Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дубровский, Восстановление потенциала по собственным значениям различных задач, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1001>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:02:47

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПО СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ РАЗНЫХ ЗАДАЧ

В.В. ДУБРОВСКИЙ

Я буду рассматривать оператор $-\Delta$ с граничными условиями четырех видов на прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$, где a^2/b^2 – алгебраическое, но не рациональное число:

$$1) \text{ оператор } T_1 : \begin{cases} -\Delta U = \lambda U, \\ U|_{\partial\Pi} = 0; \end{cases}$$

$$2) \text{ оператор } T_2 : \begin{cases} -\Delta U = \lambda U, \\ \frac{\partial U}{\partial V}|_{\partial\Pi} = 0, \end{cases}$$

где V – внешняя нормаль к границе $\partial\Pi$ прямоугольника Π ;

$$3) \text{ оператор } T_3 : \begin{cases} -\Delta U = \lambda U, \\ U(x, 0) = U(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \\ \frac{\partial U}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial U}{\partial x}(a, y), \quad 0 \leq y \leq b; \end{cases}$$

$$4) \text{ оператор } T_4 : \begin{cases} -\Delta U = \lambda U, \\ U(0, y) = U(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial U}{\partial y}(x, b), \quad 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Введем оператор T_i^α , $i = 1, \dots, 4$, где $\alpha \geq 1$. Собственные числа оператора T_i^α будем нумеровать в порядке возрастания их величин с учетом кратности и обозначать через $\lambda_n(i, \alpha)$, $n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, а соответствующие ортонормированные функции оператора T_i^α – через $v_n(i, \alpha)$, где $\left(\frac{\pi^2}{a^2}m_n^2 + \frac{\pi^2}{b^2}l_n^2\right)^\alpha = \lambda_n(i, \alpha)$, и $m_n, l_n \in \mathbb{Z}$ постоянны для собственных значений $\lambda_n(i, \alpha)$, $i = 1, \dots, 4$. Пусть P – оператор умножения на функцию $p \in \ell_2(\Pi)$ такую, что

$$(1) \quad \iint_{\Pi} p \cos \frac{2\pi}{a}mx \, dx \, dy = \iint_{\Pi} p(x, y) \cos \frac{2\pi}{a}ny \, dx \, dy = 0, \quad m, n = 0, 1, \dots, \text{ и}$$

$$(2) \quad p(a-x) = p(x, b-y) = p(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Pi.$$

Будем обозначать через $\mu_n(i, \alpha, p)$ собственные числа оператора $T_i^\alpha + P$, занумерованные так, что $|\mu_n(i, \alpha, p) - \lambda_n(i, \alpha)| \leq \text{const}$. Это всегда можно сделать при $\alpha > 2$ (см. [1]–[5]).

ТЕОРЕМА. Если $\alpha > 5/2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n - \lambda_n(i_n, \alpha)|^2 < \varepsilon$, где ε достаточно мало, то существует один и только один потенциал со свойствами (1) и (2) такой, что $\mu_n(i_n, \alpha, p) = \mu_n$.

Доказательство теоремы заключается в конструировании сжимающего оператора $\alpha(p)$ в $\ell_2(\Pi)$ (см. [2]–[5]), а именно,

$$p = x + \alpha(p) \equiv \sqrt{ab} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n(i, \alpha)) \cos \frac{2\pi}{a}m_n x \cos \frac{2\pi}{b}l_n y + \sqrt{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(p) \cos \frac{2\pi}{a}m_n x \cos \frac{2\pi}{b}l_n y,$$

где

$$\left(\frac{\pi^2}{a^2}m_n^2 + \frac{\pi^2}{b^2}l_n^2\right)^\alpha = \lambda_n(i, \alpha), \quad m_n, l_n \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha_n(p) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int \lambda P(T_i^\alpha + P - \lambda E)^{-1} (P(T_i^\alpha - \lambda E)^{-1})^{-2} d\lambda v_n(i, \alpha) v_n(i, \alpha) \right),$$

и $\lambda = \lambda_n(i_n, \alpha) + \partial_n 2^{-1} \dots$, где

$$\partial_n = \min\{|\lambda_n(i_n, \alpha) - \lambda_{n-1}(i_n, \alpha)|, |\lambda_{n+1}(i_n, \alpha) - \lambda_n(i_n, \alpha)|\}.$$

Как и в работах [2]–[5], доказывается, что

$$|\alpha_n(p) - \alpha_n(\tilde{p})| \leq \frac{\text{const } \|p - \tilde{p}\|_2 \|p\|_2 \|\tilde{p}\|_2}{\partial_n}.$$

Из теоремы Тье–Зигеля–Рота, теоремы Лагранжа о среднем и асимптотики $\lambda_n(i_n, \alpha)$ вытекает, что $\partial_n \geq \text{const } n^{1/2+\delta}$, где $\delta > 0$. Отсюда и следует сжимаемость оператора $\alpha(p)$ при малых $\|p\|_2$: $\|\alpha(p) - \alpha(\tilde{p})\|_2 \leq \gamma \|p - \tilde{p}\|_2$, где $\gamma < 1$. Заметим, что $\|\alpha(p)\|_2 = \|\alpha(p) - \alpha(0)\|_2 \leq \gamma \|p\|_2$. То есть малый шар в $\ell_2(\Pi)$ переводится в себя. Осталось воспользоваться теоремой Банаха о сжимающем операторе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Зная априорную информацию о коэффициентах Фурье потенциала $P(x, y)$, можно восстанавливать потенциал по части спектров операторов T_i^α , i, n даже для $\alpha = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Садовничий В. А., Дубровский В. В. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1206–1211. [2] Дубровский В. В., Нагорный А. В. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 9. С. 1563–1567. [3] Дубровский В. В., Нагорный А. В. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 839–843. [4] Дубровский В. В., Нагорный А. В. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 9. С. 1552–1561. [5] Sadovnichii V. A., Dubrovskii V. V., Nagornyy A. V. // Некорректно поставленные задачи в естественных науках / ed. А. Н. Тихомиров. Москва: ТВП/VSP, 1992. Р. 417–422.

Белорусская сельхозакадемия

Принято редколлегией
18.04.1996