Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Классификация минимальных скелетов с правильной границей, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1002>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:36:27

КЛАССИФИКАЦИЯ МИНИМАЛЬНЫХ СКЕЛЕТОВ С ПРАВИЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Задача описания всех плоских локально минимальных сетей, затачивающих вершины правильных многоугольников (в дальнейшем – сетей с *правильной границей*), была поставлена академиком А. Т. Фоменко [1]. В качестве первого шага на пути решения этой задачи, авторы начали изучение локально минимальных бинарных деревьев с правильной границей [2]–[6]. В настоящей работе получено полное описание всех возможных топологий важного класса таких деревьев – минимальных скелетов с правильной границей (см. ниже).

Хорошо известно, что *минимальные бинарные деревья* могут быть полностью описаны как плоские бинарные деревья, все ребра которых – прямолинейные отрезки, стыкующиеся между собой в вершинах степени 3 под углами, равными 120° . Множество M всех вершин степени 1 из Γ называется *границей* Γ . Если M лежит на границе своей выпуклой оболочки, то говорят, что Γ имеет *выпуклую границу*.

Существует естественное взаимно однозначное соответствие (с точностью до планарной эквивалентности) между плоскими бинарными деревьями и триангуляциями диагоналями плоских многоугольников (двойственный граф каждой такой триангуляции является бинарным деревом).

Пусть T – некоторая диагональная триангуляция многоугольника P . *Степенью вершины* V триангуляции T называется количество треугольников из T , для которых V является вершиной. Сторона многоугольника P называется *концевой*, если степени ее вершин равны 1 и 2. Треугольник из T назовем *крайним*, если не меньше двух его сторон лежит на границе многоугольника P . Если все стороны треугольника из T лежат внутри P , то он называется *внутренним*. Крайний треугольник называется *наростом*, если он примыкает к некоторому внутреннему треугольнику. Триангуляция T , не имеющая наростов, называется *скелетом*. Плоское 2-дерево Γ назовем *скелетом*, если соответствующая триангуляция T является скелетом.

Пусть T – некоторый скелет. Выбросим из скелета T все внутренние треугольники. Связные компоненты полученной триангуляции называются *линейными участками* скелета T . Линейный участок скелета T называется *концом* скелета T , если он содержит крайний треугольник из T . Скелет, совпадающий со своим единственным концом, называется *линейным*. Линейный скелет называется *змеей*, если степень каждой его вершины не превосходит 3. Конец нелинейного скелета называется *змеей*, если он является змеей как скелет и пересекается с внутренним треугольником из T по одному из своих концевых ребер.

Из результатов [2]–[6] вытекает, что если минимальный скелет Γ затачивает вершины выпуклого многоугольника, то число концов скелета Γ не превосходит 6. В настоящей работе получена полная классификация всех минимальных скелетов с правильной границей с точностью до планарной эквивалентности.

ТЕОРЕМА. Пусть M – множество вершин правильного многоугольника и $n \geq 3$ – количество его вершин.

- Если остаток от деления n на 6 равен трем и $n \geq 9$, то существуют два затачивающих M минимальных скелета, один из которых является змеей, а другой имеет три планарно эквивалентных между собой конца-змеи, причем степени вершин единственного внутреннего треугольника этого скелета равны между собой.
- Если n равно 24, 30, 36 или 42, то существуют два затачивающих M минимальных скелета, один из которых является змеей, а триангуляция второго изображена на рисунке.

Авторы пользуются частичной поддержкой грантов Международного научного фонда (ISF), Международной Ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS) и Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ).

- Во всех остальных случаях существует единственный минимальный скелет Γ , затягивающий M , и этот скелет является змеей.

Теперь, для завершения описания всех минимальных бинарных деревьев с правильной границей, необходимо разобраться, как могут быть расположены наросты на соответствующих триангуляциях. См. примеры в [4], [5], [7].

Авторы пользуются случаем выразить искреннюю признательность академику А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фоменко А. Т. Топологические вариационные задачи. М.: Изд-во МГУ, 1984. [2] Иванов А. О., Тужилин А. А. // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 207–208. [3] Иванов А. О., Тужилин А. А. // Матем. сб. 1991. Т. 182. №12. С. 1813–1844. [4] Иванов А. О., Тужилин А. А. // УМН. 1992. Т. 47. №2. С. 53–115. [5] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. // Adv. Soviet Math. 1993. V. 15. P. 93–131. [6] Иванов А. О., Тужилин А. А. // УМН. 1995. Т. 50. №3. С. 155–156. [7] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations. CRC Press, 1994.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
18.04.1996