Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, О резонансном эффекте для сингулярно возмущенных пучков операторов, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 5, 237–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1016>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:36:15

О РЕЗОНАНСНОМ ЭФФЕКТЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПУЧКОВ ОПЕРАТОРОВ

С. А. Степин

При исследовании устойчивости и асимптотического поведения решений эволюционных уравнений возникает вопрос о степени неортогональности системы собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) соответствующей спектральной задачи. В тех случаях, когда эти функции образуют базис Рисса, мерой их неортогональности служит величина Υ , равная произведению нормы ортогонализатора базиса на норму обратного оператора (константа риссовости).

Особый интерес представляет изучение степени неортогональности системы с.п.ф. сингулярно возмущенных операторов и краевых задач в зависимости от величины возмущения. Цель настоящей работы – продемонстрировать возникающие здесь эффекты и закономерности на примере двух краевых задач из гидродинамики. Эти задачи сводятся к спектральному анализу пучка вида $I + \lambda A + \frac{1}{\lambda} B$, $A, B \in \mathfrak{S}_\infty$. Известно [1], что система его корневых векторов обладает свойством двукратной базисности в соответствующем гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$; кроме того, в этой системе по определенному правилу [2] выделяются две подсистемы $E^\pm$, каждая из которых – базис Рисса в $\mathfrak{H}$. Соответствующие константы риссовости суть характеристики неортогональности корневых векторов пучка.

Первая из рассматриваемых здесь задач (см. [3])

$$(1) \quad i\varepsilon \lambda (y'' - k^2 y) + (q(x) - \lambda^2) y = 0, \quad x \in (a, b),$$

$$(2) \quad y'(a) = y'(b) = 0,$$

описывает колебания слоя плазмы во внешнем однородном магнитном поле. Здесь λ – спектральный параметр, функция $q > 0$ характеризует зависимость плотности плазмы от координаты x , $k > 0$. Задача (1), (2) при $\varepsilon \downarrow 0$ моделирует переход от резистивной магнитной гидродинамики к идеальной.

Введем новый спектральный параметр $\mu = i\lambda$ и обозначим через A_0 действующий в $\mathfrak{H} = L_2(a, b)$ оператор, порожденный дифференциальным выражением $-\frac{d^2}{dx^2} + k^2$ и условиями (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Функция y есть решение задачи (1), (2) в том и только том случае, когда вектор $\varphi = A_0^{1/2} y \in \mathfrak{H}$ удовлетворяет уравнению $\varepsilon \varphi - \mu G \varphi - \frac{1}{\mu} H \varphi = 0$, где $G = A_0^{-1}$, $H = A_0^{-1/2} q A_0^{-1/2}$.*

Таким образом, задача (1), (2) сводится к спектральному анализу операторного пучка $T_\varepsilon(\mu) = \mu^2 G - \varepsilon \mu I + H$ в $\mathfrak{H}$; наряду с $T_\varepsilon(\mu)$ используется также неограниченная запись этого пучка $S_\varepsilon(\mu) = A_0^{1/2} T_\varepsilon(\mu) A_0^{1/2}$. Ниже рассматриваются те значения параметра $\varepsilon > 0$, при которых все собственные значения (с.з.) $\{\mu_j\}$ пучка $T_\varepsilon(\mu)$ – однократные (отметим, что существует последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ с таким свойством). В этом случае, согласно [4], система нормированных собственных векторов пучка T_ε разбивается на две подсистемы $E^\pm$, каждая из которых образует базис Рисса в $\mathfrak{H}$; $E^\pm$ состоит из позитивных/негативных собственных векторов $\varphi_j \in \text{Ker } T_\varepsilon(\mu_j)$, $\mu_j \in \mathbb{R}$, для которых $(T'_\varepsilon(\mu_j) \varphi_j, \varphi_j) \geq 0$, и собственных векторов, отвечающих с.з. μ_j с $\text{Im } \mu_j \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция q аналитична в комплексной окрестности отрезка $[a, b]$ и достаточно близка к тождественной относительно метрики равномерной сходимости. Тогда константы риссовости подсистем $E^\pm$ пучка T_ε неограничены при $\varepsilon \downarrow 0$.*

СЛЕДСТВИЕ. *В предположениях теоремы 1 константы риссовости базисов $A_0^{-1/2} E^\pm$ в $W_2^1[a, b]$, составленных из половин системы с.ф. задачи (1), (2), неограничены при $\varepsilon \downarrow 0$.*

Доказательство базируется на существовании окрестности точки $\lambda_0 = \sqrt{(a+b)/2}$, свободной от с.з. задачи (1), (2) при малых $\varepsilon > 0$; этот факт устанавливается с использованием квазиклассических асимптотик решений уравнения (1) при $\varepsilon \downarrow 0$. В пределе $\varepsilon \downarrow 0$ пучок $S_\varepsilon(\mu)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00333).

