Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Л. Ульянов, Воспоминания о Сергее Борисовиче Стечкине, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 11–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1017>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:04:00

УДК 517.5

ВОСПОМИНАНИЯ О СЕРГЕЕ БОРИСОВИЧЕ СТЕЧКИНЕ

П. Л. Ульянов

Сергей Борисович Стечкин родился в Москве 6 сентября 1920 г. и скончался в Москве 22 ноября 1995 г.

1. Сергей Борисович Стечкин был крупным математиком. Он проводил исследования по теории тригонометрических и ортогональных рядов, по приближению функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами, по приближению функций сплайнами, по приближению в банаховых пространствах, по приближению операторов и по некоторым разделам теории чисел.

С. Б. Стечкин — выдающийся педагог и лектор. На механико-математическом факультете Московского государственного университета он был одним из лучших лекторов по математическому анализу и специальным курсам. Был хорошо известен его научный семинар по теории функций. Он создал большую школу, в которой активно работают его ученики, из которых около 15 защитили докторские диссертации.

С. Б. Стечкин был создателем Института математики и механики Уральского отделения АН СССР в г. Свердловске (1957–1967 гг.).

С момента создания журнала «Математические заметки» в 1967 г. С. Б. Стечкин входил в его редколлегию до конца жизни, а первые 20 лет был главным редактором журнала.

Сергей Борисович Стечкин играл большую роль в развитии теории функций в Советском Союзе. Об этом частично говорилось выше. Нужно также отметить, что он часто выступал с лекциями и докладами на различных школах и конференциях, где рассказывал свои результаты, а также высказывал те направления в теории функций, в которых нужно было бы более активно работать. Он часто писал отзывы на статьи из журналов и рецензии на диссертации из ВАКа СССР. Эти отзывы далеко не всегда были положительными. Хорошо известна его небывалая активность как члена Совета по защите докторских и кандидатских диссертаций по теории функций в Математическом институте им. В. А. Стеклова и в Московском университете.

С. Б. Стечкин очень не любил глупость и необразованность людей по своей специальности, о чем иногда высказывался резко. Сам он был энциклопедистом по теории функций, и многие шли к нему за советами и справками по литературе.

Сергей Борисович Стечкин занимался многими направлениями из теории функций. Мы в этой заметке остановимся лишь на некоторых вопросах из теории тригонометрических и ортогональных рядов, которые исследовал С. Б. Стечкин. Расскажем об их дальнейшем развитии и сформулируем нерешенные задачи в этом направлении.

2. Я познакомился с С. Б. Стечкиным в конце 1950 г. на семинаре Д. Е. Меньшова и Н. К. Бари “Теория функций действительного переменного” в Московском университете. В сентябре 1950 г. я был принят в аспирантуру МГУ и стал посещать этот семинар. Сначала на этом семинаре я мало что понимал в докладах, так как говорили там достаточно быстро о знакомых им вещах. Часто выступали А. С. Кронрод и его ученики (Е. М. Ландис, А. Г. Витушкин, Р. А. Минлос и др.). Но потом выступил С. Б. Стечкин “О сходимости и расходимости тригонометрических рядов”, доклад которого я полностью понял. Этот доклад он также изложил на заседании Московского математического общества 19 декабря 1950 г., который был опубликован в его работе [4].

Чтобы изложить эти результаты и их дальнейшее развитие, нам понадобятся определения и полученные ранее теоремы.

Пусть дана последовательность функций $f_n(t)$, определенных на отрезке $[a, b]$. Тогда множество

$$E_p = \left\{ t : t \in [a, b], \text{ не существует предел } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right\}$$

называют *множеством расходимости* последовательности $\{f_n\}$ на отрезке $[a, b]$, а множество $E_c = [a, b] \setminus E_p$ — *множеством сходимости* последовательности $\{f_n\}$ на $[a, b]$.

Аналогично, множество

$$E_{np} = \left\{ t : t \in [a, b], \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(t)| = \infty \right\} \quad (E_{op} = E_p \setminus E_{np})$$

называют *множеством неограниченной* (соответственно, *ограниченной*) *расходимости* последовательности $\{f_n\}$.

Известно (см. [9, с. 259–265]), что если $f_n(t)$ непрерывны на $[a, b]$ ($n = 1, 2, \dots$), то множество E_c имеет тип $F_{\sigma\delta}$, E_p — тип $G_{\delta\sigma}$, E_{np} — тип G_δ , E_{op} — тип $G_{\delta\sigma}$, и усилить эти утверждения невозможно.

