Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Кусочно целостные кольца и несингулярно первичные идеалы,
УМН, 1996, том 51, выпуск 4, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1009>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:33:30

КУСОЧНО ЦЕЛОСТНЫЕ КОЛЬЦА И НЕСИНГУЛЯРНО ПЕРВИЧНЫЕ ИДЕАЛЫ

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей. Зафиксируем разложение $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ единицы кольца A в сумму ортогональных идемпотентов e_i . Кольцо A называется *кусочно целостным* (относительно $\{e_1, \dots, e_n\}$), если оно удовлетворяет следующим трем эквивалентным [1] условиям: (1) для всех e_i и e_k каждый ненулевой гомоморфизм $e_i A \rightarrow e_k A$ является мономорфизмом; (2) для всех e_i каждый ненулевой гомоморфизм $e_i A \rightarrow A$ является мономорфизмом; (3) $ab \neq 0$ для всех ненулевых элементов $a \in e_j A e_i$, $b \in e_i A e_k$ и для любых e_i, e_j, e_k . Поскольку условие (3) симметрично, то (1) и (2) можно заменить на их левосторонние аналоги. Модуль называется *равномерным*, если любые его два ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Модуль называется *дистрибутивным*, если решетка всех его подмодулей дистрибутивна. Идеал B кольца A будем называть *кусочно целостным*, если A/B – кусочно целостное (относительно естественных образов $\{e_1, \dots, e_n\}$ в A/B) кольцо. Идеал B кольца A будем называть *несингулярно первичным* (вполне первичным), если A/B – несингулярное справа первичное кольцо (область). Несингулярно первичный идеал кольца A , не содержащий других несингулярно первичных идеалов кольца A , называется *минимальным несингулярно первичным идеалом*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. A – кусочно целостное кольцо $\iff ab \neq 0$ для всех ненулевых $a \in Ae_i$, $b \in e_i A$ и для каждого e_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если F – собственный идеал кольца A , $h: A \rightarrow A/F$ – естественный эпиморфизм, $e = e^2 \in A \setminus F$, то: (1) eFe – собственный идеал кольца eAe и существует естественный изоморфизм $h(e)h(A)h(e) \rightarrow eAe/eFe$; (2) хотя бы один ненулевой идемпотент e_i не принадлежит F .

Замечания 1 и 2 проверяются непосредственно.

ЛЕММА 3. Если e – ненулевой идемпотент первичного кольца A , то $(eAe - область) \iff (любой ненулевой эндоморфизм правого идеала eA является мономорфизмом) \iff (любой ненулевой эндоморфизм каждого левого идеала Ae является мономорфизмом).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать первую эквивалентность. Импликация $\Leftarrow$ очевидна. Докажем $\Rightarrow$. Так как eAe можно естественно отождествить с $\text{End}(eA)$, то достаточно привести к противоречию следующее утверждение: существуют такие ненулевые элементы $a = eae \in eAe$ и $b = eb \in eA$, что $eaeb = 0$. Тогда $(eae)(ebAe) = 0$. Так как eAe – область и $eae \neq 0$, то $ebAe = 0$. Тогда $AebAeA = 0$. Поскольку A первично, то либо $eb = 0$, либо $e = 0$, что невозможно.

ЛЕММА 4. Пусть M – ненулевой дистрибутивный правый идеал кольца A . Тогда:

- (1) если $M = eA$, где $e = e^2$, то кольцо eAe дистрибутивно справа;
- (2) если кольцо A первично, то модуль M равномерен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [2]. (2) Пусть $m, n \in M$, $a \in A$, причем $mA \cap nA = 0$. Так как кольцо A первично, то достаточно доказать, что $ma = 0$. Правилom $f(nx) = mapx$ задается гомоморфизм $f \in \text{Hom}(mA, nA)$. Так как модуль M дистрибутивен и $mA \cap nA = 0$, то $f \equiv 0$ [3]. Поэтому $ma = 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть F – первичный идеал кольца A . Тогда:

- (1) $(F - \text{кусочно целостный идеал}) \iff (\text{для любого } e_i \in A \setminus F \text{ идеал } e_i F e_i \text{ кольца } e_i A e_i \text{ является вполне первичным});$
- (2) если все правые идеалы $(e_i A + F)/F$ кольца A/F равномерны, то $(F - \text{несингулярно первичный идеал}) \iff (F - \text{кусочно целостный идеал}) \iff (\text{для любого } e_i \in A \setminus F \text{ идеал } e_i F e_i \text{ кольца } e_i A e_i \text{ является вполне первичным}) \iff (\text{хотя бы для одного } e_i \in A \setminus F \text{ идеал } e_i F e_i \text{ кольца } e_i A e_i \text{ является вполне первичным});$