вырождается в оператор-функцию, спектр которой заполняет отрезок $\sigma = i[\sqrt{q(a)}, \sqrt{q(b)}]$, причем $i\lambda_0 \in \sigma$, если q близка к тождественной. Тем самым для спектра оператор-функции S_ε обнаруживается нарушение полунепрерывности снизу (спектральный скачок) в точке $\varepsilon = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Система корневых векторов пучка $T_\varepsilon(\mu)$ обладает свойством двукратной базисности Рисса в $\mathfrak{H}$. Линеаризация пучка $T_\varepsilon(\mu)$ и оценка нормы резольвенты получающегося при этом оператора через расстояние до его спектра приводят к заключению о росте соответствующей константы риссовости при $\varepsilon \downarrow 0$ и позволяют оценить скорость роста. Подробнее об этом будет сказано в другом месте.

Вторая рассматриваемая здесь задача возникает при изучении вертикальной структуры колебаний атмосферы с температурной стратификацией (см. [5]):

$$(3) \quad y'' + \left[-\frac{1}{4} - H^2(x)k^2 + \frac{H(x)}{\varkappa} \left(\lambda + \frac{\beta(x)k^2}{\lambda} \right) \right] y = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+;$$

$$(4) \quad y'(0) + \left(\frac{H(0)k^2}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) y(0) = 0; \quad y(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty;$$

здесь λ — спектральный параметр, функция H характеризует зависимость температуры от высоты, $\beta = \varkappa - 1 + \varkappa H'/H$, $k > 0$. Предельный переход при $\varkappa \rightarrow \infty$ трактуется как переход к несжимаемости.

В работе [5] задача (3), (4) сведена к задаче на с.з. для пучка $L(\lambda) = I - \lambda U - \frac{1}{\lambda} V$ в $L_2(0, \infty)$ с коэффициентами $U, V \in \mathfrak{S}_\infty$; там же установлено, что множество Λ с.з. задачи (3), (4) принадлежит $\mathbb{R}_+$. Построим два набора $\Lambda_I \subset \Lambda$ и $\Lambda_{II} \subset \Lambda$ следующим образом:

1) $\Lambda \cap (k, \infty) \subset \Lambda_I$; 2) $\Lambda \cap (0, k) \subset \Lambda_{II}$; 3) число k включается в Λ_I (Λ_{II}), если

$$\int_0^\infty \left(H(x)k - \frac{1}{\varkappa} \right) H(x) \exp \left[2 \int_0^x \left(\frac{1}{2} - H(t)k \right) dt \right] dx \leq 0 \quad (\geq 0).$$

ТЕОРЕМА 2. Собственные функции задачи (3), (4), отвечающие с.з. из Λ_I и Λ_{II} образуют два базиса Рисса в гильбертовом пространстве с нормой $\left(\int_0^\infty [|y'|^2 + H^2|y|^2] dx \right)^{1/2}$; константы риссовости этих базисов ограничены при $\varkappa \rightarrow \infty$.

В доказательстве ключевую роль играет следующая

ЛЕММА. Если $\|U\| \cdot \|V\| < 1/4$, то константы риссовости $\Upsilon^\pm$ подсистем $E^\pm$ пучка $L(\lambda) = I - \lambda U - \frac{1}{\lambda} V$ допускают оценку $\Upsilon^\pm \leq \left(\frac{1}{4} - \|U\| \cdot \|V\| \right)^{-1}$.

Зависимость операторов U и V от параметра $\varkappa$ такова, что серия с.з. Λ_I исчезает в пределе $\varkappa \rightarrow \infty$, в то время, как с.з. из серии Λ_{II} стремятся к с.з. оператора $V_\infty = \lim_{\varkappa \rightarrow \infty} V \in \mathfrak{S}_\infty$. Пучок $L(\lambda)$ при больших значениях $\varkappa > 0$ можно рассматривать как возмущение оператор-функции $I - \frac{1}{\lambda} V_\infty$, относительно которого спектр обладает определенными свойствами устойчивости (в частности, полунепрерывности снизу).

Предложенный в работе подход дает аналитически строгое обоснование (обнаруженному в ходе численных экспериментов) резонансному эффекту, наличие или отсутствие которого обсуждается в [6] применительно к задаче об устойчивости течений вязкой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. [2] Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. // Функци. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 2. С. 38–61. [3] Лифшиц А. Е., Федоров Е. Н. // ЖТФ. 1985. Т. 55. № 4. С. 770–772. [4] Шкаликов А. А., Плиев В. Т. // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 2. С. 118–128. [5] Степин С. А. // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 83–98. [6] Farrell В. F. // Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 2093–2102.