В 1906 г. Фату поставил вопрос о том, существует ли тригонометрический ряд

$$(1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

хотя сам ряд (1) расходится в каждой точке некоторого множества $E \subset [0, 2\pi]$ с $mE > 0$.

В 1911 г. Н. Н. Лузин [10] дал ответ на этот вопрос, доказав, что справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Существует степенной ряд*

$$(3) \quad S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad (c_n = a_n - ib_n, \quad z = e^{it}),$$

который расходится при всех z с $|z| = 1$, и при этом выполнено (2). Кроме того, действительная часть ряда (3) (т.е. ряд (1)) расходится почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$.

Различные математики усиливали результат Н. Н. Лузина (Штейнгауз, Харди, Литтлвуд, Недер, Кузьмин и др.). Мы здесь приведем еще важнейший результат А. Н. Колмогорова от 1922 г. (см. [11]).

ТЕОРЕМА 2. *Существует функция $f(t) \in L(0, 2\pi)$ такая, что ее тригонометрический ряд Фурье вида (1) расходится почти всюду.*

В этой работе А. Н. Колмогоров отмечает: “Функция, построенная в этой заметке, не суммируема с квадратом, и я ничего не знаю о порядке величины коэффициентов ее ряда Фурье”.

Далее, в 1926 г. А. Н. Колмогоров [12] усилил теорему 2. Именно, он построил функцию $f \in L(0, 2\pi)$, ряд Фурье (1) которой расходится всюду на $[0, 2\pi]$.

Изложение этих результатов и их дальнейшее развитие можно найти в монографии Н. К. Бари [13, гл. V] и в обзорах [14]–[16]. Развитие шло в разных направлениях. Так, исследовались у расходящихся рядов порядка стремления к нулю коэффициентов; рассматривались структуры множеств сходимости и расходимости тригонометрических рядов; изучалась степень интегрируемости функции f , имеющей расходящийся тригонометрический ряд Фурье; рассматривались расходящиеся ортогональные ряды и кратные системы функция и др.

Сейчас нам понадобятся два результата. В 1921 г. Недер [17] доказал, что для любой монотонной последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$ с

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 = \infty$$

найдется ряд вида (3), который всюду на окружности $|z| = 1$ расходится, хотя $|c_n| \leq \varepsilon_n$ при всех $n \geq 1$.

В 1942 г. А. Н. Колмогоров сообщил студенту С. Б. Стечкину (см. [4, с. 148]), что им доказана теорема: *для любой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$, удовлетворяющей условию (4), найдется тригонометрический ряд (1), расходящийся в каждой точке, и такой, что*

$$(5) \quad a_n, b_n = O(\varepsilon_n) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

В 1950 г. С. Б. Стечкин (см. [4]) усиливает этот результат. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Для любой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$, удовлетворяющей условию (4), найдется ряд вида (1), который вместе с сопряженным рядом*

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nt + a_n \sin nt$$

расходятся в каждой точке отрезка $[0, 2\pi]$, и при этом выполнено (5).

Доказательство этой теоремы было опубликовано С. Б. Стечкиным в 1957 г. (см. [8, с. 723]). Этим же методом (см. [4] и [8]), каким была доказана теорема 3, им устанавливается, что в ряде Лузина (3) действительная часть $\operatorname{Re} S(e^{it})$ и мнимая часть $\operatorname{Im} S(e^{it})$ этого ряда для $z = e^{it}$ (т.е. ряды (1) и (6)) расходятся при всех действительных t .

В работе С. Б. Стечкина [4] имеются еще два утверждения.

ТЕОРЕМА 4. Для того чтобы существовал тригонометрический ряд (1), сходящийся в каждой точке некоторого множества $E \subset [0, 2\pi]$ и имеющий неограниченные частные суммы на дополнении $[0, 2\pi] \setminus E$, необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа F_σ .

Далее последовательность отрезков $U(E) = \{\delta_n\}$ будем называть бесконечным покрытием множества E , если любая точка $t \in E$ принадлежит бесконечному числу отрезков δ_{n_k} ($n_k = n_k(t)$). Справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть множество $E \subset [0, 2\pi]$ обладает бесконечным покрытием $U(E) = \{\delta_n\}$, для которого

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (m\delta_n)^\alpha < \infty \quad \text{при некотором } \alpha \in (0, 1].$$

Тогда существует тригонометрический ряд (1), расходящийся в каждой точке E и такой, что

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)^{1+\alpha} < \infty.$$

Ясно, что если множество $E \subset [0, 2\pi]$ имеет меру $mE = 0$, то оно имеет бесконечное покрытие, для которого выполнено (7) при $\alpha = 1$. Стало быть, если возьмем любое множество $E \subset [0, 2\pi]$ с мерой $mE = 0$, то по теореме 5 найдется функция $f \in L^2(0, 2\pi)$ (см. еще (8)), ряд Фурье (1) которой расходится в каждой точке E , т.е. в этом случае множество расходимости E_p последовательности частных сумм ряда (1) содержит в себе множество E .

