Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Антонян, Эквивариантные вложения метризуемых G -пространств, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 5, 235–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:02:46

ЭКВИВАРИАНТНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ МЕТРИЗУЕМЫХ G -ПРОСТРАНСТВ

С. А. Антонян

Здесь доказывается эквивариантная версия теоремы о метрическом еже [1, с. 418]. Всюду предполагается, что G – компактная хаусдорфова группа. Все G -пространства считаются метризуемыми.

Напомним [2], что замкнутая подгруппа $H < G$ называется *большой*, если существует такая замкнутая нормальная подгруппа $N < G$, что $N \subset H$ и факторгруппа G/N является группой Ли.

Через $c(G/N)$ далее будем обозначать конус над факторпространством G/H левых смежных классов по подгруппе H , наделенный естественным действием группы G , порожденным левыми сдвигами на G/H .

Пусть τ – бесконечный кардинал, а вес $wG \leq \tau$. Пусть $\{H_\lambda\}$ – семейство всех несопряженных между собой больших подгрупп $H_\lambda < G$. На каждом конусе $C_\lambda = c(G/H_\lambda)$ рассмотрим любую такую метрику ρ_λ , что $\rho_\lambda(txH, *) = t$, где $xH \in G/H_\lambda$, $t \in [0, 1]$, а $*$ – вершина конуса C_λ . Для каждого индекса λ рассмотрим множество A_λ , состоящее из τ штук копий конуса C_λ . Пусть $A = \bigcup A_\lambda$. Все конусы C_α , $\alpha \in A$, склеим между собой по их вершинам и на полученном фактормножестве $J(G, \tau)$ определим метрику ρ так: если $tx \in C_\alpha$, $t'y \in C_\beta$, то положим $\rho(tx, t'y) = \rho_\alpha(tx, t'y)$, если $\alpha = \beta$, и $\rho(tx, t'y) = t + t'$, если $\alpha \neq \beta$. Множество $J(G, \tau)$, наделенное метрикой ρ и единственным действием группы G , относительно которого все конусы C_α являются инвариантными подпространствами $J(G, \tau)$, называется метрическим G -ежом колости τ . Нетрудно убедиться, что вес $wJ(G, \tau) = \tau$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть τ – бесконечный кардинал, а $wG \leq \tau$. Тогда каждое G -пространство X бесконечного веса $wX \leq \tau$ допускает эквивариантное вложение в счетную степень $J(G, \tau)^\infty$.

Для доказательства нужны две леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $\{U_\alpha\}$ – такое семейство открытых G -подмножеств X , что семейство $\{U_\alpha/G\}$ образует базу пространства орбит X/G . Тогда для любой точки $a \in X$ и любой ее окрестности V существуют такие большая подгруппа $H < G$ (содержащая в себе стабилизатор $G_a = \{g \in G; ga = a\}$), H -срез $S \subset X$, окрестность единицы $O \subset G$ и элемент $U_\lambda \in \{U_\alpha\}$, что $a \in S \subset OS \subset V$ и $G(S) = U_\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем такие окрестность единицы $O \subset G$ и окрестность $U \subset X$ точки a , что $OU \subset V$. Согласно [2], существуют такие большая подгруппа $H < G$ с условием $G_a \subset H$ и H -срез $S_1 \subset X$, что $a \in S_1 \subset U$. Поскольку $\{U_\alpha/G\}$ образует базу для X/G , то найдется такой элемент $U_\lambda \in \{U_\alpha\}$, что орбита $G(x) \subset U_\lambda \subset G(S_1)$. Полагая $S = U_\lambda \cap S_1$, мы получим такой H -срез S , что $a \in S \subset OS \subset V$ и $G(S) = U_\lambda$.

