Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, А. Н. Варченко, А. П. Веселов, П. Г. Гриневич, С. Грушевский, С. Ю. Доброхотов, А. В. Забродин, А. В. Маршаков, А. Е. Миронов, Н. А. Некрасов, С. П. Новиков, А. Ю. Окуньков, М. А. Ольшанецкий, А. К. Погребков, И. А. Тайманов, М. А. Цфасман, Л. О. Чехов, О. К. Шейнман, С. Б. Шлосман, Игорь Моисеевич Кричевер (к семидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 2021, том 76, выпуск 4, 183–193

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm10015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 06:56:37

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Игорь Моисеевич Кричевер
(к семидесятилетию со дня рождения)

Игорь Моисеевич Кричевер родился 8 октября 1950 г. в г. Куйбышеве (ныне Самара) в семье военного. Его родители – Моисей Соломонович Кричевер и Мария Лейзеровна Арлиевская – были авиационными инженерами. Оба родом из Белоруссии – из Могилева и Полоцка, оба очень способные и много преодолевшие в жизни люди. Можно полагать, что математические способности и жизнестойкость юбиляра унаследованы от них.

Важную роль в жизни Игоря сыграла школьная учительница математики Таисия Митрофановна Мищенко, у которой он учился в 1963–1965 гг. в Таганроге. Многие ее ученики поступали в знаменитую (а тогда только основанную А. Н. Колмогоровым) Московскую ФМШ-18, более известную как “колмогоровский интернат”. Поступил туда и Игорь. Его пригласили учиться в интернате в 1965 г., после 8-го класса, по результатам участия во Всесоюзной олимпиаде. В 1967 г., будучи в 10-м классе, он получил серебряную медаль на Международной математической олимпиаде и был зачислен на мехмат.

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm10015>

Живя в общежитии, Игорь серьезно занимался настольным теннисом (начал еще в детстве, в Таганроге), стал кандидатом в мастера спорта и играл за сборную МГУ.

В сентябре 1969 г. Игорь начал заниматься на кафедре дифференциальной геометрии и топологии у Сергея Петровича Новикова. После окончания МГУ он получил “целевое” место в аспирантуре МГУ от Ростовского государственного университета и продолжил работу с С. П. Новиковым.

После окончания аспирантуры Игорь стал работать в ЭНИНе (Энергетический институт им. Г. М. Кржижановского). Ему было непросто совмещать работу по темам ЭНИНа с занятиями математикой. Тем не менее этот период был одним из самых продуктивных в его жизни. В ЭНИНе Игорь стал заметным человеком, отчасти благодаря тому, что был молодым кандидатом, а затем и доктором наук, но главным образом благодаря таланту прикладного математика: многие обращались к нему за математической консультацией.

В 1972 г. Игорь женился на Н. А. Смоляровой, и в 1974 г. у них родилась дочь Татьяна, ныне известный филолог, профессор. Игорь с Наташей прожили вместе сорок лет вплоть до ее безвременной кончины в январе 2013 г.

Во второй половине 1980-х И. М. Кричевер недолго работал в Институте проблем механики АН СССР. Потом были годы работы в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау, совпавшие с началом поездок за границу. В 1988 г. Игорь Моисеевич впервые поехал на конференцию в “кап. страну”, а именно в Великобританию, в г. Суонси (до этого его, как многих, не пускали даже в Болгарию). В 1996 г. И. М. Кричевер принял приглашение и стал профессором Колумбийского университета (Нью-Йорк, США), где преподает до сих пор, совмещая это с работой в ИТФ им. Л. Д. Ландау, ИППИ, ВШЭ и Сколтехе.