Указанные выше теоремы С. Б. Стечкина развивались в разных направлениях.

Так, С. Ш. Галстяном доказано (см. [15, с. 61 и 65]), что верны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Для любой последовательности a_n с $a_n \downarrow 0$ и $\{a_n\} \notin \ell_2$ найдется последовательность η_n , принимающая лишь значения 0 и 1, такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n \cos nt$$

расходится при всех $t \in [0, 2\pi]$.

Пусть $t_n(t)$ – тригонометрическая система, т.е.

$$\{\cos nt, \sin nt\} = \{\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \dots\}.$$

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 7. Пусть $a_n \downarrow 0$ и $\{a_n\} \notin \ell_2$. Тогда найдется последовательность η_n , принимающая лишь значения 0 и 1, такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n t_n(t),$$

а также его сопряженный ряд, расходятся всюду на $[0, 2\pi]$.

На саратовской школе по теории функций (январь–февраль 1984 г.) при нашей беседе с А. С. Виноградовым и А. М. Олевским возник вопрос о расходящихся всюду рядах класса H_1 . Ответ на него дал С. Ш. Галстян (см. [15, с. 65–66]). Именно, пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$ и $\{\varepsilon_n\} \notin \ell_2$. Тогда существует ряд вида (3) с $|c_n| \leq \varepsilon_n$ при $n \geq 1$, который сходится по норме пространства $L(0, 2\pi)$, но действительная и мнимая части которого всюду расходятся на $[0, 2\pi]$.

Теорема 4 С. Б. Стечкина была обобщена Целлером [18]. Он установил, что всякое множество $E \subset [0, 2\pi]$ типа G_δ является множеством неограниченной расходимости E_{nr} некоторого ряда Фурье. Это означает, что теорема Стечкина остается верной и для тригонометрических рядов Фурье (см. также [13, с. 427]). Но это все, что мы знаем. Например, если мы будем рассматривать все множества точек расходимости (а не только неограниченной расходимости), то нет их полной характеристики ни для тригонометрических рядов, ни для рядов Фурье того или иного класса (L^p , C , B и т. п.). И этот вопрос крайне сложен. Об этом мы уже говорили в статье [14, с. 67]). Сейчас еще отметим, что Кёрнер [19] показал, что существует множество $E \subset [0, 2\pi]$ типа F_σ (очевидно, оно типа $G_{\delta\sigma}$), которое не является множеством расходимости E_r никакого тригонометрического ряда Фурье. Этот результат обобщила С. Ю. Лукашенко [20]: *множество Кёрнера E не является множеством расходимости никакого тригонометрического ряда, а также не является множеством расходимости средних никакого конечнострочного метода суммирования Теплица для тригонометрических рядов с коэффициентами, стремящимися к нулю.*

Отметим, что множество Кёрнера E имеет меру $mE > 0$, и остается открытым вопрос для случая множеств E с $mE = 0$.

В связи с теоремой 4 С. Б. Стечкина приведем результат Л. В. Тайкова [21], который доказал, что для всякого множества $E \subset [0, 2\pi]$ типа F_σ существует пара сопряженных рядов Фурье, всюду сходящихся на E и неограниченно расходящихся на $[0, 2\pi] \setminus E$. Это является обобщением теоремы Целлера.

Кахан и Кацнельсон [22] установили, что для любого множества $E \subset [0, 2\pi]$ с мерой $mE = 0$ существует такая комплекснозначная функция $f \in C(0, 2\pi)$, что ее ряд Фурье неограниченно расходится на E . Этот результат был распространен В. В. Буздалиным [23] на действительные функции $f \in C(0, 2\pi)$. В этой же работе им доказано, что если множество $E \subset [0, 2\pi]$ замкнуто и мера $mE = 0$, то существует действительная функция $f \in C(0, 2\pi)$, у которой ряд Фурье неограниченно расходится на E и сходится на $[0, 2\pi] \setminus E$, т. е. $E_{nr} = E$, $E_s = [0, 2\pi] \setminus E$.

