\Omega \rightarrow \infty, n = 1).$$

3. Равномерные оценки одномерных ОИ. Рассмотрим одномерный ОИ

$$(P.18) \quad J[u] = \int_a^b u e^{i\Omega\Phi(x)} dx \quad (x \in \mathbb{R}^1),$$

в котором фаза и амплитуда могут зависеть от m -мерного параметра $t = (t_1, \dots, t_m)$. Предполагается, что на интервале $[a, b]$ фаза имеет конечное число $\mathcal{N}$ критических точек x_c конечной кратности:

$$\Phi^{(1)}(x_c) = 0, \dots, \Phi^{(\nu_c-1)}(x_c) = 0, \Phi^{(\nu_c)}(x_c) \neq 0, \quad \nu_c \leq \nu,$$

и функция Φ по крайней мере $\nu + 1$ раз непрерывно дифференцируема. Относительно амплитуды u предполагается, что это ограниченная кусочно-дифференцируемая функция и $u^{(1)} \in L^1, \sum_n |\Delta_n| < \infty$, где $\Delta_n = u(x_n + 0) - u(x_n - 0)$, x_n – точка разрыва первого рода. В оценках используются следующие обозначения: $|u(x)| \leq \bar{u}$, $|u(x)| \leq \bar{u}_c$ ($|x - x_0| \leq \delta_c, \delta_c > 0$), $\sum_n^c |\Delta_n| = \sum_n |\Delta_n|$ ($|x_n - x_c| < \delta_c$).

В основном тексте для оценки одномерных ОИ используются две леммы, доказанные в [25] и являющиеся следствием результатов, изложенных в работах [32], [33].

ЛЕММА П.1. Пусть при $t \in V$ выполнены условия 1–3.

1. Все критические точки $x_c \equiv x_c(t)$ невырождены ($\Phi^{(2)}(x_c) \neq 0$) и $\Phi^{(2)} \in L^1$.
2. $\delta_c \geq \delta_0 > 0$ – любые положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$(P.19) \quad \delta_c \leq \Delta_c \leq \frac{1}{4} |\Phi^{(2)}(x_c)| (\bar{\Phi}_c^{(3)}(x))^{-1} \quad (|\Phi^{(3)}(x)| \leq \bar{\Phi}_c^{(3)} \quad (|x - x_c| \leq \delta_c)).$$

3. При $x \in \text{supp } u$ $|\Phi^{(1)}(x)| \geq |\Psi(x)|$. Функция Ψ имеет по крайней мере две непрерывные производные и

$$(П.20) \quad \Psi_{\Delta}(t) = \min_{x_{\text{ex}}} \{|\Psi(x_{\text{ex}})|, |\Psi(a)|, |\Psi(b)|\},$$

где x_{ex} – экстремальные точки функции Ψ ($\Psi^{(1)}(x_{\text{ex}}) = 0$) и $x_{\text{ex}} \neq x_c$.
Тогда при $t \in V$

$$(П.21) \quad |J[u]| \leq C_1 \sum_{x_c} \frac{A_c[u]}{|\Omega \Phi^{(2)}(x_c)|^{1/2}} + C_2 \frac{A[u, \Phi]}{\Omega}$$

и в этой оценке

$$(П.22) \quad \begin{aligned} A_c[u] &\leq |u(x_c)| + 4\delta_c \overline{u^{(1)}} + \sum_n^c |\Delta_n|, \\ A[u, \Phi] &\leq \left(\overline{u} + \|\overline{u^{(1)}}\|_{L^1} + \sum_n |\Delta_n| \right) (\mathcal{N} + 1) \Phi_1^{-1}, \end{aligned}$$

а в качестве Φ_1 можно взять

$$(П.23) \quad \Phi_1 = \max_{x_c} \left\{ |\Phi^{(2)}(x_c)| \delta_c, \frac{(\Psi^{(1)}(x_c) \Delta_c)^2}{\|\Phi^{(2)}\|_{L^1}}, \frac{\Psi_{\Delta}(t)^2}{\|\Phi^{(2)}\|_{L^1}} \right\}.$$

Лемма П.1 применяется, когда значения параметра t достаточно далеки от каустики. Напомним, что каустикой называется множество значений параметров, при которых фаза Φ имеет вырожденные критические точки.

Для оценки в окрестности каустики используется лемма П.2. Фиксируем некоторое значение параметров $t = t_0$ и введем обозначение $\Phi_0(x) = \Phi(x, t_0)$. Пусть x_{0c} – критические точки функции Φ_0 ,

$$\begin{aligned} |\Phi_0^{(1)}(x)| &\geq |\Psi(x)| \quad (x \in \text{supp } u), \\ \Psi(x_{0c}) &= 0, \quad \dots, \quad \Psi^{(\nu_{0c}-2)}(x_{0c}) = 0, \quad \Psi^{(\nu_{0c}-1)}(x_{0c}) \neq 0 \end{aligned}$$

и эти условия выполняются при $\Psi = \Phi^{(1)}$.

Через x_{ex} снова обозначаются экстремальные точки функции Ψ ($\Psi^{(1)}(x_{\text{ex}}) = 0$, $x_{\text{ex}} \neq x_{0c}$) и величина Ψ_{Δ} определяется тем же равенством (П.20) при $t = t_0$.

ЛЕММА П.2. Пусть в окрестности U_0 точки t_0 фаза Φ имеет по крайней мере $\nu_{0c} + 1$ производную по x , эти производные дифференцируем по t_k , ($\partial_k \equiv \partial/\partial t_k$) и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m |\partial_k \Phi^{(\nu_{0c})}(x, t)| &\leq D_{0c}^{\nu} \quad (|x - x_{0c}| \leq \delta_{0c}, t \in U_0), \\ \sum_{k=1}^m |\partial_k \Phi^{(1)}(x, t)| &\leq D^1 \quad (t \in U_0). \end{aligned}$$

Пусть $\delta_{0c} > 0$ – любые числа такие, что

$$(П.24) \quad \delta_{0c} \leq \Delta_{0c} \leq \frac{1}{4} \frac{|\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|}{(\Phi_0^{(\nu_{0c}+1)})_c} \quad (|\Phi_0^{(\nu_{0c}+1)}(x)| \leq (\Phi^{(\nu_{0c}+1)})_c, |x - x_{0c}| \leq \delta_{0c}),$$

и область U_0 такова, что при $t \in U_0$

$$(П.25) \quad \begin{aligned} D_{0c}^\nu |t - t_0| &\leq \frac{1}{4} |\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|, \\ D^1 |t - t_0| &\leq \frac{1}{4} \tilde{\Phi}_{01} \quad \left(|t| = \sqrt{t_1^2 + \dots + t_m^2} \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{\Phi}_{01}$ – любая величина, удовлетворяющая неравенству

$$\tilde{\Phi}_{01} \leq \min_{x_{0c}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\Psi^{(\nu_{0c}-1)}(x_{0c})| \delta_{0c}^{\nu_{0c}-1}}{(\nu_{0c}-1)!}, \Psi_\Delta \right\}.$$