В конце 1960-х – начале 1970-х годов в школе С. П. Новикова в центре внимания была теория кобордизмов в задачах алгебраической топологии. По этой теме Кричевер написал замечательные работы (1971–1976) о родах Хирцебруха гладких многообразий с действием компактных групп Ли. Его результаты далеко развили результаты М. Ф. Атьи и Ф. Хирцебруха, полученные на основе знаменитой теоремы Атьи–Зингера. Кричевер применил новый подход, использующий глобальные аналитические свойства соотношений Коннера–Флойда. Он ввел эквивариантный род Хирцебруха со значениями в кольце формальных рядов, получил формулу локализации этих родов для действий группы S^1 на почти комплексных многообразиях и указал условия, при которых род является жестким, т. е. константой. Он вернулся к этой теме позднее, когда большое внимание было привлечено к гипотезе Виттена о жесткости эллиптического рода для действий группы S^1 на спинорных многообразиях. В 1990 г. Кричевер опубликовал работу, в которой ввел род Хирцебруха на основе эллиптической функции Бейкера–Ахиезера и доказал, что соответствующий ему эквивариантный род является жестким для S^1 -многообразий с нулевым первым классом Черна. Этот род получил большую известность и нашел ряд важных приложений. Теперь в мировой литературе этот род называется родом Кричевера. Формула Кричевера локализации эквивариантного рода позволила получить универсальный эквивариантный род с явными формулами его локализации для действий торов на стабильно комплексных многообразиях (В. М. Бухштабер, Н. Рэй, 2007) и развить теорию этого рода (В. М. Бухштабер, Н. Рэй, Т. Е. Панов, 2010), которая широко используется сейчас в задачах торической топологии.

В 1975 г. И. М. Кричевер защитил кандидатскую диссертацию на тему “Формальные группы и неподвижные подмногообразия действий компактных групп Ли”. К этому времени уже были выполнены работы С. П. Новикова, Б. А. Дубровина, В. Б. Матвеева и А. Р. Итса, посвященные конечнозонным периодическим задачам теории солитонов и квантовой механики, и С. П. Новиков пригласил Кричевера подключиться к тематике по теории солитонов. Игорь Моисеевич быстро вник в суть этой области и начиная с 1975 г. выполнил несколько замечательных работ. Они были посвящены следующим двум проблемам.

1. И. М. Гельфанд, увидев появление коммутирующих операторов в этих задачах, поставил перед Кричевером вопрос об их классификации. Работы Бурхалла и Чаунди 1920-х годов тогда не были нам известны.

2. С. П. Новиков поставил задачу о нахождении двоякопериодических решений для $(2+1)$ -системы Кадомцева–Петвиашвили (КП), алгебраическая интегрируемость которой была незадолго до этого открыта в работах В. Е. Захарова–А. Б. Шабата и В. С. Дрюма.

В работах Кричевера эти две проблемы были решены в рамках одного метода *в случае пар коммутирующих операторов взаимно простых порядков*. В [1] было проинтегрировано уравнение КП. Это уравнение, впервые появившееся в физике плазмы, описывает эволюцию квазиодномерных волн в нелинейных системах с дисперсией достаточно общего вида. Построение алгебро-геометрических решений уравнения КП в [1] было осуществлено Кричевером с использованием предложенной им аксиоматики функций Бейкера–Ахиезера. Его процедура стартует с произвольной алгебраической кривой Γ , на которой отмечена точка, зафиксирован локальный параметр $z = 1/k$ в ее окрестности и выбран дивизор D степени, равной роду кривой. Тогда в общем положении существует единственная функция $\psi(\gamma, x, y, t)$ на Γ , зависящая от параметров x, y, t и обладающая следующими свойствами:

- 1) для любых фиксированных x, y, t она мероморфна по γ на кривой Γ вне отмеченной точки и ее дивизор подчинен дивизору D ;
- 2) в отмеченной точке она имеет существенную особенность по γ специального вида

$$\psi = (1 + o(1)) \exp(kx + k^2 y + k^3 t).$$

Из существования и единственности такой функции несложно выводится, что она является собственной функцией пары линейных операторов, входящих в пару Лакса для КП, и, следовательно, потенциалы этих операторов удовлетворяют КП. Явные формулы для решений в терминах тета-функций Римана были приведены И. М. Кричевером в работах [3], [4].

Из этих работ выросли следующие направления исследований.