Далее, В. В. Буздалин [24] установил, что всякое симметричное совершенное множество с постоянным отношением (см. [13, с. 829]) является множеством ограниченной расходимости, т. е. существуют постоянная M и функция $\Phi = f + i\bar{f} \in C(0, 2\pi)$ такие, что оба ряда Фурье $\sigma(f)$ и $\sigma(\bar{f})$ расходятся всюду на E и сходятся на $[0, 2\pi] \setminus E$, и, кроме того, нормы $\|s_n(t, \Phi)\|_{C(0, 2\pi)} < M$ при всех $n \geq 1$, где $s_n(t, \Phi)$ — частичная сумма ряда Фурье от Φ . В этой же работе доказано, что если множество $E \subset F_\sigma \cap G_\delta$ с мерой $mE = 0$, то E — множество неограниченной расходимости, т. е. существует функция $\Phi = f + i\bar{f} \in C(0, 2\pi)$, у которой ряды Фурье $\sigma(f)$ и $\sigma(\bar{f})$ оба неограниченно расходятся на E и оба сходятся на $[0, 2\pi] \setminus E$.

Отметим еще результаты Сладковской [25], которая изучала расходимость рядов Фурье непрерывных функций на множествах, имеющих логарифмическую хаусдорфову меру нуль.

3. Свои первые результаты С. Б. Стечкин получил по абсолютной сходимости ортогональных рядов в аспирантские годы. Об этом он сделал доклад 17 декабря 1946 г. на Московском математическом обществе и опубликовал в работе [1]. К этой тематике он возвращался несколько раз. Сначала напомним предыдущие результаты. Через $E_n^{(p)}(f, T)$ обозначается наилучшее в пространстве $L^p(0, 2\pi)$ приближение функции $f \in L^p(0, 2\pi)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n - 1$. Будем считать, что $E_n(t, T) = E_n^{(\infty)}(t, T)$ и $C(0, 2\pi) = L^\infty(0, 2\pi)$. Совершенно аналогично вводятся понятия наилучшего приближения $E_n(f, \Phi)$ и для других ортогональных систем $\Phi = \{\varphi_n\}$.

Через A_γ обозначается класс функций f , для которых коэффициенты Фурье $\{c_n(f)\} \in \ell_\gamma$.

В 1914 г. С. Н. Бернштейн (см. [27] и [29, с. 217 и 534]) установил, что справедлива

ТЕОРЕМА 8. *Если 2π -периодическая функция $f \in \text{Lip } \alpha$ с $\alpha > \frac{1}{2}$, то $f \in A_1$ для тригонометрической системы T . При $\alpha \leq \frac{1}{2}$ это утверждение теряет силу.*

Много позже стало известно, что первая часть теоремы 8 является частным случаем утверждения Фредгольма [26] от 1903 г., из которого следует, что функция $f \in A_\gamma$ при $\gamma > 2/(2\alpha + 1)$, если $f \in \text{Lip } \alpha$. Последний результат также был потом переоткрыт Сасом (см. [13, с. 647]).

В 1934 г. С. Н. Бернштейн (см. [28] и [30, с. 166–169, 590–592]) доказал, что верна

ТЕОРЕМА 9. *Если*

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} E_n(f, T) < \infty,$$

то $f \in A_1$. Если же числа $E'_n \downarrow 0$ и

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} E'_n = \infty,$$

то можно построить функцию f , для которой $E_n(f, T) < E'_n$, но $f \notin A_1$.

С. Н. Бернштейном же показано, что если

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty$$

где $\omega(\delta, f)$ – модуль непрерывности, то $f \in A_1$. С другой стороны, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega\left(\frac{1}{n}\right) = \infty$$

и для некоторого $\varepsilon > 0$ функции по δ

$$(12) \quad \delta^{-\varepsilon} \omega(\delta) \uparrow, \quad \text{а} \quad \delta^{\varepsilon-1} \omega(\delta) \downarrow,$$

то соотношение $\omega(\delta, f) = O(\omega(\delta))$ не влечет за собой $f \in A_1$.

В своей работе С. Б. Стечкин [1] рассматривает ограниченную ортонормированную на $[0, 2\pi]$ систему $\Phi = \{\varphi_n\}$ с $M = \sup_{n,t} |\varphi_n(t)|$, и для нее справедлива

ТЕОРЕМА 10. Пусть $f \in L^p(0, 2\pi)$ с $p \in (1, 2]$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^\beta \leq C \sum_{n=1}^{\infty} [n^{\frac{1}{p}-1} E_n^{(p)}(f, \Phi)]^\beta,$$

где $\beta \in (0, \frac{p}{p-1})$, $C = C(p, \beta, M)$, а $c_n(f)$ – коэффициенты Фурье от f по системе Φ .

