Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Конягин, Н. Г. Мощевитин, Представление рациональных чисел конечными цепными дробями, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1003>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 09:35:42

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ КОНЕЧНЫМИ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

С. В. Конягин, Н. Г. Мошевитин

Пусть A, k, q – натуральные числа, $q > 1, 1 \leq A < q, (A, q) = 1, \varphi(q) = \#\{A\}$. Через $N(k, q)$ мы будем обозначать количество чисел A таких, что $1 \leq A < q, (A, q) = 1$ и что все неполные частные разложения в цепную дробь

$$\frac{A}{q} = [0; B_1, \dots, B_{n(A)}]$$

ограничены величиной $k: B_i \leq k, i = 1, \dots, n(A)$. Известно [1], [2], что если $k > \gamma \log q$ с достаточно большой константой γ , то $N(k, q) \geq 1$. (Более того, для большинства чисел $A, 1 \leq A < q$, неполные частные ограничены величиной $O(\log q)$.) Не доказанная до сих пор гипотеза предполагает, что $N(6, q) \geq 1 \forall q$. В настоящей заметке мы доказываем, что чисел с ограниченными неполными частными не может быть слишком много.

ТЕОРЕМА 1. Для любой постоянной $\gamma < 1$ и для любого $k \geq k(\gamma)$ имеет место оценка

$$N(k, q) \ll \varphi(q) q^{-\frac{\gamma}{k \log k}}.$$

Почти арифметической прогрессией (п.а.п.) назовем множество натуральных чисел $A_1 < A_2 < \dots < A_{d^*}$, удовлетворяющее условию

$$(1) \quad \exists w > 0 : w \leq A_{j+1} - A_j \leq 3w \quad \forall j = 1, \dots, d^* - 1.$$

Через $d^*(k)$ обозначим такое минимальное d^* , что для любой п.а.п. $\{A_1, A_2, \dots, A_{d^*}\}$ и любого $q > A_{d^*}$ среди разложений в конечную цепную дробь $A_i/q = [B_{i,1}, \dots, B_{i,n(i)}]$ найдется такое неполное частное $B_{i,\mu}$, для которого $B_{i,\mu} > k$. Независимо от теоремы 1, может быть доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть q – простое число. Для любой постоянной $\gamma < 1$, для любого k и $d = 2d^*(k)$ выполняется

$$N(k, q) \ll q^{1 - \frac{\gamma}{d \log d}}.$$

Аналогично теореме из работы [3] доказывается, что $2d^*(k) \ll k^3$, откуда и из теоремы 2 при $k > 1$ вытекает более слабая, чем в теореме 1, оценка вида $N(k, q) \ll q^{1 - c/(k^3 \log k)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Фиксируя γ , мы считаем, что k достаточно велико и $q > k$. Положим $l = k + 2$. Мы будем пользоваться тем, что если неполные частные в разложении числа $A/q, 1 \leq A < q, (A, q) = 1$, не превосходят k , то при любых целых $a, b, 0 < b < q$, справедливо неравенство $|A/q - a/b| > 1/(lb^2)$. Пусть n – натуральное число и $H_n = \{a/b \mid a, b \in N_0, 0 \leq a \leq b \leq n, (a, b) = 1\}$ – ряд Фарея порядка n . Мы будем писать $H_n = \{h_\nu(n)\} (\nu = 0, \dots, \Phi(n))$ и считать, что числа $h_\nu(n)$ упорядочены по возрастанию:

$$0 = h_0(n) < \dots < h_{\Phi(n)}(n) = 1.$$

Пусть $l \in N$. Для каждой точки $x = a/b = h_\nu((l+1)b), (a, b) = 1$, положим

$$I^+(x) = [x, h_{\nu+1}((l+1)b)],$$

если $x \neq 1$, и

$$I^-(x) = (h_{\nu-1}((l+1)b), x],$$

если $x \neq 0$. Если $h_{\nu+1}((l+1)b) = c/d, (c, d) = 1$, то мы имеем $b + d > (l+1)b$, т.е. $lb < d \leq (l+1)b$, откуда

$$\frac{1}{(l+1)b^2} \leq \left| I^+ \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{lb^2}$$

и, аналогично,

$$\frac{1}{(l+1)b^2} \leq \left| I^- \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{lb^2}.$$

Для $j \in Z_+$ определим $n_j = (l+1)^j$ и

$$E_{j+1} = [0, 1] \setminus \bigcup_{x \in H_{n_j} \setminus \{1\}} I^+(x) \setminus \bigcup_{x \in H_{n_j} \setminus \{0\}} I^-(x).$$

Заметим, для каждого элемента $y \notin E_{j+1}$ найдется элемент $x = a/b \in H_{n_j}$ такой, что $|x - y| < 1/(lb^2)$. Положим также $E_0 = [0, 1]$.