а) Теория периодических двумерных операторов Шрёдингера алгебро-геометрических на одном уровне энергии и связанных с ними динамик, задаваемых L-A-B-тройками Манакова (сотрудника Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау) вместо L-A-пар Лакса. В 1976 г. С. В. Манаков построил интегрируемые уравнения с двумя пространственными переменными, допускающие представление вида $\partial_t L = [L, A] + BL$, переходящее в представление Лакса после ограничения на нулевой уровень энергии. Периодическая задача на одном уровне энергии естественно возникает в физике твердого тела, поскольку за проводимость металлов (полупроводников) отвечают электроны с энергией, равной энергии Ферми. Поверхность уровня графика дисперсионного соотношения, отвечающая энергии Ферми, называется

Ферми-поверхностью, а в двумерном случае – Ферми-кривой. В работе Дубровина, Кричевера и Новикова [2] было введено важное понятие конечнозонных на одном уровне энергии двумерных операторов Шрёдингера, для которых Ферми-кривая после аналитического продолжения оказывается комплексной кривой конечного рода. Для них как потенциалы, так и собственные функции, отвечающие энергии Ферми, явно выражаются в тета-функциях Римана.

В работе [15] 1989 г. И. М. Кричевер построил спектральную теорию Флоке двумерных периодических дифференциальных операторов на одном уровне энергии. На ее основе была доказана плотность алгебро-геометрических решений среди решений периодической задачи для уравнения КП-2, а также плотность алгебро-геометрических потенциалов среди периодических потенциалов двумерного оператора Шрёдингера. Эта теория позднее получила большое развитие, в том числе в работах Кричевера с его учениками и коллегами в самое последнее время.

В работах А. П. Веселова и С. П. Новикова были найдены редукции, отвечающие операторам с нулевым магнитным полем, при которых возникают кривые с инволюцией, а якобианы редуцируются к примитивам; в работах П. Г. Гриневича, А. Е. Миронова и С. П. Новикова были выделены данные, отвечающие чисто магнитным операторам. Положительный ответ на один из вопросов об M -кривых, поставленный в работах Новикова–Веселова, был дан в недавней работе А. В. Ильиной, И. М. Кричевера и Н. А. Некрасова [27].

б) После полезной, но не эффективной работы В. Г. Дринфельда (и Д. Мамфорда) Кричевер и Новиков развили эффективный метод классификации коммутирующих пар операторов *не взаимно простых* порядков, а также показали, что эти коммутирующие пары подвергаются деформации с помощью системы КП. Эта деформация порождает деформацию векторных расслоений над римановыми поверхностями. Уже в простых случаях она параметризуется нелинейной системой типа КдФ, пропущенной, кстати, при классификации в школе А. Б. Шабата [6]. В результате классификация была подправлена.

В это время выяснилось, что коммутирующие пары операторов взаимно простых порядков изучались Бурхналлом и Чаунди в 1920-х годах. Они указали, что для операторов не взаимно простых порядков это трансцендентная проблема. После выхода их работы Бейкер предложил программу использования тета-функций для описания общих собственных функций этих операторов, но не реализовал эту программу. Именно эту программу, вместе с приложениями в теории солитонов, реализовал Кричевер. Новиков и Кричевер сильно продвинули решение проблемы Бурхналла–Чаунди классификации пар коммутирующих операторов не взаимно простых порядков. Их метод не требует вычисления общих собственных функций и, таким образом, обходит трансцендентные трудности, на которые указали Бурхналл и Чаунди.

В 1984 г. Кричевер защитил докторскую диссертацию на тему “Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений и в некоторых задачах физики твердого тела”.

с) Третье направление исследований, выросшее из работ Кричевера, посвящено гипотезе Новикова по классической проблеме Шоттки: как эффективно выделить якобианы алгебраических кривых из общих абелевых многообразий? Эта проблема вплоть до 1986 г. оставалась одной из самых старых и знаменитых проблем алгебраической геометрии. История проблемы Шоттки и задачи Новикова, приведшей к ее решению, детально описана в обзоре [22].

Отметим роль Кричевера в постановке и решении этой проблемы. Конструкция Кричевера конечнозонных решений уравнения КП привела Новикова к следующей гипотезе: *симметрическая $(g \times g)$ -матрица B с положительно определенной мнимой частью является матрицей b -периодов базиса нормированных голоморфных дифференциалов на некоторой гладкой алгебраической кривой рода g тогда и только тогда, когда найдутся g -мерные векторы U, V и W такие, что функция*

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \log \theta(Ux + Vy + Wt + Z | B)$$

для любого $Z \in \mathbb{C}^g$ является решением уравнения КП

$$3u_{yy} = (4u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x,$$

где $\theta(Z | B)$ – это тета-функция главно поляризованного абелева многообразия $\mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + B\mathbb{Z}^g\}$.