Тогда при $t \in U_0$ имеет место оценка

$$(П.26) \quad |J[u]| \leq \sum_{x_{0c}} C(\nu_{0c}) \frac{A_{0c}[u]}{|\Omega \Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})|^{1/\nu_{0c}}} + C \frac{A[u, \Phi]}{\Omega},$$

в которой

$$(П.27) \quad \begin{aligned} A_{0c}[u] &\leq |u(x_{0c})| + 4\delta_{0c}(\overline{u^{(1)}})_{0c} + \sum_n {}^{0c}|\Delta_n|, \\ A[u, \Phi] &\leq \left(\overline{u} + \|\overline{u^{(1)}}\|_{L^1} + \sum_n |\Delta_n| \right) (\mathcal{N} + 1) \Phi_{01}^{-1}, \end{aligned}$$

а в качестве Φ_{01} можно взять любую величину такую, что

$$(П.28) \quad \Phi_{01} \leq \min_{x_{0c}} \left\{ |\Phi_0^{(\nu_{0c})}(x_{0c})| \delta_{0c}^{\nu_{0c}-1}, \frac{(|\Psi^{(\nu_{0c}-1)}(x_{0c})| (\Delta_{0c})^{\nu_{0c}-1})^2}{\|\Phi_0^{(2)}\|_{L^1}}, \frac{\Psi_\Delta^2}{\|\Phi_0^{(2)}\|_{L^1}} \right\}.$$

Необходимую для применения лемм П.1, П.2 информацию о локализации критических точек дает доказанная в [25]

ЛЕММА П.3. Пусть трансцендентное или алгебраическое уравнение $f(x) = 0$ при $|x| \leq b$ приведено к виду

$$x = a + R(x)$$

и $|R(x)| \leq A|x|^\sigma$ при $\sigma > 1$. Тогда

1. Если при некотором $\beta \leq 1/2$ выполняются условия

$$a \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{A} \right)^{1/(\sigma-1)}, \quad |a| \leq (1-\beta)b,$$

то существует по крайней мере одно “близкое” к а решение x_0 уравнения $f(x) = 0$, и для всех “близких” к а решений

$$\frac{2}{3}a \leq |x_0| \leq 2|a|, \quad |x - a| \leq A(2|a|)^\sigma.$$

Кроме того, возможно, имеются и “далекие” от а решения, для которых эти оценки не выполняются, и для них

$$|x_0| \geq \left(\frac{1}{2A}\right)^{\sigma-1}.$$

2. Если $|a| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{A}\right)^{1/(\sigma-1)}$, то для всех решений, если они существуют, верна оценка

$$|x_0| \geq \frac{1}{3} \left(\frac{\beta}{A}\right)^{1/(\sigma-1)}.$$

4. Ошибка регуляризации. Полный анализ ошибки регуляризации $\Delta\mu_R^A(\vec{r}_0)$ (1.26) проведен в работе [25]. В основном тексте используется простейшее следствие из результатов [25], которое мы сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА П.4. Пусть функция $G(\xi) = \frac{1}{2}R^A(\lambda)(\hat{\Pi}(\lambda) + \hat{\Pi}(-\lambda))$ ($\xi = \lambda/\Omega$) непрерывна вместе с производными до N -го порядка включительно и $G^{(N+1)} \in L^1$. Если при этом $G^{(n)}(0) = 0$ ($n = 1, \dots, N$) и $d(\vec{r}_0, \partial\mathcal{D}) \geq d_0$, то

$$(П.29) \quad \left| \Delta\mu_R^A(r_0) \right| \leq \frac{\mathcal{L} \|G^{(N+1)}\|_{L^1}}{\pi^2 d_0 (\Omega d_0)^N}.$$

5. Специальный класс двумерных ОИ. Рассматриваемые специальные двумерные ОИ по полупространству – это интегралы вида

$$(П.30) \quad J_2[u] = \int_0^\infty d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\Omega\Phi(x)} u(x),$$

$$\Phi(x) = f(\varphi) + \xi g(\varphi) \quad (x = (x_1 x_2) = (\varphi, \xi)).$$

Будем говорить, что $J_2 \in \{J_2\}$, если выполняются условия 1, 2, 3.

1. Амплитуда u – гладкая функция с компактным носителем, периодическая по φ с периодом 2π :

$$u(\varphi, \xi) = 0 \quad (\xi \geq \xi_H),$$

$$|\partial^2 u(x)| \leq C_{|\alpha|} \lambda_2^{|\alpha|} v_{|\alpha|}(x), \quad \lambda_1 \geq 1,$$

$$\|v_{|\alpha|}\| \leq C \Omega^{\theta_1}, \quad v_{|\alpha|}(x) \leq C \Omega^{\theta_2}.$$

2. Функции f, g – гладкие периодические с периодом 2π и

$$|f^{(n)}(\varphi)| \leq C_n \bar{f} \lambda_f^n \quad (n \geq 2), \quad |g^{(n)}(\varphi)| \leq C_n \bar{g} \lambda_g^n \quad (n \geq 1), \quad \lambda_f \geq 1, \quad \lambda_g \geq 1,$$

$$\bar{f} + \bar{g} + \xi_H \bar{g} \leq C \Omega^{\theta_3}.$$

3. Критические точки $x_c = (\varphi_c, \xi_c)$ фазы Φ невырождены, т.е.

$$|g^{(1)}(\varphi_c)| \geq g_1 > 0, \quad g_1 \leq 1,$$

где φ_c определяется из условия $g(\varphi_c) = 0$.

В этом случае имеет место первая оценка (П.5) и

$$\lambda = \max\{f + \xi_H \bar{g}, \bar{g}\}, \quad \lambda_1 = \max\{\lambda_f, \lambda_g\}.$$

Через φ_{ex} обозначим экстремальные точки функции g ($g^{(1)}(\varphi_{\text{ex}}) = 0$) и предположим, что $|g(\varphi_{\text{ex}})| \geq \tilde{g} > 0$.

Критические точки $x_c = (\varphi_c, \xi_c)$ определяются из условий

$$g(\varphi_c) = 0, \quad \xi_c = -f_c^{(1)}/g_c^{(1)}.$$

Здесь и ниже для функций f от φ используется обозначение $f_c = f(\varphi_c)$.

