Общероссийский математический портал

А. Н. Ширяев, Минимаксная оптимальность метода кумулятивных сумм (CUSUM) в случае непрерывного времени, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1010>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:49:23

МИНИМАКСНАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ МЕТОДА КУМУЛЯТИВНЫХ СУММ (CUSUM) В СЛУЧАЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВРЕМЕНИ

А. Н. ШИРЯЕВ

1. Предполагается, что на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ наблюдается случайный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ со стохастическим дифференциалом

$$(1) \quad dX_t = rI(t - \theta) dt + \sigma dw_t, \quad X_0 = 0,$$

где $w = (w_t)_{t \geq 0}$ – стандартный винеровский процесс, $I(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ Момент $\theta \in [0, \infty]$ интерпретируется как момент появления “разладки” (по терминологии [1]–[4]) в ходе наблюдений за процессом X : при $t < \theta$ наблюдаемый процесс $X_t = \sigma W_t$, а при $t \geq \theta$ процесс $X_t = X_\theta + r(t - \theta) + \sigma(W_t - W_\theta)$.

Будем через $\tau = \tau(\omega)$ обозначать момент подачи сигнала о появлении “разладки”, т.е. пусть τ есть марковский момент со значениями в $[0, \infty]$ относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, где $\mathcal{F}_t = \sigma\{\omega : X_s, s \leq t\}, t \geq 0$.

В наших работах [1]–[3] рассматривались различные постановки задачи обнаружения и были найдены *оптимальный байесовский метод* и *оптимальный метод* в предположении, что разладка появляется “на фоне установившегося стационарного режима наблюдения”.

В настоящей работе доказывается минимаксная оптимальность *непрерывной* версии метода кумулятивных сумм (CUSUM), введенного Пейджем [5], для следующего критерия, предложенного Лорденом [6].

Пусть P_t – распределение вероятностей процесса X в предположении, что момент разладки $\theta = t$. Распределение P_∞ отвечает случаю отсутствия разладки ($\theta = \infty$), P_0 соответствует случаю наличия разладки в момент $\theta = 0$. Обозначим $\mathcal{M}_T = \{\tau : E_\infty \tau = T\}$ – класс моментов останова τ , для которых среднее время $E_\infty \tau$ до подачи (ложной) тревоги равно T .

Качество системы наблюдения, идентифицируемой с выбором момента $\tau \in \mathcal{M}_T$, будем оценивать величиной $R(T; \tau) = \sup_{\theta \geq 0} \text{ess sup}_\omega E_\theta([\tau - \theta]^+ | \mathcal{F}_\theta)$. Момент $\tau_T^* \in \mathcal{M}_T$ естественно называть *оптимальным* (в минимаксном смысле), если $R(T; \tau_T^*) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} R(T; \tau)$.

ТЕОРЕМА. При каждом $T > 0$ в классе $\mathcal{M}_T$ существует оптимальный момент τ_T^* такой, что $\tau_T^* = \inf\{t \geq 0 : \gamma_t \geq B_T^*\}$, где $\gamma = (\gamma_t)_{t \geq 0}$, $\gamma_t = \max_{\theta \leq t} \frac{dP_\theta}{dP_\infty}(X, t)$, есть “CUSUM”-процесс; $\frac{dP_\theta}{dP_\infty}(X, t)$ – производная Радона-Никодима сужения $P_\theta | \mathcal{F}_t$ меры P_θ относительно сужения $P_\infty | \mathcal{F}$ меры P_∞ на $\mathcal{F}$.

