Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Лычагина, Нормальные формы пуассоновых структур в трехмерном пространстве, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1005>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:17:51

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПУАССОНОВЫХ СТРУКТУР В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О.В. Лычагина

В этой работе мы приведем формальную классификацию вырожденных пуассоновых структур в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Доказательства основаны на вычислении спектральной последовательности, построенной в работе [3].

Пусть ∇ – пуассонова структура в пространстве $\mathbb{R}^3$, обращающаяся в нуль в точке $m \in \mathbb{R}^3$, $\nabla_m = 0$. Линейная часть ∇ определяет структуру алгебры Ли $\mathcal{G}$ на $\mathbb{R}^3 \simeq T_m^* \mathbb{R}^3$ относительно скобки $[d_m f, d_m g] = d_m \langle \nabla, df \wedge dg \rangle$ для всех гладких функций f и g таких, что $f(m) = g(m) = 0$.

Мы не рассматриваем здесь случай полупростых алгебр Ли $\mathcal{G}$ и абелевых алгебр $\mathcal{G}$. В первом случае пуассоновы структуры формально линеаризуемы [4], во втором – нахождение нормальных форм требует вычисления коомологий алгебр Ли-Склянина [3].

Пусть $\mathcal{H} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ – коммутант алгебры Ли $\mathcal{G}$, а $\mathcal{Z}(\mathcal{G})$ – ее центр.

Возможны следующие случаи [1], [2]:

(1) $\dim \mathcal{H} = 1$, $\mathcal{H} \not\subset \mathcal{Z}(\mathcal{G})$.

ТЕОРЕМА 1. *Любая вырожденная пуассонова структура ∇ на $\mathbb{R}^3$ с линейной частью, задающей алгебру Ли типа (1), формально эквивалентна в точке m пуассоновой структуре вида $(x\partial_x + \varepsilon \cdot z^r \partial_z) \wedge \partial_y$, где $r \geq 2$, и $\varepsilon = 1$ при четном r и $\varepsilon = \pm 1$ при нечетном r , а (x, y, z) – локальные координаты в окрестности точки m , $x(m) = y(m) = z(m) = 0$.*

(2) $\dim \mathcal{H} = 1$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{G})$.

Обозначим через $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ максимальный идеал, отвечающий точке m :

$$\mu = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \mid f(m) = 0\},$$

а через μ_k , $k \geq 1$, – идеал функций порядка малости k в точке m .

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ – модуль векторных полей на $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $\mathcal{D}_2$ модуль бивекторных полей на $\mathbb{R}^3$ и, соответственно, через $\mu^k \mathcal{D}_2$ – подмодуль бивекторных полей, имеющих в точке m порядок малости k .

ТЕОРЕМА 2. *Для любой пуассоновой структуры ∇ на $\mathbb{R}^3$ с линейной частью $\nabla_1 = z\partial_x \wedge \partial_y$, задающей алгебру Ли типа (2), существует диффеоморфизм φ такой, что*

$$(\varphi)_*^{(2)}(\nabla) = ((z + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2)\partial_x \wedge \partial_y + X_H \wedge \partial_z) \bmod \mu^3 \mathcal{D}_2,$$

где $H = H(x, y)$ – однородный кубический полином, а X_H – гамильтоново векторное поле на плоскости x, y , и (x, y, z) – локальные координаты в окрестности точки m , $x(m) = y(m) = z(m) = 0$.

(3) $\dim \mathcal{H} = 2$.

Выберем произвольный элемент $z \in \mathcal{G}$, $z \notin \mathcal{H}$, и обозначим через λ_1, λ_2 спектр оператора $ad_z: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть ∇ – вырожденная пуассонова структура на $\mathbb{R}^3$ с линейной частью типа (3), а (x, y, z) – локальные координаты в окрестности точки m , $x(m) = y(m) = z(m) = 0$.*

Тогда ∇ формально эквивалентна линейной пуассоновой структуре

$$(a_{11}x + a_{12}y)\partial_z \wedge \partial_x + (a_{21}x + a_{22}y)\partial_z \wedge \partial_y,$$

если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin (\mathbb{N} \setminus \{1\})$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin (\mathbb{N} \setminus \{1\})$,
- 2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}$,
- 3) $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$.

Используя линейные преобразования, матрицу (a_{ij}) можно привести к одному из следующих видов:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & \varkappa \\ -\varkappa & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \nu, \beta, \varkappa \in \mathbb{R} \text{ и } \beta, \nu \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 4. В условиях предыдущей теоремы пауссонова структура ∇ формально эквивалентна одной из следующих линейных структур:

- 1) $\partial_z \wedge (x\partial_x + \nu y\partial_y)$, где $\nu \notin \mathbb{Q}_- \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n > 1 \right\} \cup \{n \in \mathbb{N}, n > 1\}$,
- 2) $\partial_z \wedge ((x + \beta y)\partial_x + y\partial_y)$,
- 3) $\partial_z \wedge ((x + \varkappa y)\partial_x + (y - \varkappa x)\partial_y)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964. [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. [3] Lychagina O. Schouten Brackets and Lie-Sklyanin Algebras // Preprint ISBN 82-553-0962-4, № 18. University of Oslo: Institute of Math., 1995. P. 1–28. [4] Weinstein A. // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 523–557.

Принято редколлегией
18.04.1996