Первые шаги в направлении доказательства гипотезы Новикова были сделаны Б. А. Дубровиным (1981), Э. Арбарелло–К. де Кончини и М. Муласе. Окончательное решение получил японский математик Т. Шиота, ученик Д. Мамфорда, несколько лет спустя, в 1986 г.

Теоремы Коши и Вейерштрасса характеризуют экспоненты и эллиптические функции в терминах теорем сложения. В. М. Бухштабер и И. М. Кричевер развили эти результаты в рамках проблемы Шоттки. Ими было введено понятие g -мерного функционального уравнения ранга N , решения которого названы функциями ранга N , и было показано, что

- 1) тета-функции общего абелева g -мерного многообразия являются функциями ранга $N \leq 2^g - 1$;
- 2) ранг тета-функций якобианов кривых рода g не превосходит g .

В результате была выдвинута гипотеза Бухштабера–Кричевера (1993): *функция $\theta(Z | B)$ имеет ранг N , не превосходящий g , тогда и только тогда, когда B является матрицей b -периодов голоморфных дифференциалов на римановой поверхности рода g* . Эта гипотеза в условиях общего положения параметров функционального уравнения ранга N была доказана С. М. Грушевским в работах 2004 и 2005 гг.

В середине 1980-х годов, после появления уравнения Новикова–Веселова, решения которого выражаются через тета-функции двулистных накрытий римановых поверхностей с двумя точками ветвления, С. П. Новиков выдвинул аналог своей гипотезы: *многообразия Прима таких накрытий выделяются подстановкой полученных тета-функциональных формул в уравнение Новикова–Веселова*. Доказательство этой гипотезы с точностью до неприводимых компонент было получено И. А. Таймановым.

В начале 2000-х годов Кричевер предложил характеризовать многообразия Якоби и Прима не в терминах солитонных уравнений, а посредством связанных с ними линейных задач. Этот подход позволил ему получить новое решение проблемы Шоттки для многообразий Якоби, решить аналогичную проблему для многообразий Прима и доказать известную в алгебраической геометрии гипотезу Велтерса о тройной секущей. Кричевер показал, что *неразложимое главно поляризованное абелево многообразие $\mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + B\mathbb{Z}^g\}$ является многообразием Якоби римановой поверхности тогда и только тогда, когда существуют такие постоянные p, E и g -мерные векторы U, V, A , что линейное уравнение*

$$(\partial_y - \partial_x^2 + u(x, y))\psi = 0$$

с потенциалом $u = 2\partial_x^2 \log \theta(Ux + Vy + Z \mid B)$ имеет решение вида

$$\psi = \frac{\theta(A + Ux + Vy + Z \mid B)}{\theta(Ux + Vy + Z \mid B)} \exp(px + Ey).$$

Для многообразий Прима аналог проблемы Шоттки решается следующей теоремой Кричевера: *неразложимое главно поляризованное абелево многообразие $\mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + B\mathbb{Z}^g\}$ является многообразием Прима двулистного накрытия гладкой римановой поверхности рода g с двумя точками ветвления тогда и только тогда, когда существуют g -мерные векторы U, V и постоянные C, p, E такие, что уравнение*

$$(\partial_x \partial_t + u)\psi = 0$$

выполняется для

$$\begin{aligned} u &= 2\partial_x \partial_t \log \theta(A + Ux + Vt + Z \mid B) + C, \\ \psi &= \frac{\theta(A + Ux + Vt + Z \mid B)}{\theta(Ux + Vt + Z \mid B)} \exp(px + Et). \end{aligned}$$

В обоих случаях θ – это тета-функция соответствующего абелева многообразия.

В работе [25] Кричевер вместе с Грушевским показали, что *главно поляризованное абелево многообразие является многообразием Прима тогда и только тогда, когда у многообразия Куммера есть пара симметричных четверных секущих плоскостей* (где симметричность понимается в том смысле, что точки сечения переходят одна в другую при инволюции вида $z \mapsto a - z$ абелева многообразия). Для этого потребовалось ввести и проинтегрировать дискретный аналог иерархии Веселова–Новикова.