Непосредственно проверяется, что $\det \Phi_c'' = -(g_c^{(1)})^2$, $\kappa_c = 0$,

$$\Phi_c'' = \begin{pmatrix} f_c^{(2)} + \xi_c g_c^{(2)} & g_c^{(1)} \\ g_c^{(1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Phi_c'')^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (g_c^{(1)})^{-1} \\ (g_c^{(1)})^{-1} & -(g_c^{(1)})^{-2}(f_c^{(2)} + \xi_c g_c^{(2)}) \end{pmatrix}.$$

Так как фаза Φ может зависеть от дополнительных параметров, то при их изменении критические значения могут приближаться к нулю и пересекать границу области интегрирования. Введем величину $t^0 = C\Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} g_1^{-2} \lambda^{3/2} \lambda_1^3$. Если $|\xi_c| > t^0$ ($\forall x_c$), то для анализа интеграла (П.30) можно применить теорему П.1. Так как в рассматриваемом случае $B_c = B_0 = Cg_1^2 \lambda^{-1} \lambda_2^{-2}$, то первое из условий (П.10) приобретает вид

$$\lambda \leq C\Omega^{\frac{1-\varepsilon_2}{11}} \lambda_1^{-24/11} g_1^{-12/11}.$$

Это условие ограничивает возможный рост λ при увеличении Ω .

Если выполняется дополнительное предположение $g_c^{(2)} = 0$, то это условие можно ослабить и имеет место

ТЕОРЕМА П.2. Пусть $J_2 \in \{J_2\}$, $|\xi_c| \geq t^0$, $g_c^{(2)} = 0$ и выполнены условия

$$(П.31) \quad \begin{aligned} \lambda &\leq C\Omega^{\frac{1-\varepsilon_2}{5}} \lambda_1^{-\frac{12}{5}} g_1^{6/5}, & \lambda_2^{-1} &\geq t^0, & \Omega &\geq 2, \\ \tilde{g} &\geq C\Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \lambda_1^{1/2} \lambda & (t^0 &= C\Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} g_1^{-2} \lambda^{3/2} \lambda_1^3), \end{aligned}$$

и, кроме того, при $\bar{\lambda}_1 = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$

$$(П.32) \quad \begin{aligned} \lambda \lambda_1^2 (\bar{\lambda}_1)^2 g_1^{-2} &\leq C\Omega, & g_1 \lambda_1^2 &\leq C\lambda, \\ \lambda &\geq C\Omega^{-1+\varepsilon_3}, & \bar{g} \lambda^2 g_1^{-1} &\leq C\Omega^{\theta_3}. \end{aligned}$$

Тогда для всех $(\theta_i, \varepsilon_i, T, Q)$ таких, что $0 < \varepsilon_i \leq 1$, $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$, $T \geq 1$, $Q \geq 0$ и выполняются условия (П.31), (П.32), при $P = P(\varepsilon_i, \theta_i) \geq 1$ имеет место равенство

$$(П.33) \quad J_2[u] = \sum_{x_c} (J_2)_c^Q + (J_2)_0^P + (\Delta J_2)_{QT},$$

в котором суммирование ведется по критическим точкам $x_c = (\varphi_c, \xi_c)$, $\xi_c \geq 0$, и

$$(J_2)_c^Q = \frac{2\pi}{\Omega} \cdot \frac{e^{i\Omega\Phi(x_c)}}{|g_c^{(1)}|} \sum_{q=0}^Q \frac{D_q^c}{\Omega^q}, \quad (П.34)$$

$$D_q^c = \sum_{\mu=0}^{q/2} b_{\mu, \mu+q}^c, \quad |D_q^c| \leq C_q \bar{v}_{3q} \left(\frac{\lambda \lambda_1^2 (\bar{\lambda}_1)^2}{g_1^2} \right)^q,$$

где величины $b_{\mu, p}^c$ определены в (П.6). Граничный член $(J_2)_0^P$ имеет вид

$$(J_2)_0^P = \sum_{p=0}^{P-1} \left(\frac{i}{\Omega} \right)^{p+1} \int_0^{2\pi} e^{i\Omega f} \frac{g}{(f^{(1)})^2 + g^2} A_{\Phi}^p(u) \Big|_{\xi=0} d\varphi, \quad (П.35)$$

и для остаточного члена $(\Delta J_2)_{QT}$ выполняется оценка

$$(\Delta J_2)_{QT} \leq C_{QT}(\varepsilon_i, \theta_i) \left[\left(\frac{\lambda \lambda_1^2 (\bar{\lambda}_1)^2}{g_1^2 \Omega} \right)^{Q+1} \frac{B}{\Omega g_1} + \frac{1}{\Omega^T} \right]. \quad (П.36)$$

При этом предполагается, что

$$|v_{|\alpha|}(x_c)| \leq B. \quad (П.37)$$

Чтобы сформулировать результаты для случая, когда критические точки $x_c = (\varphi_c, \xi_c)$ могут пересекать границу $\xi = 0$ области интегрирования, введем еще ряд определений. Критические точки $x_c = (\varphi_c, \xi_c)$ будем делить на *близкие к границе* — x_{c1} , и *далекие от нее* — x_{c2} , и для них соответственно

$$|\xi_{c1}| \leq t_0, \quad |\xi_{c2}| \geq t_0, \quad t_0 = C \Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \lambda^{5/2} (\bar{g})^3 \lambda_1^7 g_1^{-7} > t^0. \quad (П.38)$$

Пусть $\mathcal{N}_1$ — число близких, а $\mathcal{N}_2$ — число далеких от границы критических точек. Введем число n_0 , характеризующее гладкость продолженной нулем в область $\xi < 0$ амплитуды u , и будем предполагать, что

$$\partial_{\xi}^n u(\varphi, 0) = 0 \quad (n \leq n_0 - 1), \quad \partial_{\xi}^{n_0} u(\varphi, 0) \neq 0, \quad (П.39)$$

$$\bar{n}_0 = \begin{cases} n_0 & (n_0 \geq 2), \\ 2 & (n_0 \leq 2). \end{cases}$$

Будем считать, что кроме (П.37) выполняются оценки

$$|v_{|\alpha|}(\varphi_{c1}, 0)| \leq B_0, \quad |v_{|\alpha|}(\varphi, 0)| \leq B_1 \quad (|\varphi - \varphi_{c1}| \leq 2t^0). \quad (П.40)$$

При формулировке и доказательстве теоремы П.3 используется несимметричное по переменным φ, ξ разбиение единицы

$$\tilde{\rho}(\varphi, \xi) = 1 - \sum_{x_c} \omega \left(\frac{\varphi - \varphi_c}{\delta_c^{\varphi}} \right) \omega \left(\frac{\xi - \xi_c}{\delta_c^{\xi}} \right),$$

в котором ω — гладкая функция ($\omega \in C_0^\infty$) такая, что $\omega(t) = 1$ ($|t| \leq 1$), $\omega(t) = 0$ ($|t| \geq 2$), и при этом

$$(П.41) \quad \delta_{c1}^\varphi = \delta_{c2}^\varphi = \delta_{c2}^\xi = \delta_0 = Ct^0, \quad \delta_{c1}^\xi = \delta_1 = C \frac{g_1^2}{\lambda^2 \lambda_1^5}.$$

