Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Довбыш, Трансверсальное пересечение сепаратрис, структура множества квазислучайных движений и несуществование аналитического интеграла в многомерных системах, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1000>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 03:27:11

**ТРАНСВЕРСАЛЬНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ СЕПАРАТРИС,
СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА КВАЗИСЛУЧАЙНЫХ ДВИЖЕНИЙ
И НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА
В МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ**

С. А. ДОВБЫШ

1. Пусть q – гиперболическая неподвижная точка C^N -дiffeоморфизма S n -мерного многообразия M на себя; W^- и W^+ – ее выходящее и входящее инвариантные многообразия (сепаратрисы). Пусть размерности $W^\pm$ есть, соответственно, $n^\pm$ (тогда $n^+ + n^- = n$) и r_j – некоторые трансверсальные гомоклинические точки, так что в каждой точке r_j многообразия W^- и W^+ пересекаются трансверсально. Говорят, что орбиты точек q, r_j образуют *гомоклиническую структуру*. Согласно теореме В. М. Алексеева [1], для любого открытого множества U , содержащего гомоклиническую структуру, существует открытое множество $V \subset U$ такое, что ограничение $S|_A$ на максимальное S -инвариантное множество A , содержащееся в V , допускает описание методами символической динамики, т.е. топологически эквивалентно некоторой топологической марковской цепи (ТМЦ). Движения на множестве A носят название квазислучайных, поскольку топологическая энтропия соответствующей ТМЦ является положительной [1], [2].

Хорошо известно, что в двумерном случае ($n = 2$, $n^\pm = 1$) множество A квазислучайных движений является ключевым в смысле [3] для класса функций F , аналитических в окрестности $A \subset M$ (т.е. из $F|_A \equiv 0$ следует $F \equiv 0$) и отсюда вытекает несуществование непостоянного аналитического (первого) интеграла diffeоморфизма S , т.е. функции F на M такой, что $F \circ S = F$. Соответствующее доказательство В. М. Алексеева [4] справедливо только для двумерного случая, однако, оно легко переносится на многомерный случай, если имеет место импликация

$$(1) \quad F \in C^N(M), \quad F|_A \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad dF|_A \equiv 0,$$

приводящая к ключевому свойству множества A (в двумерном случае доказательство [4] основано на справедливости (1) при $N = 1$). Более того, (1) влечет за собой несуществование нетривиальных мероморфного первого интеграла и аналитической однопараметрической группы симметрий [5] (или, более общо, мероморфного векторного поля, порождающего локальный фазовый поток, коммутирующий с отображением S). Условие (1) означает, что множество A является “достаточно шероховатым” и не лежит ни на каком регулярном C^N -подмногообразии положительной коразмерности и даже на объединении счетного набора таких подмногообразий (последнее доказывается применением диагонального процесса). Подчеркнем, что не делается предположений о гамильтоновом происхождении diffeоморфизма S , а неинтегрируемость понимается в наиболее сильном аналитическом смысле.

Сформулированные ниже достаточные условия, влекущие за собой (1), конструктивно проверяемы для конкретных динамических систем и сохраняются при малых возмущениях. В частности, в пространстве C^∞ -дiffeоморфизмов, имеющих гомоклиническую траекторию, существует открытое всюду плотное подмножество неинтегрируемых.

2. Пусть λ_i ($1 \leq i \leq n^+$), μ_i ($1 \leq i \leq n^-$) – все собственные числа отображения S в точке q , причем $0 < |\lambda_i| < 1 < |\mu_i|$. Предположим, что числа λ_i удовлетворяют мультипликативным условиям нерезонансности

$$(2) \quad |\lambda_s| \neq \prod_i |\lambda_i^{m_i}|$$

для всех индексов s и $m_i \in \mathbb{Z}^+$ таких, что $\sum_i m_i \geq 2$. Введем отношение эквивалентности: $\lambda_{i'} \sim \lambda_{i''}$, если и только если во всех неравенствах (2) знаки сохраняются при одновременной замене в левой и правой частях всех сомножителей $\lambda_{i'}$ на $\lambda_{i''}$ или всех сомножителей $\lambda_{i''}$ на $\lambda_{i'}$.

Пусть $\{\Lambda_1^+, \dots, \Lambda_{p^+}^+\}$ – соответствующее разбиение $\{\lambda_i\}$ на классы эквивалентности, расположенные в порядке неубывания модулей. Аналогично, пусть $\{\mu_i\}$ также удовлетворяют мультипликативным условиям нерезонансности и $\{\Lambda_1^-, \dots, \Lambda_{p^-}^-\}$ – соответствующее разбиение $\{\mu_i\}$ на классы эквивалентности, расположенные в порядке невозрастания модулей. Целое число

$$N > \max \left\{ \ln \min_i |\lambda_i| / \ln \max_i |\lambda_i|, \ln \max_i |\mu_i| / \ln \min_i |\mu_i| \right\}$$

будет ограничивать снизу гладкость диффеоморфизма S . Рассмотрим подпространства $L_1^\pm \subset \dots \subset L_{p^\pm}^\pm = T_q W^\pm$ такие, что $L_i^\pm$ (соответственно, $L_i^\pm$) отвечает жордановым клеткам для собственных чисел $\lambda_s \in \Lambda_j^+$ (соответственно, $\mu_s \in \Lambda_j^-$), где $j \leq i$. По теореме С. Стернберга [6] существуют линеаризующие координаты $y^\pm \in \mathbb{R}^{n^\pm}$ на $W^\pm$, в которых отображение $S|_{W^\pm}$ принимает линейный вид $y^\pm \mapsto J^\pm y^\pm$. Обозначим через $\mathfrak{N}^\pm \subset \mathbb{R}^{n^\pm}$ множество $y^\pm$ -координат точек $r_j \in W^\pm$ и через $\tilde{L}_{i,j}^\pm \subset T_{r_j} W^\pm$ – пространства, получающиеся параллельными переносами из $L_i^\pm$ в линеаризующей системе координат. Пусть при положительных итерациях касательного отображения $TS^{\mp 1}: TM \rightarrow TM$ каждое пространство $\tilde{L}_{i,j}^\pm$ стремится к $L_i^\pm$. Для каждого собственного числа ν отображения $J^\pm = S|_{W^\pm}$, линейного в координатах $y^\pm$, проекция $\pi_\nu: \mathbb{R}^{n^\pm} \rightarrow \mathbb{R}^{n^\pm} / \text{im}(J^\pm - \nu \cdot \text{id}) = \text{coker}(J^\pm - \nu \cdot \text{id})$ корректно определена, и пусть линейная оболочка множества $\pi_\nu(\mathfrak{N}^\pm)$ совпадает с $\pi_\nu(\mathbb{R}^{n^\pm})$.

ТЕОРЕМА. При выполнении сформулированных выше условий справедлива импликация (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеев В. М. // УМН. 1981. Т. 36. № 4. С. 161–176. [2] Алексеев В. М., Якобсон М. В. // Боуэн Р. Методы символической динамики. М.: Мир, 1979. С. 196–240. [3] Козлов В. В. // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67. [4] Алексеев В. М. // Матем. сб. 1969. Т. 78. № 1. С. 3–50. [5] Козлов В. В. // Прикл. матем. и мех. 1988. Т. 52. № 4. С. 531–541. [6] Sternberg S. // Amer. J. Math. 1957. V. 79. № 4. P. 809–824.

НИИ механики
Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
25.06.1996