Важным направлением работ Кричевера, открытым статьей [5], было распространение алгебро-геометрического метода интегрирования на системы, у которых все переменные или часть их дискретны. В серии работ, часть из которых выполнена в соавторстве с И. Е. Дзялошинским, С. А. Бразовским и Я. Хронеком (см. [7]–[10], [14]), была проинтегрирована дискретная модель Пайерлса–Фрелиха и исследованы ее возмущения. Было найдено основное состояние модели, а также волны звука и зарядовой плотности в возмущенной модели. Модель Пайерлса описывает появление щели в спектре квазиодномерного проводника за счет деформации кристаллической решетки из-за взаимодействия с электронным газом и, как следствие, переход в состояние полупроводника.

В начале 2000-х годов была выполнена фундаментальная работа Новикова и Кричевера, посвященная разностным коммутирующим операторам. В последующие годы Кричевер неоднократно возвращался к исследованию разностных интегрируемых систем.

В работе [13] Кричевер построил алгебро-геометрическую теорию усреднения для двумерных интегрируемых уравнений теории солитонов, вывел уравнения Уизема для многофазных решений уравнений типа уравнения КП и дал конструкцию их точных решений.

Метод Уизема (1965) позволяет строить важный класс быстро осциллирующих асимптотических решений нелинейных эволюционных уравнений. В безразмерном виде такие решения, по крайней мере их главная часть, представляются в виде

$$w(x, t, \varepsilon) \approx f\left(\frac{S(x, t)}{\varepsilon} + \theta(x, t), I(x, t), x, t\right),$$

где ε – малый параметр, характеризующий размеры осцилляций, t – время, x – пространственная переменная (вообще говоря, n -мерная). Гладкая функция (*фаза*) $S(x, t)$ может быть скалярной – в этом случае говорят об однофазовых асимптотических решениях, или векторнозначной – в этом случае говорят о многофазовых асимптотических решениях; гладкая (вектор-) функция $\theta(x, t)$ называется фазовым сдвигом.

Многофазовые асимптотики w описывают, например, взаимодействие цугов волн, эффекты отражения волновых пакетов от границы. В этом случае функция f выражается через конечнозонные периодические решения (через тета-функции Римана), которые были получены в работах С. П. Новикова, Б. А. Дубровина, В. Б. Матвеева, А. Р. Итса. На этот факт было указано почти одновременно в работах С. Ю. Доброхотова и В. П. Маслова (1979) и Г. Фляшки, М. Г. Фореста и Д. У. Маклафлина (1980).

Задача нахождения асимптотики w сводится к нахождению “медленно меняющихся параметров” (функций) $I(t, x)$. Вывод уравнений для I часто называют методом усреднения, поскольку их коэффициенты получаются в результате интегрирования по переменным τ по ячейке с периодами $2 - \pi$ (или по соответствующей ячейке по переменным y) функции f и ее производных. В случае, когда x одномерно, а коэффициенты исходного уравнения не зависят от t, x , эта система, в конечном итоге, записывается в виде $I_t = G(I)I_x$, где $G(I)$ – квадратная матрица. Эти уравнения и называются *уравнениями Уизема*. “Удачный выбор” параметров I означает, что они представляют собой инварианты Римана, в которых G диагональна.

В рамках подхода Кричевера уравнения Уизема возникают как необходимые условия того, что асимптотическое решение остается справедливым на временах порядка $t \approx \varepsilon^{-1}$. Метод, предложенный Кричевером, дает новый способ вывода и новую эффективную форму уравнений Уизема уже в случае одной пространственной переменной.

Дальнейшее развитие идей, заложенных в работе [13] (а также, позднее, в [17]), привело к единой конструкции симплектических форм, возникающих как в теории интегрируемых систем, так и в суперсимметричных теориях Янга–Миллса при $N = 2$. Это было сделано в серии совместных работ И. М. Кричевера и Д. Фонга, первая из которых, [19], появилась в 1997 г. В этих работах было дано систематическое изложение основ двух упомянутых выше теорий, подчеркивающее их глубокую связь, замеченную физиками-теоретиками (Зайберг, Виттен, Клемм и др.) в 1994–1995 гг. Кричевером и Фонгом в общем виде была доказана гамильтоновость уравнений Лакса, развит общий подход к построению переменных “действие-угол” для интегрируемых систем. В частности, было получено обобщение формулы Новикова–Веселова для аналитических скобок Пуассона на случай, когда спектральные кривые не являются гиперэллиптическими.

