Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Иосифьян, Об усреднении некоторых краевых задач с нелинейными граничными условиями в перфорированных областях, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 5, 233–234

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1014>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:59:34

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ОБ УСРЕДНЕНИИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ
В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

Г. А. Иосифьян

Пусть Ω^ε – перфорированная область в $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ с ε -периодической структурой: $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$, где Ω – ограниченная область с достаточно гладкой границей, $\varepsilon > 0$ – малый параметр; ω – гладкая неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с 1-периодической структурой. Мы полагаем $Q =]0, 1[^n$, $\varepsilon G = \{x : \varepsilon^{-1}x \in G\}$. Считается, что Ω^ε имеет липшицеву границу и ячейка периодичности $Q \cap \omega$ удовлетворяет условиям В1, В2, В3 § 4, гл. I [1]. Граница $\partial\Omega^\varepsilon$ области Ω^ε распадается на “внешнюю” часть $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega \cap \partial\Omega^\varepsilon$ и границу полостей (каналов) $S^\varepsilon = (\partial\Omega^\varepsilon) \cap \Omega$.

Пусть $L_\varepsilon(u) \equiv (a^{hk}(\varepsilon^{-1}x)u_{x_k})_{x_h}$ – равномерно эллиптический оператор, коэффициенты которого $a^{hk}(\xi) = a^{kh}(\xi)$ – гладкие 1-периодические функции в $\overline{\omega}$. Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до n .

В области Ω^ε рассмотрим следующую краевую задачу

$$(1) \quad L_\varepsilon(u^\varepsilon) = -f \text{ в } \Omega^\varepsilon, \quad \partial u^\varepsilon / \partial \nu^\varepsilon = -g_\varepsilon(x, u^\varepsilon) \text{ на } S^\varepsilon, \quad u^\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma^\varepsilon,$$

где $\partial u^\varepsilon / \partial \nu^\varepsilon \equiv \nu_h a^{hk}(\varepsilon^{-1}x) \partial u^\varepsilon / \partial x_k$; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega^\varepsilon$; $f \in L^2(\Omega)$.

На границе полостей S^ε будем рассматривать два типа граничных функций:

$$(2) \quad g_\varepsilon(x, u^\varepsilon) = \varepsilon^\alpha \chi_{\Omega_1}(x) g^0(u^\varepsilon) + \varepsilon^{1+\beta} (g^1(u^\varepsilon) + \varphi(x)),$$

$$(3) \quad g_\varepsilon(x, u^\varepsilon) = \varepsilon^\alpha \chi_{\Omega_1}(x) \theta(u^\varepsilon) g^0(u^\varepsilon) + \varepsilon^{1+\beta} (g^1(u^\varepsilon) + \varphi(x)),$$

где Ω_1 – подобласть Ω такая, что Ω_1 и $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$ имеют липшицевы границы; $\chi_{\Omega_1}(x)$ – характеристическая функция Ω_1 ; α и β – вещественные параметры, $0 \leq \alpha < 1$, $\beta \geq 0$; $\theta(\eta)$ – функция Хевисайда: $\theta(\eta) = 0$ при $\eta < 0$, $\theta(\eta) = 1$ при $\eta \geq 0$; $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$; функции $g^0(\eta)$ и $g^1(\eta)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$(I) \quad g^r(0) = 0; |g^r(\eta) - g^r(\eta^1)| \leq c|\eta - \eta^1|, \quad r = 0, 1, \quad \eta, \eta^1 \in \mathbb{R}^1; c = \text{const} > 0;$$

$$(II) \quad (g^1(\eta) - g^1(\eta^1))(\eta - \eta^1) \geq 0, \quad (g^0(\eta) - g^0(\eta^1))(\eta - \eta^1) \geq \mu_0 |\eta - \eta^1|^2 \text{ при всех } \eta, \eta^1 \in \mathbb{R}^1, \\ \text{где } \mu_0 = \text{const} > 0.$$

Предполагается также, что $\Omega_1^\varepsilon = \Omega^\varepsilon \cap \Omega_1$ и $\Omega_2^\varepsilon = \Omega^\varepsilon \cap \Omega_2$ – липшицевы области с ε -периодической структурой, как и Ω^ε .

Решения задач (1), (2) и (1), (3) понимаются в обобщенном смысле, как элементы пространства $H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)$, удовлетворяющие соответствующему интегральному тождеству, где $H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00165).

– пополнение по норме $H^1(\Omega^\varepsilon)$ подпространства в $C^\infty(\overline{\Omega^\varepsilon})$, состоящего из функций, равных нулю в окрестности Γ^ε . Существование решений таких задач доказано, например, в [2].