В окрестности $|\varphi - \varphi_c| \leq 2\delta_0$ вместо φ можно ввести переменную

$$y = g(\varphi) \Leftrightarrow \varphi = \varphi(y).$$

Функции от переменной $y - \rho_{c1}$, F , S определяются следующим образом:

$$(П.42) \quad \rho_{c1}(y) = \omega \left(\frac{\varphi(y) - \varphi_{c1}}{\delta_0} \right), \quad F(y) = f(\varphi(y)), \quad S(y) = F(y) - F(0).$$

Через $\mathcal{K}[fe^{i\Omega S}]$ обозначается ОИ в смысле главного значения.

$$(П.43) \quad \mathcal{K}[fe^{i\Omega S}] = \int_0^\infty y^{-1} [f(y)e^{i\Omega S(y)} - f(-y)e^{i\Omega S(-y)}] dy.$$

ТЕОРЕМА П.3. Пусть $J_2 \in \{J_2\}$, выполняются условия (П.37)–(П.40) и, кроме того,

$$\begin{aligned} \lambda &\leq C\Omega^{-\frac{1-\varepsilon_2}{11}} \lambda_1^{-\frac{24}{11}} g_1^{\frac{12}{11}}, & \lambda &\leq C\Omega^{-\frac{1-\varepsilon_1}{9}} g_1^{\frac{16}{9}} \lambda_1^{-8/3} (\bar{g})^{-2/3}, \\ \bar{g}\lambda_2 g_1^{-1} &\leq C\Omega^{\theta_3}, & \Omega\lambda &\geq 1, & \Omega &\geq 2, & \lambda &\geq C\Omega^{-1+\varepsilon_3}, \\ \tilde{g} &\geq C\Omega^{-\frac{1-\varepsilon_2}{2}} \lambda_1^{1/2} \lambda, & \lambda_2^{-1} &\geq C\Omega^{-\rho} \lambda_1^3 g_1^{-7/12} ((\bar{g})^3 + \lambda^{-1/4}). \end{aligned}$$

Тогда для любых ε_i , θ_i и любых $\sigma > 0$, $\rho > 0$ таких, что

$$\begin{aligned} \sigma &< \frac{1}{4}(1 + \varepsilon_1), & \sigma &< \frac{1 - \varepsilon_1}{2} - \frac{5}{22}(1 - \varepsilon_2), & \varepsilon_1 &\leq \varepsilon_2, & 0 < \varepsilon_i &\leq 1, \\ \rho &\leq \min \left\{ \frac{1}{11} + \frac{5\varepsilon_2}{66}, \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon_1}{4} - \sigma, \frac{3}{22} - \frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{5\varepsilon_2}{44}, \frac{3}{11} - \frac{\varepsilon_1}{2}, \sigma + \frac{5\varepsilon_2}{22} \right\}, \end{aligned}$$

и любых Q , T при $N = N(T, \varepsilon_i, \theta_i, \sigma)$, $P = P(T, \varepsilon_i, \theta_i)$ справедливо равенство

$$(П.44) \quad \begin{aligned} J_2[u] &= \sum_{x_{c1}} \frac{i}{\Omega} e^{i\Omega f(\varphi_{c1})} \sum_{n=n_0}^{N-1} \frac{\partial_\xi^n u(\varphi_{c1}, 0)}{n!} \xi_{c1}^n [\mathcal{K}_{c1} - i\pi] \\ &\quad + \sum_{x_{c2}} (J_2)_{c2}^Q + (J_2)_0^P + \Delta_{QT}(J_2), \end{aligned}$$

в котором

$$(П.45) \quad \mathcal{K}_{c1} \equiv \mathcal{K}[\rho_{c1} e^{i\Omega S}]$$

и функции ρ_{c1} , S определены в (П.42). Граничный член

$$(П.46) \quad (J_2)_0^P = \sum_{p=n_0}^{P-1} \left(\frac{i}{\Omega} \right)^{p+1} \int_0^{2\pi} e^{i\Omega f(\varphi)} \frac{g}{(f^{(1)})^2 + g^2} (A_{\Phi}^p(\tilde{\rho}u))(\varphi, 0) d\varphi,$$

для $\Delta_{QT}(J_2)$ выполняется оценка

$$(П.47) \quad |\Delta_{QT}(J_2)| \leq \frac{C_{QT}(\varepsilon_i, \theta_i, \sigma) \mathcal{N}_2 B}{\Omega g_1} \left(\frac{\lambda^5 \lambda_1^6 (\bar{\lambda}_1)^6}{g_1^6 \Omega} \right)^{Q+1} + \frac{C_T(\varepsilon_i, \theta_i)}{\Omega^T} + \Delta^{n_0} J_2$$

и по определению

$$(П.48) \quad \Delta^{n_0} J_2 = C_N \mathcal{N}_1 \left[\frac{B_0 (\ln \Omega) E_1}{\Omega^{2+\frac{1-\varepsilon_1}{2}(\bar{n}_0-2)}} + \frac{B_1 E_2}{\Omega^{n_0+\frac{3}{2}-\frac{\varepsilon_1}{2}}} + \frac{B_0 E_3 \Omega^{-\sigma \max\{0, n_0-1\}}}{\Omega^{\frac{3+\varepsilon_1}{2}}} + \frac{B_0 E_4}{\Omega^{1+\frac{1-\varepsilon_1}{2}(n_0+1)}} \right],$$

где в качестве констант $E_i = E_i(n_0, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \bar{g}, g_1)$ можно взять

$$(П.49) \quad \begin{aligned} E_1 &= \frac{\lambda(\bar{g})^3 \lambda_1^6 \lambda_2^{2\bar{n}_0+2}}{g_1^6} \left(\frac{\lambda^{5/2}(\bar{g})^3 \lambda_1^7}{g_1} \right)^{\bar{n}_0-2}, & E_2 &= \frac{\bar{g} \lambda_1^3 \lambda^{3/2} \lambda_2^{2n_0+1}}{g_1^2} \left(\frac{\bar{g} \lambda_1^2}{g_1^2} \right)^{n_0+2}, \\ E_3 &= \frac{\bar{g} \lambda_2}{g_1 \lambda^{3/2} \lambda_1}, & E_4 &= \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left(\frac{\bar{g}^3 \lambda^{5/2} \lambda_1^7 \lambda_2^2}{g_1^6} \right)^{n_0+1}. \end{aligned}$$

Граничный член $(J_2)_0^P$ допускает следующую оценку:

$$(П.50) \quad (J_2)_0^P \leq \frac{C_P B_1}{\Omega^{n_0(1+\varepsilon_1)}} \frac{g_1}{\Omega^{\frac{1+\varepsilon_1}{2}} \lambda^{3/2} \lambda_1^3}.$$

Если ввести величину

$$(П.51) \quad y_0 = \frac{2}{3} g_{c1}^{(1)} \delta_0$$

(значение δ_0 определено в (П.41)), то

$$\rho_{c1}(y) = \begin{cases} 1 & (|y| \leq y_0), \\ 0 & (|y| \geq 6y_0), \end{cases} \quad 0 \leq \rho(y) \leq 1,$$

и величина $\mathcal{K}[\rho_{c1} e^{i\Omega S}]$ (П.45) допускает следующую оценку:

$$(П.52) \quad \mathcal{K}[\rho_{c1} e^{i\Omega S}] \leq C \ln \Omega.$$

Если $g_c^{(2)} = 0$, то условия теоремы П.3 можно ослабить аналогично тому, как это было сделано при переходе от теоремы П.1 к теореме П.2, и тогда вместо теоремы П.3 получаем теорему П.4.