И. М. Кричевер, совместно с А. С. Горским, А. В. Маршаковым, А. Д. Мироновым и А. Ю. Морозовым [18], впервые установил связь решения Виттена–Зайберга суперсимметричных калибровочных теорий при $N = 2$ с теорией интегрируемых систем. Работа [18] стала отправной точкой многочисленных исследований. Важным этапом на этом пути явилась фундаментальная работа [17], в которой Кричевером была введена в наибольшей общности квазиклассическая тау-функция. Результаты этой работы вошли в качестве составного блока в современный метод топологической рекурсии, где возник термин *дифференциалы Уизема–Кричевера*.

И. М. Кричевером, в цикле работ с П. Вигманом, А. В. Забродным и А. В. Маршаковым, была установлена связь теории бездисперсионной двумеризованной цепочки Toda с задачами лапласовского роста в широком классе моделей агрегации.

В серии работ [11], [12], [16] Кричевер и Новиков построили формализм операторного квантования струны, согласованный с фейнмановским квантованием Полякова. При этом они определили аналоги алгебр Гейзенберга и Вирасоро для римановых поверхностей, известные ныне как алгебры Кричевера–Новикова. Эти алгебры представляют собой новый класс алгебр – *почти градуированные* алгебры. Свойство почти градуированности является промежуточным между свойством градуированности и наличием фильтрации. Оно позволяет рассматривать представления, порожденные старшим вектором (фоковские пространства), а также представления в пространствах полубесконечных внешних форм. Эти работы Кричевера и Новикова получили развитие и обобщение с разных точек зрения в ряде работ, в том числе в двух монографиях – О. К. Шейнмана (2012) и М. Шлихенмайера (2014).

В 2001 г. Кричевер построил теорию уравнений Лакса и уравнений нулевой кривизны на алгебраических кривых произвольного рода и предложил полевое обобщение известной системы Хитчина.

Как указано выше, Кричевер и Новиков связали решение проблемы Бурхалла–Чаунди с эффективным нахождением решений ранга больше 1 солитонных уравнений. Это привело к использованию оснащенных расслоений и их параметров, введенных ранее А. Н. Тюриным. Используя эти идеи, Кричевер [20] построил представление Лакса (нулевой кривизны) со спектральным параметром на римановой поверхности произвольного рода, развил гамильтонову теорию соответствующих систем и технику их алгебро-геометрического интегрирования. В случае конечного числа степеней свободы основными примерами таких систем являются системы Хитчина и Калоджеро–Мозера.

Ранее В. Е. Захаровым и А. В. Михайловым было отмечено, что уравнения нулевой кривизны на римановой поверхности положительного рода являются переопределенными. Кричевер ввел параметры Тюрина в операторы Лакса и тем самым решил проблему переопределенности. В результате возникла элегантная и общая теория, которая применима как к системам Хитчина и Калоджеро–Мозера, так и к классическим интегрируемым системам. В последовавшей в том же году работе [21] Кричевер применил эту технику к уравнениям изомонодромной деформации для связностей на римановых поверхностях.

В работе [23] было замечено, что при фиксированных параметрах Тюрина операторы Лакса образуют ассоциативную алгебру, а в случае G -расслоений (где G – комплексная редуктивная группа Ли) они образуют алгебры Ли, названные *алгебрами операторов Лакса*. Алгебры операторов Лакса, как и алгебры Кричевера–Новикова, принадлежат классу почти градуированных алгебр Ли.

В последнее время Кричевер вместе с соавторами развил новый подход к изучению геометрии и топологии пространства модулей римановых поверхностей, использующий вещественно-нормированные дифференциалы. Современное изучение таких дифференциалов началось с работ Кричевера и Кричевера–Фонга и в большой степени было мотивировано вопросами теории Уизема, обсуждавшейся выше. В работе [24] И. М. Кричевером совместно с С. М. Грушевским получено новое короткое доказательство классической теоремы Диаза: *любое компактное комплексное подмногообразие в пространстве модулей кривых $\mathcal{M}_g$ имеет комплексную размерность*

не более $g - 2$, а в последующей работе [26] дано доказательство более общей гипотезы Арбарелло: *любое компактное комплексное подмногообразие размерности $g - n$ в M_g пересекает локус Вейерштрасса.*

Заканчивая этот по необходимости краткий обзор, мы с удовольствием отмечаем, что юбиляр не теряет темпа научной работы и, как всегда, окружен коллегами и учениками. Авторы желают И. М. Кричеверу дальнейших успехов в исследованиях, преподавании и на ответственном посту директора Центра перспективных исследований Сколтеха.

