Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Сабинин, О диассоциативности гладких моноальтернативных луп, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1008>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:37:04

О ДИАССОЦИАТИВНОСТИ ГЛАДКИХ МОНОАЛЬТЕРНАТИВНЫХ ЛУП

Л. В. САБИНИН

В заметке показано, что любая локальная C^2 -гладкая моноальтернативная (в частности, аналитическая альтернативная) лупа диассоциативна.

1. Лупа $\langle Q, \cdot, \varepsilon \rangle$, наделенная унарными операциями $x \mapsto tx$ ($x \in Q, t \in \mathbb{R}$), называется моноальтернативной, если $tx \cdot (ux \cdot y) = (t + u)x \cdot y$, $(y \cdot ux) \cdot tx = y \cdot (u + t)x$, для любых $x, y \in Q$; $t, u \in \mathbb{R}$.

2. ЗАМЕЧАНИЕ. Для аналитической лупы свойство альтернативности

$$x \cdot (x \cdot y) = (x \cdot x) \cdot y, \quad (y \cdot x) \cdot x = y \cdot (x \cdot x)$$

влечет моноальтернативность [1].

3. Далее мы рассматриваем C^2 -гладкие моноальтернативные лупы. В локальных координатах такие лупы описываются уравнениями [2]

$$(1) \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \frac{d(x \cdot ty)^i}{dt} &= A_j^i(x \cdot ty)(\text{Exp}^{-1} y)^j, & (x \cdot 0y)^i &= x^i, \\ \frac{d(ux \cdot y)^i}{dt} &= \alpha_j^i(ux \cdot y)(\text{Exp}^{-1} x)^j, & (0x \cdot y)^i &= y^i, \end{aligned}$$

где

$$(2) \quad A_j^i(x) = \left[\frac{\partial(x \cdot y)^i}{\partial y^j} \right]_{y=\varepsilon}, \quad \alpha_j^i(y) = \left[\frac{\partial(x \cdot y)^i}{\partial x^j} \right]_{x=\varepsilon}, \quad i, j = 1, \dots, \dim Q,$$

а $\text{Exp}: \zeta \in T_\varepsilon Q \mapsto \text{Exp} \zeta \in Q$ определяется дифференциальными уравнениями

$$(3) \quad \frac{d(\text{Exp} t\zeta)^i}{dt} = A_j^i(\text{Exp} t\zeta)\zeta^j, \quad \text{Exp}(0) = \varepsilon,$$

или, эквивалентно, в силу моноальтернативности, уравнениями

$$(4) \quad \frac{d(\text{Exp} t\zeta)^i}{dt} = \alpha_j^i(\text{Exp} t\zeta)\zeta^j, \quad \text{Exp}(0) = \varepsilon.$$

4. Скобки Ли линейно независимых векторных полей $A_i(x) = A_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$ и $\alpha_i(y) = \alpha_i^j(y) \frac{\partial}{\partial y^j}$ однозначно определяют структурные функции c_{qs}^p и $\bar{c}_{qs}^p$

$$(5) \quad [A_i, A_j](x) = c_{ij}^k(x) A_k(x), \quad [\alpha_i, \alpha_j](y) = \bar{c}_{ij}^k(y) \alpha_k(y).$$

5. Следуя [2, гл. 7], можно ввести левую касательную алгебру $\langle V, * \rangle$, $V = T_\varepsilon Q$, лупы $\langle Q, \cdot, \varepsilon \rangle$ с бинарным умножением

$$(6) \quad \xi * \eta = \xi^i c_{ij}^k(\text{Exp} \xi) \eta^j (\partial_k)_\varepsilon.$$

Аналогично определяется правая касательная алгебра $\langle V, \nabla \rangle$.

Согласно [2, гл. 7], в моноальтернативном случае

$$(7) \quad \xi^i c_{ij}^k(\text{Exp} \xi) = \xi^i \bar{c}_{ij}^k, \quad c_{ij}^k = c_{ij}^k(\varepsilon).$$

Аналогично,

$$(8) \quad \xi^i \bar{c}_{ij}^k(\text{Exp} \xi) = \xi^i c_{ij}^k, \quad \bar{c}_{ij}^k = \bar{c}_{ij}^k(\varepsilon) = -c_{ij}^k.$$

Следовательно, можно использовать только операцию $*$, так как $\xi * \eta = \eta \nabla \xi$.

