Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Я. Якубов, Восстановление уравнения Штурма–Лиувилля с суммируемым весом, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1011>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:01:34

ВОССТАНОВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СУММИРУЕМЫМ ВЕСОМ

В. Я. ЯКУБОВ

Решению обратной задачи Штурма–Лиувилля посвящено много работ, результаты которых приведены в монографии Б. М. Левитана [1], где можно найти и основную библиографию. В значительной части этих работ рассматривается уравнение Штурма–Лиувилля с потенциалом $q(x)$

$$(1) \quad y'' + q(x)y + \lambda y = 0.$$

Восстановлению уравнения Штурма–Лиувилля

$$(2) \quad y'' + \lambda \rho(x)y = 0$$

с весом $\rho(x)$ посвящено уже значительно меньше работ. Конечно, если функция $\rho(x)$ дважды непрерывно-дифференцируема, то, используя известные преобразования, уравнение (2) можно привести к виду (1) и связать между собой соответствующие результаты. Но в случае, когда функция $\rho(x)$ не обладает такой гладкостью, сделать это нельзя, что следует из результатов работ автора [2], [3]. Поэтому изучение обратных задач в случае уравнения (2) имеет самостоятельный интерес. Кроме того, основная часть работ, посвященных обратным задачам Штурма–Лиувилля, использует спектральную функцию в качестве основного аппарата при восстановлении потенциала $q(x)$, хотя, на наш взгляд, метод, использованный М. Г. Крейнм в работах [4], [5], не менее интересен.

В настоящей работе мы возрождаем метод М. Г. Крейна и решаем с его помощью задачу по восстановлению уравнения (2) в случае, когда на функцию $\rho(x)$ наложено только условие суммируемости.

Пусть $\rho(x)$ – суммируемая на отрезке $[0, 1]$ функция, удовлетворяющая условию $0 < \rho_0 \leq \rho(x) \leq \rho_1$. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ две задачи Штурма–Лиувилля для уравнения (2): задачу (1) с краевыми условиями

$$(3) \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

и задачу (2) с краевыми условиями

$$(4) \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Под собственными функциями задачи (1) или задачи (2) понимаем отличные от тождественного нуля функции $y(x, \lambda)$, непрерывные вместе со своими первыми производными по x на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющие почти всюду уравнению (2) и условиям (3) или (4), соответственно.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – совокупность собственных чисел задач (1) и (2), занумерованные в порядке возрастания. Очевидно при этом, что $\{\lambda_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ – собственные числа задачи (1), а $\{\lambda_{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ – собственные числа задачи (2). Определим симметричную на отрезке $[-1, 1]$ функцию

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{если } x \in [0, 1], \\ \rho(-x), & \text{если } x \in [-1, 0], \end{cases}$$

и рассмотрим следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$(5) \quad y'' + \lambda \mathcal{R}(x)y = 0 \quad (-1 < x < 1),$$

$$(6) \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0,$$

которую назовем задачей (3), или задачей с симметричной струной. Очевидно, имеет место

ТЕОРЕМА 1. Совокупность собственных чисел задач (1) и (2) и множество собственных чисел задачи (3) совпадают. Собственные функции задачи (3), рассматриваемые на отрезке $[0, 1]$, будут собственными функциями задач (1) и (2), соответственно, при этом других собственных функций, рассматриваемых с точностью до постоянного множителя, у задач (1) и (2) быть не может.

Используя теперь результаты работ [4], [5] по множеству $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ собственных чисел задачи (3), восстановим функцию $\mathcal{R}(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$), что равносильно восстановлению функции $\rho(x)$ ($0 \leq x \leq 1$).

Пусть P_a – совокупность непрерывных четных функций $\mathcal{F}(t)$ ($0 < a \leq \infty$, $|t| < a$), которым соответствует положительно определенное ядро $\mathcal{F}(s-t)$ ($0 \leq s, t < a$).

Центральной массой $\mathcal{M}$ функции $\mathcal{F}(t) \in P_a$ называется наибольшее из чисел q , для которых $\mathcal{F}(t) - q \in P_a$.

Известно, что $\mathcal{M}^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \left(\int_0^a \chi_j(s) ds \right)^2$, где $\chi_j(s)$ ($j = 1, 2, \dots$) – полная ортонормированная система фундаментальных функций уравнения $\chi(s) = \mathcal{M} \int_0^a \mathcal{F}(s-t)\chi(t) dt$, а $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ – соответствующая ей последовательность собственных чисел.

Рассматривая $\mathcal{F}(t) \in P_a$ в укороченном интервале $(-x, x)$, будем иметь $\mathcal{F}(t) \in P_x$ ($0 < x \leq a$). Функции $\mathcal{F}(t) \in P_x$ соответствует центральная масса $\mathcal{M}(x)$ ($0 < x \leq a$), которая называется центральной функцией для функции $\mathcal{F}(t) \in P_a$. По определению $\mathcal{M}(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \mathcal{M}(x)$.

Пусть $E(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{2k-1}} \right)$, $\mathcal{D}(\lambda) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{2k}} \right)$. Тогда оказывается, что

$$\frac{E(\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{\lambda_{2k} - \lambda} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{\lambda_k} < \infty \right), \quad \text{где } p_k > 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Строим теперь по числам λ_k, p_k функцию $\mathcal{F}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{\lambda_k} \cos \sqrt{\lambda_k} t$ ($-\infty < t < +\infty$), и пусть функция $\mathcal{M}(t)$ ($0 < t < +\infty$) есть центральная функция функции $\mathcal{F}(t)$. Далее обозначим через $\tau(x)$ функцию, определяемую равенством $\tau(x) = 2 \int_0^x \sqrt{\rho(s)} ds$ ($0 < x \leq 1$). Точка x_0 ($0 < x_0 \leq 1$) называется точкой роста функции $\tau(x)$, если $\tau(x) < \tau(x_0)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если x – точка роста слева функции $\tau(x)$, то $\mathcal{M}(\tau(x)) = 1 - x$.

Таким образом, по системе собственных чисел $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ задач (1) и (2) строим функцию $\mathcal{F}(t)$, по функции $\mathcal{F}(t)$ находим ее центральную функцию $\mathcal{M}(t)$, по которой строим функцию $\tau(x) = \mathcal{M}^{-1}(1 - x)$, а по ней уже находим искомую функцию $\rho(x) = \frac{1}{4}(\tau'(x))^2$ ($0 \leq x \leq 1$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. [2] Якубов В. Я. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1993. № 4. С. 37–44. [3] Якубов В. Я. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 6. С. 982–989. [4] Крейн М. Г. // ДАН. 1951. Т. 76. № 1. С. 21–24. [5] Крейн М. Г. // ДАН. 1951. Т. 76. № 3. С. 345–348.

Принято редколлегией
18.04.1996