Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Лелеков, Необходимые и достаточные условия сходимости условных математических ожиданий относительно сигма-алгебр, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 255–256

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:42:02

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ УСЛОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СИГМА-АЛГЕБР

Р. А. ЛЕЛЕКОВ

ТЕОРЕМА. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство; $\xi_n \geq 0$, $n \geq 1$, $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ – последовательность случайных величин с $E(\xi_n | \mathcal{G}) < \infty$ (п.н.), $\xi_n \rightarrow \xi$ (п.н.) и $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ – σ -подалгебра $\mathcal{F}$.

Тогда $E(\xi_n | \mathcal{G}) \rightarrow E(\xi | \mathcal{G}) < \infty$ (п.н.) тогда и только тогда, когда для некоторой последовательности $\{c_m\}_{m \geq 1}$, $c_m \in \mathbb{R}^+$, $c_m \rightarrow \infty$, $c_{m+1} > c_m$,

$$\sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n > c_m\}} | \mathcal{G}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{п.н.}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу того, что последовательность $\sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n > c_m\}} | \mathcal{G})$ монотонно убывает п.н., последнее условие выполнено для произвольной монотонно стремящейся к бесконечности последовательности $\{c_m\}_{m \geq 1}$, если оно выполнено хотя бы для одной такой последовательности.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\mathcal{G} = (\emptyset, \Omega)$, то $E(\eta | \mathcal{G}) = E\eta$ (п.н.) для произвольной случайной величины η , и мы имеем следующий известный результат.

Если $0 \leq \xi_n \rightarrow \xi$ (п.н.) с $E\xi_n < \infty$, то

$$E\xi_n \rightarrow E\xi < \infty \iff \sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n > c\}}) \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 0.$$

Последнее условие означает равномерную интегрируемость семейства случайных величин $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. *Достаточность.* Пусть задана некоторая последовательность $\{c_m\}_{m \geq 1}$. Тогда (п.н.)

$$\forall m \geq 1 \quad \overline{\lim} E(\xi_n | \mathcal{G}) \leq \sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n > c_m\}} | \mathcal{G}) + E(\xi | \mathcal{G})$$

и $\overline{\lim} E(\xi_n | \mathcal{G}) \leq E(\xi | \mathcal{G}) \leq \underline{\lim} E(\xi_n | \mathcal{G})$ (п.н.), т.е. $E(\xi_n | \mathcal{G}) \rightarrow E(\xi | \mathcal{G})$ (п.н.).

Далее, (п.н.)

$$\forall m \geq 1 \quad \sup_n E(\xi_n | \mathcal{G}) \leq \sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n \leq c_m\}} | \mathcal{G}) + \sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n > c_m\}} | \mathcal{G}).$$

Для произвольного фиксированного ε выбираем $m \geq 1$ так, что

$$\begin{aligned} \sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n > c_m\}} | \mathcal{G}) &< \varepsilon, \\ \sup_n E(\xi_n | \mathcal{G}) &\leq \sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n \leq c_m\}} | \mathcal{G}) + \varepsilon \leq c_m + \varepsilon < \infty. \end{aligned}$$

В силу того, что $E(\xi_n | \mathcal{G}) \rightarrow E(\xi | \mathcal{G})$, получаем $E(\xi | \mathcal{G}) < \infty$ (п.н.).

Необходимость. Положим $A = \{a : P(\xi = a) > 0\}$. Тогда

$$\forall a \notin A \quad \xi_n I_{\{\xi_n < a\}} \rightarrow \xi I_{\{\xi < a\}} \quad (\text{п.н.}).$$

Семейство случайных величин $\{\xi_n I_{\{\xi_n < a\}}\}_{n \geq 1}$ обладает свойством “равномерной интегрируемости”, и для него выполнена “достаточность” этой теоремы, и, следовательно,

$$E(\xi_n I_{\{\xi_n < a\}} | \mathcal{G}) \rightarrow E(\xi I_{\{\xi < a\}} | \mathcal{G}) \quad (\text{п.н.}).$$

В силу того, что $E(\xi_n | \mathcal{G}) \rightarrow E(\xi | \mathcal{G})$ п.н.,

$$E(\xi_n I_{\{\xi_n \geq a\}} | \mathcal{G}) \rightarrow E(\xi I_{\{\xi \geq a\}} | \mathcal{G}) \quad (\text{п.н.}).$$

Рассмотрим последовательность

$$\{c_m\}_{m \geq 1}, \quad c_m \in \mathbb{R}^+ \setminus A, \quad c_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty, \quad c_{m+1} > c_m, \quad m \geq 1.$$

Для каждой пары c_i, c_j из $\{c_m\}_{m \geq 1}$, $c_i > c_j$, почти наверное (на $G_{i,j}$) выполнено:

$$E(\xi_n I_{\{\xi_n \geq c_i\}} | \mathcal{G}) \leq E(\xi_n I_{\{\xi_n \geq c_j\}} | \mathcal{G}).$$

Пусть теперь $F \in \mathcal{F}$, $P(F) = 1$, — такое множество, на котором:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \quad E(\xi_n I_{\{\xi_n \geq a_1\}} | \mathcal{G}) &\xrightarrow{a_1 \rightarrow \infty} 0, \\ \forall m \geq 1 \quad E(\xi_n I_{\{\xi_n \geq c_m\}} | \mathcal{G}) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(\xi I_{\{\xi \geq c_m\}} | \mathcal{G}), \\ E(\xi I_{\{\xi \geq a_0\}} | \mathcal{G}) &\xrightarrow{a_0 \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Пусть также

$$\omega \in F \bigcap_{i,j=1}^{\infty} G_{i,j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_0 \in \{c_m\}_{m \geq 1}: \quad E(\xi I_{\{\xi \geq a_0\}} | \mathcal{G})(\omega) &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ \exists M \quad \forall n > M: \quad E(\xi_n I_{\{\xi_n \geq a_0\}} | \mathcal{G})(\omega) &\leq E(\xi I_{\{\xi \geq a_0\}} | \mathcal{G})(\omega) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Выберем $a_1 > a_0$, $a_1 \in \{c_m\}_{m \geq 1}$, таким, что при $n \leq M$ $E(\xi_n I_{\{\xi_n \geq a_1\}} | \mathcal{G})(\omega) \leq \varepsilon$. Тогда

$$\sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n \geq a_1\}} | \mathcal{G})(\omega) \leq \varepsilon.$$

Тогда при $a > a_1$, $a \in \{c_m\}_{m \geq 1}$, получим:

$$\sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n \geq a\}} | \mathcal{G})(\omega) \leq \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Автор хотел бы поблагодарить А. Н. Ширяева и А. А. Гущина за постановку задачи, внимание к работе и рекомендации по ее выполнению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. [2] Zheng Wei-an. // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1980. V. 53. P. 291–292.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
05.11.1998