В. М. Бухштабер, А. Н. Варченко, А. П. Веселов,
П. Г. Гриневич, С. М. Грушевский, С. Ю. Доброхотов,
А. В. Забродин, А. В. Маршаков, А. Е. Миронов,
Н. А. Некрасов, С. П. Новиков, А. Ю. Окуньков,
М. А. Ольшанецкий, А. К. Погребков, И. А. Тайманов,
М. А. Цфасман, Л. О. Чехов, О. К. Шейнман, С. Б. Шлосман

Список литературы

- [1] И. М. Кричевер, “Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова–Шабата и их периодических решений”, *Докл. АН СССР*, **227**:2 (1976), 291–294; англ. пер.: I. M. Krichever, “Algebraic-geometric construction of Zakharov–Shabat equations and their periodic solutions”, *Soviet Math. Dokl.*, **17**:2 (1976), 394–397.
- [2] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности”, *Докл. АН СССР*, **229**:1 (1976), 15–18; англ. пер.: B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, S. P. Novikov, “The Schrödinger equation in a periodic field and Riemann surfaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **17** (1977), 947–951.
- [3] И. М. Кричевер, “Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений”, *УМН*, **32**:6(198) (1977), 183–208; англ. пер.: I. M. Krichever, “Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations”, *Russian Math. Surveys*, **32**:6 (1977), 185–213.
- [4] И. М. Кричевер, “Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии”, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:1 (1977), 15–31; англ. пер.: I. M. Krichever, “Integration of nonlinear equations by the methods of algebraic geometry”, *Funct. Anal. Appl.*, **11**:1 (1977), 12–26.
- [5] И. М. Кричевер, “Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения”, *УМН*, **33**:4(202) (1978), 215–216; англ. пер.: I. M. Krichever, “Algebraic curves and non-linear difference equations”, *Russian Math. Surveys*, **33**:4 (1978), 255–256.
- [6] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения”, *УМН*, **35**:6(216) (1980), 47–68; англ. пер.: I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Holomorphic bundles over algebraic curves and non-linear equations”, *Russian Math. Surveys*, **35**:6 (1980), 53–79.
- [7] И. М. Кричевер, “Спектральная теория разностных операторов, алгебраическая геометрия и модель Пайерлса”, В ст.: “Заседания семинара имени И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики”, *УМН*, **37**:2(224) (1982), 259–260.
- [8] И. М. Кричевер, “Алгебро-геометрическая спектральная теория разностного оператора Шредингера и модель Пайерлса”, *Докл. АН СССР*, **265**:5 (1982), 1054–1058; англ. пер.: I. M. Krichever, “Algebro-geometric spectral theory of the Schrödinger difference operator and the Peierls model”, *Soviet Math. Dokl.*, **265**:1 (1982), 194–198.