Покажем, что

$$(1) \quad |E_{j+1}| \leq \frac{l-1}{l+1} |E_j|.$$

Каждое множество E_j по построению есть объединение отрезков вида $[h_\nu(n_j), h_{\nu+1}(n_j)] = [a/b, c/d]$. Мы имеем

$$E_{j+1} \cap [a/b, c/d] \subset [a/b, c/d] \setminus I^+(a/b) \setminus I^-(c/d),$$

откуда

$$\begin{aligned} |E_{j+1} \cap [a/b, c/d]| &\leq \max(0, |[a/b, c/d]| - |I^+(a/b)| - |I^-(c/d)|) \\ &\leq \max(0, 1/(bd) - 1/((l+1)b^2) - 1/((l+1)d^2)) \leq \frac{l-1}{l+1} |[a/b, c/d]|, \end{aligned}$$

и (1) доказано.

Пусть $\varepsilon = (1 - \gamma)/2$ и $\mu = [(1 - \varepsilon) \log q / (2 \ln(l+1))]$. В силу (1)

$$(2) \quad |E_\mu| \leq \left(\frac{l-1}{l+1} \right)^\mu < q^{-\frac{\gamma}{k \log k}}.$$

Множество E_μ есть объединение отрезков вида $[h_\nu(n_\mu), h_{\nu+1}(n_\mu)] = [x, y]$. Так как $n_\mu \leq q^{(1-\varepsilon)/2}$, то длина каждого из этих отрезков не меньше $1/q^{1-\varepsilon} > \tau(q)/\varphi(q)$, где $\tau(q)$ — число делителей q . По формуле включений и исключений

$$\begin{aligned} \#\{A \in N : (A, q) = 1, (A/q) \in [x, y]\} &< \varphi(q)(y-x) + \tau(q) \\ &< \varphi(q)(y-x) + \varphi(q)/q^{1-\varepsilon} \leq 2\varphi(q)(y-x). \end{aligned}$$

Суммируя по всем отрезкам $[x, y]$ и учитывая (2), получаем

$$\#\{A \in N : (A/q) \in E_\mu\} < 2\varphi(q)q^{-\frac{\gamma}{k \log k}}.$$

Теорема 1 доказана.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2. Введем параметры

$$t = q^{1-\gamma/(d \log d)}, \quad \nu = \left\lceil 2 + d \log \frac{q}{t} \right\rceil;$$

$$q_j = q/d^j, \quad t_j = t/(d-1)^j; \quad j = 0, \dots, \nu.$$

Мы полагаем, что $d \leq \log q$. При достаточно большом $q > q_0$ (q_0 — некоторая эффективная постоянная, зависящая только от γ) мы имеем $q_\nu = q/d^\nu > d^\tau$, $t_\nu/(q_\nu + 1) > 1$. Из этих неравенств, применяя “жадный алгоритм”, нетрудно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{A} \subset \{1, \dots, q-1\}$ — произвольное подмножество такое, что $\#\mathfrak{A} \geq t$. Тогда найдутся j из интервала $1 \leq j \leq \nu$ и набор d интервалов

$$\Delta_1^{(j)} = [q_j m; q_j(m+1)), \dots, \Delta_d^{(j)} = [q_j(m+d-1); q_j(m+d))$$

длины q_j такие, что $\Delta_i^{(j)} \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, d$.

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ. Пусть $d^* = d/2$, $\mathfrak{A} \subset \{1, \dots, q-1\}$ — произвольное подмножество такое, что $\#\mathfrak{A} \geq t$. Тогда найдется п.а.п. $\mathfrak{B} = \{A_1, \dots, A_{d^*}\} \subset \mathfrak{A}$.

Теорема 2 немедленно вытекает из следствия леммы, ибо $d^* = d^*(k)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коробов Н. М. // УМН. 1967. Т. 22. № 3. С. 83–118. [2] Cusick T. W. // Math. Comp. 1993. V. 61. № 203. P. 171–176. [3] Мощевитин Н. Г. // Матем. записки. 1996. Т. 2. С. 99–109.