ТЕОРЕМА П.4. Пусть $J_2 \in \{J_2\}$, $g_c^{(2)} = 0$ и выполняются условия (П.37)–(П.40). Пусть, кроме того,

$$(П.53) \quad \begin{aligned} \lambda &\leq C\Omega^{\frac{1-\varepsilon_2}{5}} g_1^{6/5} \lambda_1^{-\frac{12}{5}}, & \Omega\lambda &\geq 1, & \Omega &\geq 2, \\ \tilde{g} &\geq C\Omega^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \lambda_1^{1/2} \lambda, \\ \lambda_2^{-1} &\geq C\Omega^{-\rho} \lambda_1^4 g_1^{-3} (1 + (\tilde{g})^4 + (\tilde{g})^{1/2} \lambda^{-1/4}) \end{aligned}$$

и ε_i, σ – любые такие, что выполняются условия (П.53) и

$$(П.54) \quad \begin{aligned} \varepsilon_2 > \varepsilon_1, \quad 0 \leq \varepsilon_i < 1, \quad 0 < \sigma < \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}, \quad \sigma < \frac{1 + \varepsilon_1}{4}, \\ \rho = \min \left\{ \frac{1}{5} + \frac{3\varepsilon_2}{10} - \frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{1 + \varepsilon_1}{4} - \sigma, \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{4}, \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} - \sigma \right\}. \end{aligned}$$

Тогда $\forall Q, T, \theta_i$ при $N = N(T, \varepsilon_i, \theta_i, \sigma)$, $P = P(T, \varepsilon_i, \theta_i)$ имеет место равенство (П.44), в котором

$$(П.55) \quad |\Delta_{QT}(J_2)| \leq \frac{C_{QT}(\varepsilon_i, \theta_i, \sigma) \mathcal{A}_2 B}{\Omega g_1} \left(\frac{\lambda \lambda_1^2 (\bar{\lambda}_1)^2}{g_1^2 \Omega} \right)^{Q+1} + \frac{C_T(\varepsilon_i, \theta_i)}{\Omega^T} + \Delta^{n_0} J_2$$

(величина $\Delta^{n_0} J_2$ определена в (П.48)).

Наряду с интегралами $J_2 \in \{J_2\}$ (П.30) рассмотрим интегралы $\tilde{J} \in \{\tilde{J}_2\}$ по всей прямой

$$(П.56) \quad \tilde{J}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^{2\pi} u e^{i\Omega\Phi} d\varphi.$$

Предполагается, что выполнены те же условия на u, Φ , что и при определении класса $\{J_2\}$, точка $\xi = 0$ – единственная точка нарушения гладкости амплитуды u , и в этой точке производные $\partial_\xi^n u(\varphi, 0)$ непрерывны при $n \leq n_0$ и

$$(П.57) \quad (\Delta_0 \partial_\xi^{n_0} u)(\varphi) \neq 0, \quad \text{где} \quad (\Delta_0 f)(\varphi) \equiv f(\varphi_1 + 0) - f(\varphi_1 - 0), \quad f = f(\varphi, \xi).$$

Функцию $G_{(\alpha)}$ от y определим из формулы интегрирования сложной функции

$$\begin{aligned} (e^{i\Omega F(y)})^{(j)} &= \sum_{(\alpha)} C_{(\alpha)} (i\Omega)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_j} e^{i\Omega F(y)} G_{(\alpha)}(y), \\ G_{(\alpha)}(y) &= (F^{(1)}(y))^{\alpha_1} \dots (F^{(j)}(y))^{\alpha_j}. \end{aligned}$$

В этой формуле $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$ и суммирование производится по всем наборам целых чисел $\alpha_i \geq 0$ таким, что $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + j\alpha_j = j$.

Введем величину

$$T_j(\Omega) = \sum_{(\alpha)} C_{(\alpha)} (i\Omega)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_j} G_{(\alpha)}(0)$$

и функции

$$h_n^{\text{sym}}(y) = \frac{\partial_\xi^n u(\varphi, +0) + \partial_\xi^n u(\varphi, -0)}{|g_1(\varphi)|}, \quad h_n^{\text{ant}}(y) = \frac{(\Delta_0 \partial_\xi^n u)(\varphi)}{g_1(\varphi)} \quad (\varphi = \varphi(y)).$$

ТЕОРЕМА П.5. Пусть $\tilde{J}_2 \in \{\tilde{J}\}$ и выполнены условия (П.57). Тогда при тех же условиях, что и в теореме П.3 (теореме П.4) имеет место равенство

$$(П.58) \quad \tilde{J}_2[u] = \sum_{x_{c1}} \tilde{J}_{c1,N}^0 + \sum_{x_{c2}} (\tilde{J}_2)_{c2}^Q + (\tilde{J}_2)_0^P + \Delta_{QT}(\tilde{J}_2),$$

в котором $(\tilde{J}_2)_{c2}^Q$ – критический вклад далеких от $\xi = 0$ критических точек (П.12),

$$(П.59) \quad (\tilde{J}_2)_0^P = \sum_{n=n_0}^{P-1} \left(\frac{i}{\Omega}\right)^{p+1} \int_0^\infty e^{i\Omega f(\varphi)} \frac{g(\varphi)}{(f^{(1)})^2 + g^2} (\Delta_0 A_{\Phi}^p(\tilde{\rho}u))(\varphi) d\varphi$$

и для величины $\Delta_{QT}(\tilde{J}_2)$ справедлива оценка (П.47) (или (П.55) – при $g_c^{(2)} = 0$), в которой надо положить $E_1 = 0$ (П.48). Вклад $J_{c1,N}^0$ близких к $\xi = 0$ критических точек x_{c1} определяется соотношениями

$$(П.60) \quad \begin{aligned} \tilde{J}_{c1,N}^0 &= i\pi e^{i\Omega f(\varphi_{c1})} T_{\text{sym}}(\Omega) + e^{i\Omega f(\varphi_{c1})} \mathcal{H}_{c1} T_{\text{ant}}(\Omega), \\ T_{\text{sym}(\text{ant})}(\Omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{i}{\Omega}\right)^{n+1} \sum_{j=0}^n \frac{(h_n^{\text{sym}(\text{ant})})^{(n-j)}(0)}{j!(n-j)!} T_j(\Omega). \end{aligned}$$

