Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крутицкий, О фредгольмовости систем интегральных уравнений, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 253–254

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:09:52

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

П. А. КРУТИЦКИЙ

На координатной оси Os введем две совокупности отрезков $\Gamma = \bigcup_{n=1}^N \Gamma_n$ и $\gamma = \bigcup_{m=1}^M \gamma_m$, где $\Gamma_n = [a_n, b_n]$, $\gamma_m = [\alpha_m, \beta_m]$, $N, M \geq 0$. При этом все отрезки не имеют общих точек, за тем исключением, что концы Γ могут совпадать с концами γ . Положим $D = \Gamma \cup \gamma$. Рассмотрим систему интегральных уравнений на D относительно функции $\mu(s)$:

$$(1a) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma + \int_D \mu(\sigma) v(s, \sigma) d\sigma = f(s), \quad s \in \Gamma,$$

$$(1b) \quad \mu(s) + \int_D \mu(\sigma) w(s, \sigma) d\sigma = f(s), \quad s \in \gamma,$$

$$(1c) \quad \int_D \mu(\sigma) U_n(\sigma) d\sigma = \varphi_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Здесь $v(s, \sigma)$, $w(s, \sigma)$, $U_1(s), \dots, U_N(s)$, $f(s)$ – заданные функции, а $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ – заданные константы. Относительно заданных функций введем следующие предположения, которые в дальнейшем будем называть условиями **К**: $w(s, \sigma) \in C^0(\gamma \times D)$, либо $w(s, \sigma)$ – полярное ядро на $\gamma \times D$; $v(s, \sigma) \in C^{0, \lambda}(\Gamma \times D)$; $f(s) \in C^{0, \lambda}(\Gamma) \oplus C^0(\gamma)$ с $\lambda \in (0, 1]$; функции $U_1(s), \dots, U_N(s)$ непрерывны на γ и во внутренних точках Γ , а на концах Γ могут иметь логарифмические особенности.

Для простоты показатель Гёльдера для $v(s, \sigma)$ и $f(s)$ считается одинаковым. Если на практике эти показатели различны, то в качестве λ всегда можно взять наименьший. Решение системы уравнений (1) будем разыскивать в пространстве $C_q^\omega(\Gamma) \oplus C^0(\gamma)$ с $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $\mu(s)$ принадлежит пространству $C_q^\omega(\Gamma)$ с $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1)$, если функция $\nu(s) = \mu(s) \prod_{n=1}^N |s - a_n|^q |s - b_n|^q$ принадлежит пространству Гёльдера $C^{0, \omega}(\Gamma)$ с показателем ω , и $\|\mu\|_{C_q^\omega(\Gamma)} = \|\nu\|_{C^{0, \omega}(\Gamma)}$.

Первый интеграл в (1a) является сингулярным и понимается в смысле главного значения. Тем самым, система (1) состоит из сингулярного интегрального уравнения 1-го рода (1a), уравнения 2-го рода с непрерывным или полярным ядром (1b) и набора дополнительных условий (1c).

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия **К**. Если на каком-либо отрезке γ_m ($m = 1, \dots, M$) выполнены условия периодичности: $f(\alpha_m) = f(\beta_m)$, $w(\alpha_m, \sigma) = w(\beta_m, \sigma)$ при любом $\sigma \in D$, то всякое решение системы (1) также удовлетворяет условию периодичности на γ_m : $\mu(\alpha_m) = \mu(\beta_m)$.

Доказательство леммы проводится непосредственной проверкой с использованием уравнения (1b). Фредгольмовость системы (1) можно доказать сведя ее к эквивалентному уравнению Фредгольма 2-го рода в Банаховом пространстве.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия **К**, тогда: 1) система уравнений (1) фредгольмова; 2) все решения системы (1) лежат в $C_{1/2}^p(\Gamma) \oplus C^0(\gamma)$ с $p = \min\{1/2, \lambda\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия **К**. Если однородная система (1) имеет только тривиальное решение, то неоднородная система (1) имеет единственное решение $\mu(s) \in C_{1/2}^p(\Gamma) \oplus C^0(\gamma)$ при любой правой части (т.е. при любой функции $f(s)$, удовлетворяющей условиям **К** и любом наборе констант $\varphi_1, \dots, \varphi_N$).