- [9] И. М. Кричевер, “Модель Пайерлса”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 10–26; англ. пер.: I. M. Krichever, “The Peierls model”, *Funct. Anal. Appl.*, **16**:4 (1982), 248–263.
- [10] И. М. Кричевер, “Спектральная теория ‘конечнозонных’ нестационарных операторов Шрёдингера. Нестационарная модель Пайерлса”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:3 (1986), 42–54; англ. пер.: I. M. Krichever, “Spectral theory of finite-zone nonstationary Schrödinger operators. A nonstationary Peierls model”, *Funct. Anal. Appl.*, **20**:3 (1986), 203–214.
- [11] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов”, *Функц. анализ и его прил.*, **21**:2 (1987), 46–63; англ. пер.: I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Algebras of Virasoro type, Riemann surfaces and structures of the theory of solitons”, *Funct. Anal. Appl.*, **21**:2 (1987), 126–142.
- [12] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского”, *Функц. анализ и его прил.*, **21**:4 (1987), 47–61; англ. пер.: I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Virasoro-type algebras, Riemann surfaces and strings in Minkowsky space”, *Funct. Anal. Appl.*, **21**:4 (1987), 294–307.
- [13] И. М. Кричевер, “Метод усреднения для двумерных ‘интегрируемых’ уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:3 (1988), 37–52; англ. пер.: I. M. Krichever, “Method of averaging for two-dimensional “integrable” equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:3 (1988), 200–213.
- [14] И. Е. Дзялошинский, И. М. Кричевер, Я. Хронек, “Новый метод нахождения динамических решений в модели Пайерлса”, *ЖЭТФ*, **94**:7 (1988), 344–354; англ. пер.: I. E. Dzyaloshinskii, I. M. Krichever, J. Chronек, “New method of finding dynamic solutions in the Peierls model”, *Soviet Phys. JETP*, **67**:7 (1988), 1492–1498.
- [15] И. М. Кричевер, “Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения”, *УМН*, **44**:2(266) (1989), 121–184; англ. пер.: I. M. Krichever, “Spectral theory of two-dimensional periodic operators and its applications”, *Russian Math. Surveys*, **44**:2 (1989), 145–225.
- [16] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях”, *Функц. анализ и его прил.*, **23**:1 (1989), 24–40; англ. пер.: I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Algebras of Virasoro type, energy-momentum tensor, and decomposition operators on Riemann surfaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **23**:1 (1989), 19–33.
- [17] I. M. Krichever, “The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475; 1992, 34 pp., arXiv: hep-th/9205110.
- [18] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, “Integrability and Seiberg–Witten exact solution”, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–474; 1995, 13 pp., arXiv: hep-th/9505035.
- [19] I. M. Krichever, D. H. Phong, “On the integrable geometry of soliton equations and $N = 2$ supersymmetric gauge theories”, *J. Differential Geom.*, **45**:2 (1997), 349–389; 1996, 38 pp., arXiv: hep-th/9604199.
- [20] I. Krichever, “Vector bundles and Lax equations on algebraic curves”, *Comm. Math. Phys.*, **229**:2 (2002), 229–269; 2001, 42 pp., arXiv: hep-th/0108110.
- [21] I. Krichever, “Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Whitham equations”, *Mosc. Math. J.*, **2**:4 (2002), 717–752.
- [22] В. М. Бухштабер, И. М. Кричевер, “Интегрируемые уравнения, теоремы сложения и проблема Римана–Шоттки”, *УМН*, **61**:1(367) (2006), 25–84; англ. пер.: V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, “Integrable equations, addition theorems, and the Riemann–Schottky problem”, *Russian Math. Surveys*, **61**:1 (2006), 19–78.

- [23] И. М. Кричевер, О. К. Шейнман, “Алгебры операторов Лакса”, *Функц. анализ и его прил.*, **41**:4 (2007), 46–59; англ. пер.: I. M. Krichever, O. K. Sheinman, “Lax operator algebras”, *Funct. Anal. Appl.*, **41**:4 (2007), 284–294.
- [24] S. Grushevsky, I. Krichever, “The universal Whitham hierarchy and the geometry of the moduli space of pointed Riemann surfaces”, *Geometry of Riemann surfaces and their moduli spaces*, Surv. Differ. Geom., **14**, Int. Press, Somerville, MA, 2009, 111–129.
- [25] S. Grushevsky, I. Krichever, “Integrable discrete Schrödinger equations and a characterization of Prym varieties by a pair of quadrisecants”, *Duke Math. J.*, **152**:2 (2010), 317–371.
- [26] И. М. Кричевер, “Вещественно-нормированные дифференциалы и гипотеза Арбарелло”, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:2 (2012), 37–51; англ. пер.: I. M. Krichever, “Real normalized differentials and Arbarello’s conjecture”, *Funct. Anal. Appl.*, **46**:2 (2012), 110–120.
- [27] А. В. Ильина, И. М. Кричевер, Н. А. Некрасов, “Двумерные периодические операторы Шредингера, интегрируемые на “собственном” уровне энергии”, *Функц. анализ и его прил.*, **53**:1 (2019), 31–48; англ. пер.: A. V. Ilyina, I. M. Krichever, N. A. Nekrasov, “Two-dimensional periodic Schrödinger operators integrable at an energy eigenlevel”, *Funct. Anal. Appl.*, **53**:1 (2019), 23–36.