Обозначим через $\hat{L}$ обычный усредненный оператор для задачи (1), (2) с $g_\varepsilon \equiv 0$. Его коэффициенты имеют вид $\hat{a}^{hj} = \langle a^{hj}(\xi) + a^{hk}(\xi) \partial N^j / \partial \xi_k \rangle$, где $\langle q \rangle$ – среднее по ячейке $Q \cap \omega$, $N^j(\xi)$ – 1-периодические функции в ω , являющиеся решениями вспомогательных краевых задач (см., например, [1, § 1, гл. II]).

Усредненная задача, соответствующая (1), (2), фактически является задачей Дирихле в области Ω_2 :

$$(4) \quad \hat{L}(u^0) - \gamma_\beta g^1(u^0) = -f + \gamma_\beta \varphi \quad \text{в } \Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1, \quad u^0|_{\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} = 0, \quad u^0 \in H_0^1(\Omega),$$

где $\gamma_\beta = \text{mes}_{n-1}(Q \cap \partial\omega) / \text{mes}_n(Q \cap \omega)$ при $\beta = 0$, $\gamma_\beta = 0$ при $\beta > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть u^ε и u^0 – решения задач (1), (2) и (4), соответственно, $u^0 \in H^3(\Omega_2)$. Тогда

$$\varepsilon^{-\frac{1-\alpha}{2}} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)} + \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)} \leq c_1(\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{4}} + q_\beta \varepsilon^\beta),$$

$$\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial u^0}{\partial x_i} - \frac{\partial N^q}{\partial \xi_i} \frac{\partial u^0}{\partial x_q} \right\|_{L^2(\Omega_2^\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)} \leq c_2(\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{4}} + q_\beta \varepsilon^\beta), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $q_\beta = 0$ при $\beta = 0$, $q_\beta = 1$ при $\beta > 0$; постоянные c_1, c_2 не зависят от ε .

Усредненная задача, соответствующая (1), (3), ставится следующим образом: найти $u^0 \in H_0^1(\Omega)$, $u^0 \leq 0$ п.в. в Ω_1 , такую, что для любой $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \leq 0$ п.в. в Ω_1 , выполняется неравенство

$$(5) \quad \int_{\Omega} \hat{a}^{hk} \frac{\partial u^0}{\partial x_k} \frac{\partial (v - u^0)}{\partial x_h} dx + \gamma_\beta \int_{\Omega} g^1(u^0)(v - u^0) dx \geq \int_{\Omega} (f - \gamma_\beta \varphi)(v - u^0) dx.$$

Положим $\Gamma_\varepsilon^h(x) = a^{hk}(\varepsilon^{-1}x) \partial u^\varepsilon / \partial x_k$ при $x \in \Omega^\varepsilon$; $\Gamma_\varepsilon^h = 0$ при $x \in \Omega \setminus \Omega^\varepsilon$. Пусть $v_+(x) = \max(v(x), 0)$, $v_-(x) = \max(-v(x), 0)$, $v(x) = v_+(x) - v_-(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть u^ε , u^0 – решения задач (1), (3) и (5), соответственно. Тогда $\|u^0 - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \rightarrow 0$, $\Gamma_\varepsilon^h \rightarrow |Q \cap \omega| \hat{a}^{hk} \partial u^0 / \partial x_k$ слабо в $L^2(\Omega)$. В случае, когда $\Omega_1 = \Omega$ и $u^0 \in H^2(\Omega)$, справедливы оценки

$$\varepsilon^{-(1-\alpha)} \|u_+^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon^{-\frac{1-\alpha}{2}} \|u_+^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \varepsilon^{\alpha-\frac{1}{2}} \|u_+^\varepsilon\|_{L^2(S^\varepsilon)} \leq c_3;$$

$$\|u_-^\varepsilon + u^0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial u_-^\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{\partial u^0}{\partial x_i} + \frac{\partial N^q}{\partial \xi_i} \frac{\partial u^0}{\partial x_q} \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leq \delta(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, постоянная c_3 не зависит от ε .

Для задачи типа Синьорини в перфорированной области Ω^ε : найти u^ε такую, что

$$\int_{\Omega^\varepsilon} a^{hk}(\varepsilon^{-1}x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial (v^\varepsilon - u^\varepsilon)}{\partial x_h} dx \geq \int_{\Omega^\varepsilon} f(v^\varepsilon - u^\varepsilon) dx, \quad u^\varepsilon|_{S^\varepsilon} \leq 0, \quad u^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon),$$

для любой $v^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)$, $v^\varepsilon|_{S^\varepsilon} \leq 0$, усредненная задача совпадает с (5) при $\Omega_1 = \Omega$, $\gamma_\beta = 0$, $\varphi = 0$. Это утверждение выводится из теоремы 2 методом штрафа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990. [2] Дюво Г., Лионс Ж. Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.