Через $\delta(s, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \subset D$, будем обозначать характеристическую функцию множества $\mathcal{L}$, т.е. $\delta(s, \mathcal{L}) = 0$, если $s \notin \mathcal{L}$, и $\delta(s, \mathcal{L}) = 1$, если $s \in \mathcal{L}$.

Пусть $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$, $\Gamma^1 = \bigcup_{n=1}^{N_0} \Gamma_n$, $\Gamma^2 = \bigcup_{n=N_0+1}^N \Gamma_n$. Рассмотрим систему, включающую уравнение с логарифмическим ядром:

$$(2a) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^1} \frac{\mu(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma + \int_D \mu(\sigma) V(s, \sigma) d\sigma = f(s), \quad s \in \Gamma^1,$$

$$(2b) \quad -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^2} \mu(\sigma) \ln |s - \sigma| d\sigma + \int_D \mu(\sigma) u(s, \sigma) d\sigma = \mathcal{F}(s), \quad s \in \Gamma^2,$$

$$(2c) \quad \mu(s) + \int_D \mu(\sigma) w(s, \sigma) d\sigma = f(s), \quad s \in \gamma,$$

$$(2d) \quad \int_D \mu(\sigma) U_n(\sigma) d\sigma = \varphi_n, \quad n = 1, \dots, N_0.$$

Здесь $V(s, \sigma)$, $u(s, \sigma)$, $w(s, \sigma)$, $U_1(s), \dots, U_{N_0}(s)$, $\mathcal{F}(s)$, $f(s)$ — заданные функции, а $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_0}$ — заданные константы. Предположим, что заданные функции удовлетворяют условиям гладкости $\mathbf{K}_1$: $V(s, \sigma) \in C^{0,\lambda}(\Gamma^1 \times D)$; $u'_s(s, \sigma) \in C^{0,\lambda}(\Gamma^2 \times D)$; $\mathcal{F}(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma^2)$; $f(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma^1) \oplus C^0(\gamma)$ с $\lambda \in (0, 1]$; функция $w(s, \sigma)$ та же, что и в условиях $\mathbf{K}$; функции $U_1(s), \dots, U_{N_0}(s)$ непрерывны на γ и во внутренних точках Γ , а на концах Γ могут иметь логарифмические особенности.

Решение системы уравнений (2) разыскивается в пространстве $C_q^\omega(\Gamma) \oplus C^0(\gamma)$ с $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1)$. Для системы (2) верна лемма 1. Продифференцировав уравнение (2b) по s , заметим, что система (2) эквивалентна системе (1), где $v(s, \sigma) = \delta(s, \Gamma^1)V(s, \sigma) + \delta(s, \Gamma^2)u'_s(s, \sigma)$, функция $f(s)$ на Γ^2 равна $\mathcal{F}'(s)$ и для $n = N_0 + 1, \dots, N$: $\varphi_n = \mathcal{F}(a_n)$, $U_n(\sigma) = -\pi^{-1}\delta(\sigma, \Gamma^2) \ln |a_n - \sigma| + u(a_n, \sigma)$. Функции $w(s, \sigma)$, $v(s, \sigma)$, $f(s)$, $U_1(\sigma), \dots, U_N(\sigma)$ в полученной системе (1) удовлетворяют условиям $\mathbf{K}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия $\mathbf{K}_1$, тогда система (2) эквивалентна системе (1) и для системы (2) справедливы все результаты, приведенные в теореме 1 для системы (1).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия $\mathbf{K}_1$. Если однородная система (2) имеет только тривиальное решение, то неоднородная система (2) имеет единственное решение $\mu(s) \in C_{1/2}^p(\Gamma) \oplus C^0(\gamma)$, ($p = \min\{1/2, \lambda\}$) при любой правой части (т.е. при любых функциях $f(s)$, $\mathcal{F}(s)$, удовлетворяющих условиям $\mathbf{K}_1$ и любом наборе констант $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_0}$).

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 96-01-01411.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [2] Крейн С.Г. (ред.) Функциональный анализ. М.: Наука, 1964.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
02.09.1998