Мы не знаем, для каких ортогональных систем эта теорема является окончательной.

Из этой теоремы для $p = 2$ и $\beta = 1$ имеем неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} E_n^{(2)}(f, \Phi).$$

Эта теорема усиливает результаты Бернштейна и Саса для ортогональных систем.

В работе С. Б. Стечкина [2] установлено, что условие (9) эквивалентно условию (11), а в работе [5] доказано, что если $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, то для системы T соотношение $\omega(\delta, f) = O(\omega(\delta))$ ($0 < \delta \leq \pi$) влечет за собой $f \in A_1$ в том и только том случае, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Из сказанного вытекает, что в теореме Бернштейна условия (12) можно опустить.

Далее, пусть $\{n_k\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел и функция $F(u)$ такова, что $F(0) = 0$, $F(u)$ возрастает и $F(u)$ вогнута. Тогда если $\Phi = \{\varphi_n\}$ – ортонормированная система и $f \in L^2$, то С. Б. Стечкин [2] устанавливает неравенство

$$(13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} F(c_{n_k}^2(f)) \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{k} \{E_{n_k}^{(2)}(f, \Phi)\}^2\right).$$

Из (13) видно, что абсолютную сходимость (и ее обобщения) можно оценить через наилучшие приближения

$$E_n^{(2)}(f, \Phi) = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} c_i^2(f) \right\}^{1/2},$$

которые явно выражаются через коэффициенты Фурье $c_i(f)$. Об этом для тригонометрической системы указывал С. Н. Бернштейн (см. [30, с. 591]) как об особом преимуществе условий С. Б. Стечкина.

В работах [6] и [7] С. Б. Стечкин проводит исследование абсолютной сходимости рядов Тейлора и лакунарных тригонометрических рядов Фурье. Отвечая на вопрос Н. К. Бари о гладкости функций, ряды Фурье которых не имеют точек абсолютной сходимости, он доказывает [6], что справедлива

ТЕОРЕМА 11. Пусть $E'_n \downarrow 0$ и справедливо (10). Тогда найдется функция $S(z)$, аналитическая в круге $|z| < 1$, для которой $E_n(S) = O(E'_n)$, и такая, что ряды Фурье функций $\operatorname{Re} S(e^{it})$ и $\operatorname{Im} S(e^{it})$ не имеют ни одной точки абсолютной сходимости.

Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}$ – ортонормированный базис пространства L^2 и $c_n = c_n(f) = (f, \varphi_n)$ – коэффициенты Фурье. С. Б. Стечкин [3] устанавливает, что верна

ТЕОРЕМА 12. *Для того чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|,$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} l_n(f, \Phi)_2,$$

где

$$l_n(f, \Phi)_2 = \inf \left\| f - \sum_{i=1}^{n-1} d_{k_i} \varphi_{k_i} \right\|_2,$$

а нижняя грань берется по всем $\{d_{k_i}\}$ и $k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1}$.

С. Б. Стечкин высоко оценивал достоинства теоремы 12. По нашему мнению ее ценность состоит во введении новых наилучших приближений $l_n(f, \Phi)_2$ и нахождении правильной формулировки теоремы.

В этой же работе он отмечал, что теорему 12 можно перенести и на сходимость рядов вида

$$\sum |c_n(f)|^p \quad (0 < p < 2) \quad \text{и} \quad \sum F(|c_n(f)|),$$

где $F(\sqrt{u})$ – вогнутая функция, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям.

4. Я с Сергеем Борисовичем Стечкиным был знаком с 1950 года до дня его кончины в 1995 г. Мы вместе с ним работали в отделе теории функций Математического института им. В. А. Стеклова и на механико-математическом факультете Московского университета. Сначала в МГУ С. Б. Стечкин работал на кафедре теории функций и функционального анализа, а потом перешел на кафедру математического анализа, ибо он там регулярно читал общий курс математического анализа.

С 1967 г. стал выходить журнал “Математические заметки”, где я много лет был заместителем главного редактора, а главным редактором был С. Б. Стечкин. В то время журнал постепенно становился одним из основных математических журналов СССР.