Опуская знаки sym, ant, разложим величину $T(\Omega) \equiv T_{\text{sym}(\text{ant})}(\Omega)$ по обратным степеням Ω^{-1} . При любом m ($1 \leq m \leq N-1$)

$$(П.61) \quad T(\Omega) = \sum_{q=0}^m T^q + \Delta_m T, \quad T^q = \frac{1}{\Omega^{q+1}} \tilde{T}^q,$$

где величины $\tilde{T}^q$ не зависят от Ω , и при условиях теоремы П.2

$$(П.62) \quad |T^q| \leq \frac{C_{Nq} B_0 \lambda \lambda_\varphi}{(\lambda \Omega)^{q+1}} \left(\frac{\lambda \lambda_\varphi}{\lambda_2}\right)^{2q}, \quad \lambda_\varphi \equiv \frac{\bar{g} \lambda_1^2}{g_1^2},$$

а если выполнено условие

$$(П.63) \quad \frac{\lambda \lambda_\varphi^2 \lambda_2^4}{\Omega \lambda_2} < 1,$$

то $|\Delta_m T| \leq (C_{Nm} B_0 \lambda^m \lambda_\varphi^{2m} \lambda_2^{4m}) / \Omega^{m+1}$.

Приведем формулы для T^0, T^1 , в которых $h_n \equiv h^{\text{sym}(\text{ant})}$:

$$(П.64) \quad \begin{aligned} T^0 &= \frac{i}{\Omega} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h_n(0)}{n!} \xi_{c1}^n, \\ T^1 &= \frac{C_1}{\Omega^2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^n h_n^{(1)}(0)}{(n-1)!} b_1^{n-1} + \frac{C_2}{\Omega^2} \sum_{n=2}^{N-1} \frac{(-1)^n h_n^{(1)}(0)}{(n-1)!} b_1^{n-2} b_2 \end{aligned}$$

при $b_k = (k!)^{-1} F^{(k)}(0)$.

СЛЕДСТВИЕ П.1. Пусть выполнены условия теоремы (П.5) и условие $\partial_\xi^n u(\varphi, 0) = 0$ ($n \leq n_1$). Тогда

$$(П.65) \quad \begin{aligned} \tilde{J}_2[u] = & \sum_{c1} (\tilde{J}_2)_{c1}^0 + \sum_{c2} (\tilde{J}_2)_{c2}^Q + (J_2)_0^P + \Delta_{QT}(J_2) + \Delta^1 \tilde{J}_2 \\ & + \frac{i}{\Omega} \sum_{c1} e^{i\Omega f(\varphi_{c1})} \mathcal{K}_{c1} \sum_{n=n_0}^{N-1} \frac{(\Delta_0 \partial_\xi^n u)(\varphi_{c1})}{n! |g_{c1}^{(1)}|} \xi_{c1}^n. \end{aligned}$$

В этой формуле $(\tilde{J}_2)_{c1}^0$ – основной критический вклад точки (φ_{c1}, ξ_{c1}) , вычисляемый по формуле (П.12) при $Q = 0$, и при этом по определению $u(\varphi_{c1}, \xi_{c1}) = \frac{1}{2}(u(\varphi_{c1}, \xi_{c1} + 0) + u(\varphi_{c1}))$. Для $\Delta_{QT}(J_2)$ верны те же оценки, что и в теореме П.4, и

$$(П.66) \quad |\Delta^1 \tilde{J}_2| \leq \frac{C_{Nn_1} B_0 \mathcal{N}_1}{\Omega^2} \cdot \frac{\lambda \lambda_\varphi^3}{\lambda_2^{2\bar{n}_1+2}} t_0^{\bar{n}_1-2},$$

$$(П.67) \quad \bar{n}_1 = \begin{cases} n_1 & (n_1 \geq 2), \\ 2 & (n_1 \leq 2), \end{cases} \quad \lambda_\varphi = \frac{\bar{g} \lambda_1^2}{g_1^2}.$$

В случае $n_1 = 0$ этот результат может оказаться недостаточно точным и можно использовать следующее представление, имеющее место $\forall m$ ($1 \leq m \leq N-1$):

$$(П.68) \quad \begin{aligned} \tilde{J}_2[u] = & \sum_{c1} \tilde{J}_{2,m,c1} + \sum_{c2} (\tilde{J}_2)_{c2}^Q + \sum_{c1} e^{i\Omega f(\varphi_{c1})} \mathcal{K}_{c1} T_{\text{ant}}^0 \\ & + (\tilde{J}_2)_0^P + \Delta_{QT}(J_2) + \Delta^m \tilde{J}_2. \end{aligned}$$

В этой формуле

$$(П.69) \quad |\Delta^m \tilde{J}_2| = |\Delta_m T^{\text{sym}}| \leq \frac{C_{Nm} B_0 \lambda^m \lambda_\varphi^{2m} \lambda_2^{4m}}{\Omega^{m+1}},$$

а величина $\tilde{J}_{2,m,c1}$ определяется равенством

$$(П.70) \quad \tilde{J}_{2,m,c1} = -i\pi e^{i\Omega f(\varphi_{c1})} \sum_{q=0}^{m-1} T_{\text{sym}}^q.$$

6. Оценки главных значений ОИ. В этом пункте приведены используемые в основном тексте оценки интегралов $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}[\rho e^{i\Omega S}]$, понимаемых в смысле главного значения (П.43).

Предполагается, что выполнены условия 1, 2.

1. $\rho \in C_0^\infty$ и

$$(П.71) \quad \rho(y) = \begin{cases} 1 & (|y| \leq y_0), \\ 0 & (|y| \geq Cy_0), \end{cases} \quad |\rho^{(k)}(y)| \leq C_k y_0^{-k}, \quad y_0 \leq 1, \quad y_0^{-1} \geq C\Omega^\theta.$$

2. Фаза S – гладкая в интервале $|y| \leq Cy_0$ функция и $S(0) = 0$.

Используются обозначения

$$(П.72) \quad \begin{aligned} b_k &= (k!)^{-1} S^{(k)}(0), & S_0(y) &= b_1 y_1 + b_2 y_2, \\ \mathcal{K}_0 &= \mathcal{K}[\rho e^{i\Omega S_0}], & A_0 &= \mathcal{K}[e^{i\Omega S_0}]. \end{aligned}$$

Интеграл A_0 вычисляется аналитически:

$$\begin{aligned} A_0 &= i\pi \operatorname{sgn} b_1 \operatorname{erf}\left[\sqrt{x} e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} b_1}\right] \quad \left(x = \frac{\Omega b_1}{4|b_2|}\right), \\ \operatorname{erf}(z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (\operatorname{sgn} b_1 = 0 \quad (b_1 = 0)), \end{aligned}$$