6. Вводя $B_j^i(x)$ и $\beta_j^i(x)$ как обратные матрицы к $A_j^i(x)$ и $\alpha_j^i(x)$ соответственно, можно написать (см. [2, гл. 7]) дифференциальные уравнения, определяющие в нормальных координатах матрицы $B_j^i(x)$ и $\beta_j^i(x)$ при помощи c_{jk}^i . В матричной форме

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{dt\overline{\overline{B}}(ta)}{dt} &= \overline{\overline{\text{Id}}} - (\overline{\overline{\text{ad } a}})[t\overline{\overline{B}}(ta)], & [t\overline{\overline{B}}(ta)]_{t=0} &= 0, \\ \frac{dt\overline{\overline{\beta}}(tb)}{dt} &= \overline{\overline{\text{Id}}} + (\overline{\overline{\text{ad } b}})[t\overline{\overline{\beta}}(tb)], & [t\overline{\overline{\beta}}(tb)]_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

где $b^i = \text{Exp}^i(b)$, $\text{ad } b: x \mapsto b * x$.

Поэтому

$$(10) \quad \overline{\overline{B}}(a) = \frac{e^{-\overline{\overline{\text{ad } a}}} - \overline{\overline{\text{Id}}}}{(-\overline{\overline{\text{ad } a}})}, \quad \overline{\overline{\beta}}(b) = \frac{e^{-\overline{\overline{\text{ad } b}}} - \overline{\overline{\text{Id}}}}{\overline{\overline{\text{ad } b}}}.$$

Отсюда, в частности, следует аналитичность $\overline{\overline{B}}(a)$ и $\overline{\overline{\beta}}(b)$, что вместе с (1) влечет аналитичность операции $(x, y) \mapsto x \cdot y$ лупы $\langle Q, \cdot, \varepsilon \rangle$ в нормальных координатах.

7. Рассмотрим $K^i(a, b) = \left[\frac{\partial^4 (ua \cdot tb)^i}{(\partial u)^2 (\partial t)^2} \right]_{t=u=0}$ в нормальных координатах. В силу моноальтернативности,

$$(11) \quad ua \cdot tb = [(tb)^{-1} \cdot (ua)^{-1}]^{-1} = -[(-tb) \cdot (-ua)],$$

см. [3], [4].

Из (11) следует, что

$$(12) \quad K^i(a, b) + K^i(b, a) = 0.$$

Подсчитав $K^i(a, b)$ в нормальных координатах, получаем

$$(13) \quad K(a, b) = (2\beta_1\beta_2 - 2\beta_3)\{b * [a * (b * a)]\} + (2\beta_3 - \beta_1\beta_2)\{a * [b * (a * b)]\}, \quad \beta_1\beta_2\beta_3 \neq 0,$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — числа Бернулли.

Далее, (12) и (13) дают

$$(14) \quad J(a, b, a * b) = 0, \quad a, b \in V = T_\varepsilon Q$$

$$(J(\xi, \eta, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \xi * (\eta * \zeta) + \zeta * (\xi * \eta) + \eta * (\zeta * \xi)).$$

Мы получили следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\langle Q, \cdot, \varepsilon \rangle$ — C^2 -гладкая локальная моноальтернативная лупа. Тогда ее касательная алгебра $\langle V, * \rangle$, $V = T_\varepsilon Q$, моноальтернативна, т.е. $J(\xi, \eta, \xi * \eta) = 0$.

8. Согласно [6] кососимметричная алгебра моноальтернативна, если и только если она бинарно-лиева, т.е. если любые два ее элемента порождают подалгебру Ли, см. [5].

Известно также, [5], что C^2 -гладкая лупа диассоциативна (т.е. любые два ее элемента порождают подгруппу Ли), если и только если ее касательная алгебра бинарно-лиева.

В силу сказанного получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Любая C^2 -гладкая моноальтернативная лупа диассоциативна.

9. **ЗАМЕЧАНИЕ.** В работе [7] показано, что локальная аналитическая альтернативная лупа со свойством эластичности $x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot x$ диассоциативна. Предложение 2 вместе с [1] показывает, что условие эластичности в [7] излишне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сабинин Л. В., Михеев П. О. // Проблемы теории тканей и квазигрупп. Калинин: Изд-во Калининского ун-та, 1985. С. 72–75. [2] Сабинин Л. В. Аналитические квазигруппы и геометрия. М.: Университет Дружбы народов, 1991. [3] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967. [4] Белоусов В. Д. Элементы теории квазигрупп и луп. Кишинев: Изд-во Кишиневского ун-та, 1981. [5] Мальцев А. И. // Матем. сб. 1955. Т. 36(78). № 3. С. 569–576. [6] Гайнов А. Т. // УМН. 1957. Т. 12. С. 141–146. [7] Михеев П. О. // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 5. С. 72–77.