Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Луккассен, Об оценках эффективной энергии для усредненного уравнения Пуассона с p -лапласианом, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1004>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:31:41

ОБ ОЦЕНКАХ ЭФФЕКТИВНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ УСРЕДНЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С p -ЛАПЛАСИАНОМ

Д. ЛУККАССЕН

В этой работе мы получаем оценки эффективной энергии усредненной задачи для уравнения Пуассона с p -лапласианом. Мы доказываем, что полученное неравенство является точным и даже находим все случаи, когда верхняя и нижняя границы совпадают.

В $\mathbb{R}^N$ мы рассматриваем параллелепипед $Y = \prod_{j=1}^N (0, x_j^0)$ (Y – ячейка). Мы изучаем семейство уравнений Пуассона с p -лапласианом

$$-\operatorname{div} \left(\lambda \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) |Du|^{p-2} Du \right) = f \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad p > 1,$$

с краевыми данными Дирихле, где λ – Y -периодическая, ограниченная сверху и снизу положительными константами, функция, ε – малый параметр. Используя результаты усреднения монотонных операторов (см. [3]), мы получаем усредненную задачу в форме

$$-\operatorname{div}(b(Du)) = f \quad \text{в } \Omega,$$

где *усредненный оператор* $b: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ принимает следующий вид:

$$b(\xi) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda(x) |\xi + Dw^\xi(x)|^{p-2} (\xi + Dw^\xi(x)) dx,$$

где w^ξ – единственное (с точностью до постоянного слагаемого) решение *локальной задачи*:

Найти $w^\xi \in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)$ (= пространство всех Y -периодических функций $\psi \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$) такую, что

$$(1) \quad \int_Y (\lambda(x) |\xi + Dw^\xi(x)|^{p-2} (\xi + Dw^\xi(x)), Dv) dx = 0$$

для всех функций $v \in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)$.

Можно доказать (см. [1] и имеющиеся там ссылки), что w^ξ реализует минимум в вариационной задаче:

$$(2) \quad f_\lambda(\xi) = \min_{u \in W_{\text{per}}^{1,p}(Y)} \frac{1}{|Y|} \int_Y \lambda(x) |\xi + Du(x)|^p dx.$$

Заметим также, что, подставляя $v = w^\xi$ в (1), мы получим:

$$(3) \quad (b(\xi), \xi) = f_\lambda(\xi).$$

В этой работе исследуются неравенства для *эффективной энергии* $f_\lambda = (b(\cdot), \cdot)$, которые дают ее двусторонние оценки через некоторые интегральные средние от функции λ (см. [4, с. 148]). Эти неравенства обобщают оценки Винера на уравнение Пуассона с p -лапласианом. В частности, при $p = 2$ (т.е. для линейной проводимости) рассматриваемые неравенства совпадают с оценками, упомянутыми в [5]. В ряде случаев определяемые этими неравенствами нижние и верхние границы для эффективной энергии достаточно близки друг к другу и дают для нее лучшие оценки, чем полученные Хашином и Штрикманом. Ранее отмечалось [6], что в некоторых случаях получаемые нижняя и верхняя границы совпадают, вследствие чего эффективная энергия вычисляется точно. В этой работе описываются все такие случаи.

$$q_i = |Y|^{-1} \int_Y \lambda_i \, dx, \quad q^i = \left(|Y|^{-1} \int_Y (\lambda^i)^{1/(1-p)} \, dx \right)^{1-p},$$

ЛЕММА 1. *Предположим, что $f \in L^p(Y)$, где $p \geq 1$, и пусть U_1 и U_2 – подмножества Y вида $I_{i1} \times \prod_{j \neq i} I_j$ и $I_{i2} \times \prod_{j \neq i} I_j$, соответственно, где $\prod_{j \neq i} I_j \subseteq T$, $\{I_j\}$ – отрезки, и I_{i1}, I_{i2} – непересекающиеся отрезки S . Более того, предположим, что для всех таких пар (U_1, U_2)*

Тогда f не зависит от i -й координаты.

СЛЕДСТВИЕ 1. $q_i = q^i$ для $i = 1, 2, \dots, N$, если и только если $\lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_N$, где λ_j — функция только j -й координаты.

$$\begin{aligned} k_{11}(0)k_{12}(x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N) &= k_{21}(x_2)k_{22}(0, x_3, x_4, \dots, x_{N-1}, x_N), \\ k_{21}(0)k_{22}(0, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N) &= k_{31}(x_3)k_{32}(0, 0, x_4, \dots, x_{N-1}, x_N), \\ &\dots \\ 0)k_{(N-2)2}(0, 0, \dots, 0, x_{N-1}, x_N) &= k_{(N-1)1}(x_{(N-1)})k_{(N-1)2}(0, 0, \dots, 0, x_N). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Норвегия, Нарвик
Технологический институт
Кафедра математики

Принято редколлегией
21.06.1996