и его можно представить в виде

$$(П.73) \quad A_0 = i\pi \operatorname{sgn} b_1 + \Delta A_0.$$

При этом, если $x > C\Omega^{\varepsilon'}$, то $\forall T, \varepsilon' > 0$

$$(П.74) \quad \begin{aligned} \Delta A_0 &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[e^{ix \operatorname{sgn} b_1} \cdot \begin{cases} i & (b_1 > 0) \\ 0 & (b_1 < 0) \end{cases} \right] \sum_{m=0}^{m_T(\varepsilon')} a_m x^{-m} + \Delta_T(\varepsilon', \theta), \\ \Delta_T(\varepsilon', \theta) &\leq C_T(\varepsilon', \theta) \Omega^{-T}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(П.75) \quad \begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathcal{K}_0 + \Delta_0 \mathcal{K}, \\ |\Delta_0 \mathcal{K}| &\leq C\Omega y_0^3 \overline{S^{(3)}}. \end{aligned}$$

Определим величину $\Delta \mathcal{K}$ равенством

$$(П.76) \quad \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}[\rho e^{i\Omega S}] = i\pi \operatorname{sgn} b_1 + \Delta \mathcal{K}.$$

ЛЕММА П.5. Пусть $\Omega|b_2|y_0^2 > C\Omega^{\varepsilon'}$, $\varepsilon' > 0$. Тогда для величины $\Delta \mathcal{K}$ в (П.76) имеет место равенство

$$(П.77) \quad \Delta \mathcal{K} = \Delta A_0 + \Delta_0 \mathcal{K} + \Delta A_\rho + \Delta_T(\varepsilon').$$

Величина $\Delta_0 A$ в правой части этого равенства определена в (П.73) и при $x \equiv \Omega b_1^2/(4|b_2|) > C\Omega^{\varepsilon'}$ выполняется (П.74). Величина $\Delta_0 \mathcal{K}$ оценена в (П.75), $\Delta_T(\varepsilon', \theta) \leq C_T(\varepsilon', \theta) \Omega^{-T} \quad (\forall T)$ и

$$(П.78) \quad \Delta A_p = \begin{cases} 0 & (|b_1| < 2|b_2|y_0), \\ \frac{1}{\sqrt{x}} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} b_2 - ix} \sum_{p=0}^{P_T(\varepsilon')} \frac{G_p(y_c)}{x^p} & (|b_1| \geq 2|b_2|y_0), \end{cases}$$

где функции $G_p(y)$ и величины y_c определяются из условий

$$\left(\frac{\rho-1}{y}\right)^{(2p)}(y) = y^{-2p-1} G_p(y), \quad y_c = -\frac{b_1}{2b_2}.$$

Таким образом, во всей области изменения переменной $x = \frac{\Omega b_1^2}{4|b_2|}$

$$(П.79) \quad \Delta \mathcal{K} = g(\sqrt{x}) e^{ix \operatorname{sgn} b_1} + \Delta_0 \mathcal{K} + \Delta_T(\varepsilon', \theta),$$

где g – ограниченная кусочно-гладкая функция.

ЛЕММА П.6. При $\Omega \geq 1$ равномерно по $b_1, b_2, \forall \varepsilon > 0, \theta$ имеет место оценка

$$(П.80) \quad |\Delta \mathcal{K}| \leq \frac{C}{|b_1|} \left[\frac{1}{\Omega^{1+\varepsilon} y_0} + \frac{|b_2|^{1/2}}{\Omega^{1/2}} + \frac{(\overline{S^{(3)}}|b_1|)^{1/4}}{\Omega^{1/2}} + \overline{S^{(3)}} y_0^2 + \overline{S^{(4)}} y_0^3 \right].$$

Список обозначений

В списке приведены номера формул, в окрестности которых вводятся соответствующие обозначения. В список включены только те обозначения, которые без пояснений используются в тексте и смысл которых может быть не ясен из контекста.

a, a_0, a_i, a_B (5.4)–(5.5); $A, \{A\}$ (1.7); $A_i, i = 1, \dots, 6$ (2.2)–(2.5); A_0 (2.6); $A(n)$ (3.4); A_Φ (П.2); $A_c[u], A[u, \Phi]$ (П.20).

b (2.7); B (3.25); B_c, B_0 (П.4)–(П.5). $d \equiv d(\vec{r}_0, \partial \mathcal{D})$ (1.29), (5.10); d_0 (5.10); d_T (2.34); D' (2.25)–(2.26); $D_{\beta_1 \beta_2}^i, i = 1, 2, 3$ (2.1); D_0 (5.10); D_i (5.23).

D_q^c (П.6); $\mathcal{D}, \partial \mathcal{D}$ (1.1).

$E(\vec{z})$ (3.5).

$\hat{f}$ (1.2); f, f_0 (2.15).

$g_1, \tilde{g}$ (П.30)–(П.31); $G_i(A, \vec{r}_0), G_0(A, \vec{r}_0)$ (2.24).

$h_n^{\text{sym}}, h_n^{\text{ant}}$ (П.57)–(П.58); $H^A(s)$ (1.9)–(1.11).

j_0, j_1 (2.22); j_{in}^0 (2.20); j_{in}^1 (2.21); $J(\varphi, q)$ (1.2); $J^\Pi(\varphi, q)$ (1.4); J_{nm} (1.33); $J_{\partial M}^P$ (П.3).

$k(s)$ (1.36), (2.7)–(2.10); $\tilde{k}$ (2.7); $\tilde{k}$ (2.9); k_d (5.26); k_D (5.25); K_i, K_0 (2.7); $\tilde{K}_p$ (2.34);

$\mathcal{K}_\pm$ (5.47); $\mathcal{K}_{c1}$ (П.45); $\mathcal{K}[fe^{i\Omega S}]$ (П.43).

$\tilde{l}(s)$ (1.34), (4.1); $l \equiv |\tilde{l}(s)|, L, L_0$ (1.6), $\mathcal{L}$ (2.10).

M (3.16)–(3.27).

$n_0, \bar{n}_0$ (П.39); N_φ (1.3); N_1 (3.25); $\mathcal{N}_1$ (5.23).

$\vec{O}$ (1.1).

p, p_i (2.8).

q (2.12).

$\vec{r}_0, \vec{r}(s)$ (1.34); $\vec{r}_m^0$ (2.10); $\vec{r}_{0i}$ (2.25)–(2.26); $\vec{r}_\Gamma$ (4.20); R_H (1.1); R_0 (1.6); R^A (1.11); R (2.28); R_1 (2.32).

s (1.34); s_c^1 (2.25); s_c^i (4.8); s_{0c}^1 (2.25)–(2.26), (5.32); s_i^0 (2.1), (2.8); S^A (1.13), (2.3); S_Π (1.13), (2.2); S_R^A (2.3); $S_\pm(s), S(s)$ (4.5); S_γ, S_γ^0 (4.16)–(4.17).