ЛЕММА 2. Пусть семейство $\{U_\alpha\}$ – такое же, как в лемме 1. Тогда каждому множеству U_α можно сопоставить большую подгруппу $H_\alpha < G$ и G -отображение $f_\alpha: X \rightarrow c(G/H_\alpha)$, что $X \setminus U_\alpha = f_\alpha^{-1}(*)$, где $*$ – вершина конуса $c(G/H_\alpha)$ и семейство $\{f_\alpha\}$ удовлетворяет условию: для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $a \in X \setminus F$ существует такое G -отображение $f_\lambda \in \{f_\alpha\}$, что $f_\lambda(a) \neq *$ и $f_\alpha(a) \notin \overline{f_\alpha(F)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество L_α всех таких трубчатых сегментов $OS = \{gs; g \in G, s \in S\}$, для которых $G(S) = U_\alpha$ (здесь S – некоторый H -срез с большой подгруппой H , а O – окрестность единицы G). Заметим, что $L_\alpha \neq \emptyset$, либо $S = U_\alpha$ является H -срезом при $H = G$, т.е. $GU_\alpha \in L_\alpha$. Обозначим $\xi_\alpha = \inf\{\text{diam } OS; OS \in L_\alpha\}$, где диаметр берется относительно некоторой инвариантной метрики ρ на X . Теперь множеству U_α сопоставим любой из трубчатых сегментов $O_\alpha S_\alpha \in L_\alpha$, для которых $\text{diam } O_\alpha S_\alpha < 2\xi_\alpha$. Формулой $\varphi(gs) = gH_\alpha$, $g \in G, s \in S_\alpha$, корректно определяется G -отображение $\varphi: U_\alpha \rightarrow G/H_\alpha$. Пусть