При этом $\gamma_t = \max_{\theta \leq t} \frac{L_t}{L_\theta}$, где $L_t = \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} X_t - \frac{r^2}{2\sigma^2} t\right)$; порог B_T^* определяется (в предположении $\frac{r^2}{2\sigma^2} = 1$, что не ограничивает общности) как корень уравнения $T = B - 1 - \ln B$; минимаксный риск $R(T; \tau_T^*) = E_0 \tau_T^* = \ln B_T^* - 1 + \frac{1}{B_T^*}$; при больших T $R(T; \tau_T^*) = \ln T - 1 + O\left(\frac{1}{T}\right)$; при малых T $R(T; \tau_T^*) = T + O(T^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае дискретного времени вопрос об оптимальности метода CUSUM рассматривался в работах Мустакидеса [7] и Ритова [9]. Асимптотическая оптимальность этого метода была доказана в работе Лордена [6]. См. также сборник статей [8], который посвящен проблематике наискорейшего обнаружения “разладки” (иначе – “change-point”) в разнообразных постановках. Рассматриваемый нами случай непрерывного времени является (в сравнении с работами [7], [9], относящимися к случаю дискретного времени) несколько более деликатным в техническом отношении (по причине необходимости оперирования с феноменами типа локального времени), но зато позволяет получить также и *точные* формулы, которые дают достаточно хорошие аппроксимации в моделях с дискретным временем.

Как и в [7] одним из ключевых моментов в доказательстве является получение оценки снизу для величин $R(T; \tau)$ (ср. (3) с (8) в [7]).

2. Доказательство теоремы опирается на следующие результаты.

ЛЕММА 1. Процесс $\gamma = (\gamma_t)$ является решением неоднородного стохастического дифференциального уравнения $d\gamma_t = \frac{r}{\sigma^2} \gamma_t dX_t + dH_t$, $\gamma_0 = 1$, где $H_t = - \int_0^t I(\gamma_s = 1) \frac{dM_s}{M_s}$ с $M_s = \min_{\theta \leq s} L_\theta$.

Решение уравнения (12) может быть представлено в виде

$$(2) \quad \gamma_t = L_t \left\{ 1 + \int_0^t \frac{dH_s}{L_s} \right\}.$$

Представление (2) играет существенную роль при доказательстве следующего утверждения.

ЛЕММА 2. Для любого конечного момента остановки τ

$$(3) \quad \sup_{\theta \geq 0} \operatorname{ess\,sup}_{\omega} E_{\theta}([\tau - \theta]^+ \mid \mathcal{F}_{\theta}) \geq \frac{E_{\infty} \int_0^{\tau} \gamma_t dt}{E_{\infty} \gamma_{\tau}}.$$

ЛЕММА 3. В классе $\mathfrak{M}_T$ момент τ_T^* обладает одновременно следующими двумя свойствами оптимальности:

$$\inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} E_{\infty} \int_0^{\tau} \gamma_t dt = E_{\infty} \int_0^{\tau_T^*} \gamma_t dt, \quad \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T} E_{\infty} \gamma_{\tau} = E_{\infty} \gamma_{\tau_T^*}.$$

ЛЕММА 4. Для момента τ_T^* $R(T; \tau_T^*) = E_0 \tau_T^*$ и

$$E_{\infty} \int_0^{\tau_T^*} \gamma_t dt = B_T^* \log B_T^* + 1 - B_T^*, \quad E_0 \tau_T^* = \ln B_T^* - 1 + \frac{1}{B_T^*}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из лемм 2 и 4

$$(4) \quad E_0 \tau_T^* = R(T; \tau_T^*) \geq \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} R(T; \tau) \geq \frac{\inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} E_{\infty} \int_0^{\tau} \gamma_t dt}{\sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T} E_{\infty} \gamma_{\tau}}.$$

В силу леммы 4 левая часть и правая часть в (4) оказываются равными, что и доказывает утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ширяев А. Н. // ДАН СССР. 1961. Т. 138. № 4. С. 794–801. [2] Ширяев А. Н. // ДАН СССР. 1961. Т. 138. № 5. С. 1039–1042. [3] Ширяев А. Н. // Теория вероятн. и ее примен. 1963. Т. VIII. № 1. С. 26–51. [4] Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976. [5] Page E. S. // Biometrika. 1954. V. 41. P. 100–115. [6] Lorden G. // Ann. Math. Statist. 1971. V. 42. P. 1897–1908. [7] Moustakides G. V. // Ann. Statist. 1986. V. 14. P. 1379–1387. [8] Carlstein E., Müller H.-G., Siegmund D. (ed.) Change-point problems // Institute of Math. Statist. Lecture Notes – Monograph Ser. V. 23, 1994. [9] Ritov Y. // Ann. Statist. 1990. V. 18. P. 1464–1469.