$t_i, i = 1, \dots, 11$ (2.16); t_0 (П.38); t^0 (П.31); T_1, T_2 (2.17); $T(\partial \mathcal{D})$ (2.1); T_0 (2.1), (4.11); $T(s_i^0)$ (2.1); $T(\vec{O})$ (4.20)–(4.21); T_{D_i} (5.23), $T_j(\Omega)$ (П.57)–(П.58); $T_{\text{sym}}, T_{\text{ant}}$ (П.60);

$T_{\text{sym}(\text{ant})}^q$ (П.61).

u_n (1.35); $U(\beta, M), U(\beta_1, \partial \mathcal{D}), U(\beta_2, T_0)$ (2.1); $U(\beta_2, T(s_i^0)), U(\beta_3, r_m^0)$ (2.25).

v_n (1.35); $V^{\Delta t}, V_{\Delta t}$ (1.6)–(1.7).

$w_{nm}^\pm$ (5.15)–(5.16); $w_{nm}^{\pm i}, i = 1, 2, 3$ (5.47)–(5.48); $w_j(\varphi, s)$ (5.75).

x_c, x_{ex} (П.4)–(П.5).

$\alpha_i, i = 1, \dots, 11, \alpha$ (2.26).

β_1, β_2 (2.1), (5.10); $\beta_3, \dots, \beta_6$ (5.10).

γ (5.90); Γ_γ, Γ_0 (4.20).

$\Delta\varphi, \Delta q$ (1.3); $\Delta\mu^A$ (1.22); $\Delta\mu_R^A$ (1.26); $\Delta\mu_T^A$ (1.28); $\Delta\mu_q^A$ (2.7); $\Delta\mu_\varphi^A, \Delta\mu_L^A$ (3.2)–(3.3); $\Delta\mu_{TF}^A$ (3.25); $\Delta\mu_F^A$ (3.26); $\Delta\xi$ (2.4); $\Delta^{n_0} J_2$ (П.48); Δ_i (2.9); Δ^0 (2.14).

$\varepsilon, \varepsilon_0$ (2.26); $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (Теоремы П.1–П.5).

$\xi_{nm}^{\pm}(s_c^1) \equiv \xi_{nm}^{\pm}(s_c^1(\vec{r}_0), \vec{r}_0)$ (2.23), (4.11); ξ_t^n (2.20); $\xi_{\pm}(s)$ (4.2); ξ_c^1 (4.11).
 $\vec{\eta}, \vec{\eta}^*$ (1.2).
 θ, θ_m^0 (2.10)–(2.11).
 $\varkappa_1$ (2.5); $\varkappa_2$ (2.2); $\varkappa$ (2.18); $\varkappa_0$ (2.22), $\varkappa_c$ (П.12).
 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ (П.5); $\bar{\lambda}_1$ (П.10), (П.31); λ_{φ} (П.62).
 $\mu(\vec{r})$ (1.1); μ^A (1.7), (1.10); $\tilde{\mu}^A$ (1.9).
 $\vec{\nu}$ (2.10).
 $\Pi(q)$ (1.5).
 $\rho_t(\xi), \tilde{\rho}(\xi), \rho_0(\xi), \rho_i(\xi), \rho_B(\xi)$ (5.3).
 Σ^F (3.25)–(3.26).
 $\sigma_{\infty}^A(\vec{r})$ (1.21); $\sigma^A(\vec{r})$ (1.23).
 $\vec{\tau}$ (1.34).
 Φ_{nm} (1.34); Φ_c'' (П4)–(П.5).
 $\varphi_{\pm} \equiv \varphi_{\pm}(s)$ (4.2).
 $\chi_{\mathcal{D}}(1.1)$; $\chi_{nm}^{\pm}(s)$ (5.20).
 $\Psi(x)$ (П.20); Ψ^A (1.10).
 Ω (1.13).
 $\{\mu^{\omega}, I\}$ (1.1).
 $\vec{\nabla}_M E(\vec{z})$ (3.16).
 $i \subset (m)$ (2.25)–(2.26), (2.30).
 $(\pm) \subset (1)$ (5.47).
 $\bar{u}$ – оценка сверху величины u .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хермен Г. Восстановление изображения по проекциям: Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
- [2] Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987.
- [3] Реконструктивная вычислительная томография // ТИИЭР. 1983. Т. 71. № 3.
- [4] Herman G. T. (Ed.) Image Reconstruction from Projections: Implementation and Application // Topics in Appl. Phys. 1979. V. 39. N. Y.
- [5] Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
- [6] Herman G. T., Natterer F. (Eds.) Mathematical Aspects of Computerized Tomography // Lecture Notes in Med. Inform. V. 8. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [7] Shepp L. A. (Ed.) Computed Tomography. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983 (Proc. Sympos. Appl. Math. V. 27).
- [8] Smith K. T., Solmon D. C., Wagner S. L. Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. № 6. P. 1127–1270.
- [9] Shepp L. A., Kruskal J. B. Computerized tomography: the new medical X-ray technology // Amer. Math. Monthly. 1978. V. 85. P. 420–439.
- [10] Gelfand I. M., Gindikin S. G. (Eds.) Mathematical Problems of Tomography. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990 (Transl. Math. Monographs. V. 81).
- [11] Gindikin S. (Ed.) Applied Problems of Radon Transform. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.
- [12] Popov D. A., Sokolova E. B., Sushko D. V. Mathematical models in two-dimensional Radon tomography // [11]. P. 129–204.
- [13] Palamodov V. P. Some singular problems in tomography // [10]. P. 123–140.
- [14] Рамм А. Г. Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.

- [15] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Обобщенные функции. Вып. 5. М.: Физматгиз, 1962.
- [16] Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.
- [17] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Обобщенные функции. Вып. 1. М.: Физматгиз, 1959.
- [18] Popov D. A., Sushko D. V. Computation of singular convolutions // [11]. P. 43–127.
- [19] Popov D. A. On convergence of a class of algorithms for the inversion the numerical Radon transform // [10]. P. 7–65.
- [20] Гончар С. И. Приближение функций при помощи дискретного обращения их преобразования Радона // Дис. . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1987.
- [21] Гончар С. И. Сходимость вычислительных алгоритмов восстановления разрывных функций по преобразованию Радона // УМН. 1986. Т. 41. №3. С. 175–176.
- [22] Попов Д. А. Исследование алгоритма свертки и обратной проекции // Вопросы реконструктивной томографии. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. С. 125–136.
- [23] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. М.: Наука, 1982.
- [24] Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988.
- [25] Попов Д. А. Оценки с константами для некоторого класса осциллирующих интегралов // УМН. 1997. Т. 52. №1. С. 77–148.
- [26] Погорелов А. В. Лекции по дифференциальной геометрии. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1967.
- [27] Алимов И. А., Ильин В. А., Никишин Е. Е. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I // УМН. 1976. Т. 31. №6. С. 28–83.
- [28] Янушкаускас А. И. Кратные тригонометрические ряды. Новосибирск: Наука, 1986.
- [29] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
- [30] Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций. Ч. I. М.: ИЛ, 1949.
- [31] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
- [32] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Тригонометрические интегралы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. №5. С. 971–1003.
- [33] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987.