$r: X \rightarrow [0, 1]$ есть такая инвариантная непрерывная функция, что $r^{-1}(0, 1] = U_\alpha$. Полагая $f_\alpha(x) = r(x)\varphi(x)$ при $x \in U_\alpha$ и $f_\alpha(x) = *$ при $x \in X \setminus U_\alpha$, мы получим G -отображение $f_\alpha: X \rightarrow c(G/H_\alpha)$. Очевидно, что $X \setminus U_\alpha = f_\alpha^{-1}(*)$. Пусть $\varepsilon > 0$ – такое, что ε -окрестность $O(a, \varepsilon)$ точки a лежит в $X \setminus F$. Согласно лемме 1, существуют такие $U_\lambda \in \{U_\alpha\}$ и трубчатый сегмент OS , что $a \in S$, $OS \subset O(a, \varepsilon/4)$ и $G(S) = U_\lambda$. Поскольку $\text{diam } OS < \varepsilon/2$, то $\xi_\lambda < \varepsilon/2$. Следовательно, если $O_\lambda S_\lambda$ есть трубчатый сегмент, соответствующий множеству U_λ , то $\text{diam } O_\lambda S_\lambda < \varepsilon$. Покажем, что $f_\lambda(a) \notin \overline{f_\lambda(F)}$. Пусть $a \in gS_\lambda$ для некоторого $g \in G$. Поскольку $\text{diam } gO_\lambda S_\lambda = \text{diam } O_\lambda S_\lambda$, то $gO_\lambda S_\lambda \subset O(a, \varepsilon)$. Имеем $\varphi_\lambda(a) \in \varphi(gO_\lambda S_\lambda) = p(gO_\lambda)$, где $p: G \rightarrow G/H_\lambda$ – проекция. Так как $p(gO_\lambda)$ открыто в G/H_λ , то $\varphi_\lambda(a) \notin \overline{\varphi_\lambda(U_\lambda \setminus gO_\lambda S_\lambda)}$, и, тем более, $f_\lambda(a) \notin \overline{f_\lambda(U_\lambda \setminus O(a, \varepsilon))}$. Следовательно, $f_\lambda(a) \notin \overline{f_\lambda(F \cap U_\lambda)}$ и, поскольку $f_\lambda(F \cap (X \setminus U_\lambda)) = *$, выполнено соотношение $f_\lambda(a) \notin \overline{f_\lambda(F)}$. Для завершения доказательства остается заметить, что $f_\lambda(a) \neq *$, ибо $r(a) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку X/G метризуемо, оно обладает σ -дискретной базой [1, с. 416]. Значит, существует такое семейство $\{U_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ открытых инвариантных подмножеств X , что семейство $\{U_\alpha/G\}$ образует σ -дискретную базу X/G . Можно считать, что $|\Lambda| = w(X/G) = wX$. Пусть $\{f_\alpha: X \rightarrow c(G/H_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$ есть семейство G -отображений из леммы 2. Пусть $\Lambda = \bigcup_{i=1}^\infty \Lambda_i$ и каждое семейство $\{U_\lambda; \lambda \in \Lambda_i\}$ дискретно. Для каждого $i \geq 1$ определим G -отображение $\psi_i: X \rightarrow J(G, \tau)$ по правилу: $\psi_i(x) = f_\alpha(x)$, если $\alpha \in \Lambda_i$, $x \in U_\alpha$, и $\psi_i(x) = *$, если $x \in X \setminus U_\alpha$. Поскольку $|\Lambda| \leq \tau$, $X \setminus U_\alpha \subset f_\alpha^{-1}(*)$ и семейство $\{U_\alpha, \alpha \in \Lambda_i\}$ дискретно, отображение ψ_i корректно определено. Проверим, что семейство $\{\psi_i, i \geq 1\}$ разделяет точки и замкнутые множества в X . Пусть $F = \overline{F} \subset X$ и $a \in X \setminus F$. Согласно лемме 2, существует такой индекс $\lambda \in \Lambda$, что $f_\lambda(a) \notin \overline{f_\lambda(F)}$, причем $f_\lambda(a) \neq *$. Пусть $\lambda \in \Lambda_i, i \geq 1$. Тогда $\psi_i(a) \notin \overline{\psi_i(F)}$. В самом деле, поскольку $f_\lambda(a) \neq *$, имеем $a \in U_\lambda$, и тогда $\psi_i(a) = f_\lambda(a) \in \overline{f_\lambda(F)} = \overline{\psi_i(F \cap U_\lambda)}$. С другой стороны, $\psi_i(F \cap (X \setminus U_\lambda)) \cap (c(G/H_\lambda) \setminus \{*\}) = \emptyset$. Поскольку $\psi_i(a) \in c(G/H_\lambda)$ и $\psi_i(a) \neq *$, отсюда следует, что $\psi_i(a) \notin \overline{\psi_i(F \cap (X \setminus U_\lambda))}$. Следовательно, $\psi_i(a) \notin \overline{\psi_i(F)}$. Диагональное произведение семейства $\{\psi_i, i \geq 1\}$ является искомым эквивариантным вложением X в счетную степень $J(G, \tau)^\infty$.

Для каждого натурального k , через $J_k(G, \tau)$ обозначим k -мерный “остов” G -ежа $J(G, \tau)$, т.е. $J_k(G, \tau) = \cup \{c(G/H_\alpha) \subset J(G, \tau); \dim c(G/H_\alpha) \leq k\}$. Из доказательства теоремы 1 легко извлечь и следующую ее разновидность:

ТЕОРЕМА 2. Пусть τ и G – такие же, как в теореме 1. Тогда каждое G -пространство X бесконечного веса $wX \leq \tau$ допускает эквивариантное вложение в произведение $\prod_{k=1}^\infty J_k(G, \tau)^\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку для любой большой подгруппы $H < G$ конус $c(G/H)$ является G -AR для класса M^G всех метризуемых G -пространств, отсюда можно вывести, что G -пространства $J(G, \tau)$ и $J_k(G, \tau), k \geq 1$, также являются G -AR пространствами для класса M^G .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [3] доказано предложение 4, аналогичное нашей теореме 2, но, к сожалению, его доказательство содержит пробел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. [2] Антонян С. А. // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 5. С. 3–9. [3] Агеев С. М. // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1994. № 1. С. 11–16.

Ереванский университет

Принято редколлегией
18.04.1996