(3) если все правые идеалы $e_i A$ дистрибутивны, то $(F - \text{несингулярно первичный идеал}) \iff (F - \text{кусочно целостный идеал}) \iff (\text{для любого } e_i \in A \setminus F \text{ идеал } e_i F e_i \text{ кольца } e_i A e_i \text{ является вполне первичным}) \iff (e_i F e_i - \text{вполне первичный идеал кольца } e_i A e_i \text{ хотя бы для одного } e_i \in A \setminus F)$;

(4) если все правые идеалы $e_i A$ и все левые идеалы $A e_i$ дистрибутивны, то $(A/F - \text{несингулярно справа кольцо}) \iff (A/F - \text{несингулярно слева})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 2 можно считать, что $F = 0$ и кольцо A первичное. Докажем (1). Импликация $\implies$ очевидна. Докажем $\impliedby$. Допустим, что существуют e_i и ненулевые $a = a e_i \in A e_i$, $b = e_i b \in e_i A$ такие, что $a e_i b = 0$. Для любого $d \in A$ правилом $f_d(e_i x) = e_i d a e_i x$ задается эндоморфизм f_d модуля $e_i A$. Так как $a e_i b = 0$, то все f_d не являются мономорфизмами. По лемме 3 все эндоморфизмы f_d являются нулевыми. Поэтому $e_i A a e_i A = 0$. Так как A — первично, то либо $e_i A = 0$, либо $a A = a e_i A = 0$. Получено противоречие. По замечанию 1 A — кусочно целостное кольцо. Докажем (2). Первая эквивалентность вытекает из следующих фактов [1]: кусочно целостные кольца являются несингулярными; полуравномерные справа несингулярные справа кольца являются кусочно целостными. Вторая эквивалентность следует из (1). Докажем третью эквивалентность. Импликация $\implies$ очевидна. Докажем $\impliedby$. По (1) и по лемме 3 достаточно доказать, что для любого j каждый эндоморфизм f модуля $e_j A$, обладающий ненулевым ядром, тождественно равен нулю. Допустим, что $f(e_j A) \equiv N \neq 0$. Поскольку A первично, то $N e_i A \neq 0$. Поэтому существует ненулевой гомоморфизм $h: e_i A \rightarrow N$. Поскольку A первично, то $e_i A h(e_i A) \neq 0$. Поэтому существует ненулевой гомоморфизм $g: h(e_i A) \rightarrow e_i A$. Тогда gh — ненулевой эндоморфизм модуля $e_i A$. Так как $e_i A$ — проективный модуль и $h(e_i A) \subseteq N \subseteq f(e_j A)$, то существует такой гомоморфизм $t: e_i A \rightarrow e_j A$, что $h = ft$. Тогда $t \neq 0$, поскольку $h \neq 0$. Так как $e_j A$ — равномерный модуль, то $M \equiv \text{Ker}(f) \cap t(e_i A) \neq 0$. Поэтому $t^{-1}(M) \neq 0$, причем $(gh)(t^{-1}(M)) = (gft)(t^{-1}(M)) = 0$. По лемме 3 $gh \equiv 0$ и получаем противоречие. (3) следует из (2) и леммы 4(2). (4) следует из (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 6 [3]. В дистрибутивном справа кольце A любые два не сравнимых по включению вполне первичных идеала равны в сумме A .

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть все правые идеалы $e_i A$ кольца A дистрибутивны. Тогда:

(1) если F и G — несингулярно первичные идеалы кольца A , то либо $F + G = A$, либо F и G сравнимы по включению;

(2) каждый собственный несингулярно первичный идеал F кольца A содержит ровно один минимальный несингулярно первичный идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (1). Допустим, что $F + G \neq A$. Найдется $e_i \equiv e \in A \setminus (F + G)$. По лемме 4(1) кольцо $e A e$ дистрибутивно справа, а по (1) $e F e$, $e G e$ — его вполне первичные идеалы, причем $e A e \neq e F e + e G e$. В силу замечания 6 можно без ограничения общности считать, что $e F e \subseteq e G e$. Так как G — первичный идеал, причем $e \in A \setminus G$ и $e F e \subseteq G$, то $F \subseteq G$. Докажем (2). В силу (1) и леммы Цорна достаточно доказать, что если $G = \bigcap_{j \in J} G_j$ — пересечение убывающей цепи лежащих в F несингулярно первичных идеалов G_j , то G — несингулярно первичный идеал. Так как все идеалы G_j первичны, то G — первичный идеал. Пусть $e_i \equiv e \in A \setminus F$. По теореме 5(3) все $e G_j e$ — вполне первичные идеалы кольца $e A e$. Тогда $e G e = \bigcap_{j \in J} e G_j e$ — вполне первичный идеал. По теореме 5(3) G — несингулярно первичный идеал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gordon R., Small L. W. // J. Algebra. 1972. V. 23. P. 553–564. [2] Туганбаев А. А. // УМН. 1996. Т. 51. № 3. С. 201–202. [3] Stephenson W. // Proc. London Math. Soc. 1974. V. 28. № 2. P. 291–310.