С 1957 г. до 1967 г. С. Б. Стечкин работал в Институте математики и механики Уральского отделения АН СССР. В это время мы с ним написали две работы [31] и [32], периодически встречались в Москве и в Свердловске.

В монографии [32] рассматривается некоторая последовательность функций $\{f_n(t)\}$, определенных на отрезке $[a, b]$, и $\{n_k\}$ – возрастающая подпоследовательность натуральных чисел. Пусть нам известно то или иное поведение на множестве $E \subset [a, b]$ подпоследовательности частичных сумм

$$s_{n_k}(t) = \sum_{n=1}^{n_k} a_n f_n(t)$$

ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t).$$

Спрашивается, что мы можем сказать о поведении коэффициентов $\{a_n\}$ или же о поведении частичных сумм $s_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) на множестве E или же на $[a, b]$? В монографии исследуются тригонометрические или степенные системы функций f_n , а в качестве E берется произвольное множество с мерой $mE > 0$. Далее рассматриваются гармонические ряды, ряды по системам $\{\varphi(kt - \alpha_k)\}$ и ортогональные ряды. В конце рассматриваются общие функциональные ряды.

В статье [31] идет речь о множествах единственности для рядов по системам функций, обобщающих систему Радемахера $\{r_n(t)\}$. Приведем один из результатов. Именно, справедлива (см. [31])

ТЕОРЕМА 13. Пусть дан регулярный метод суммирования T и ряд

$$(14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_{k_n}(t),$$

где $\{k_n\}$ – переставленная система натуральных чисел $\mathbb{N}$. Тогда если E – множество всех тех точек отрезка $[0, 1]$, в которых ряд (14) суммируем методом T к нулю, то

- 1) mE есть двоично-рациональное число;
- 2) если $mE > \frac{1}{2}$, то все $a_n = 0$;
- 3) если $mE > 0$, то найдется такой номер n_0 , что $a_n = 0$ при всех $n \geq n_0$.

Кроме того, существует ряд вида (14), который сходится к нулю на множестве E с $mE = \frac{1}{2}$ и у которого не все коэффициенты равны нулю.

Из этой теоремы вытекает, что для системы Радемахера $\{r_n(t)\}$ всякое множество $A \subset [0, 1]$ с $mA < \frac{1}{2}$ является U -множеством.

Если в теореме 13 рассмотрим $k_n = n$ и T -сходимость, то в случае 3) количество отличных от нуля коэффициентов a_n как-то связано с величиной $mE \in (0, \frac{1}{2})$. Эта связь мне неизвестна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // УМН. 1947. Т. 2. №3. С. 177–178.
- [2] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. I // Матем. сб. 1951. Т. 29. №1. С. 225–232.
- [3] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // ДАН СССР. 1955. Т. 102. №1. С. 37–40.
- [4] Стечкин С. Б. О сходимости и расходимости тригонометрических рядов // УМН. 1951. Т. 6. №2. С. 148–149.
- [5] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17. С. 87–98.
- [6] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение) // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. С. 221–246.
- [7] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости рядов Фурье (третье сообщение) // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. С. 385–412.
- [8] Стечкин С. Б. О тригонометрических рядах, расходящихся в каждой точке // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. С. 711–728.
- [9] Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ, 1937.
- [10] Lusin N. N. Über eine Potenzreihe // Rendiconti Cire Matem. di Pakermo. 1911. V. 32. P. 386–390.
- [11] Kolmogoroff A. Une série de Fourier–Lebesgue divergente presque partout // Fund. Math. 1923. V. 4. P. 324–328.

- [12] Kolmogoroff A. Une serie de Fourier–Lebesgue divergente partout // *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*. 1926. V. 183. P. 1327–1329.
- [13] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: ГИТТЛ, 1961.
- [14] Ульянов П. Л., А. Н. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье // *УМН*. 1983. Т. 38. № 4. С. 51–90.
- [15] Ульянов П. Л. О работах Н. Н. Лузина по метрической теории функций // *УМН*. 1985. Т. 40. № 3. С. 15–70.
- [16] Ульянов П. Л. Метрическая теория функций // *Труды МИАН*. 1988. Т. 182. С. 180–223.
- [17] Neder L. Zur Theorie der trigonometrischen Reihen // *Math. Ann.* 1921. V. 84. P. 117–136.
- [18] Zeller K. Über Kondenzmengen von Fourierreihen // *Arch. Math.* 1955. V. 6. P. 335–340.
- [19] Körner T. W. Sets of divergence for Fourier series // *Bull. Lond. Math. Soc.* 1971. № 3. P. 152–154.
- [20] Лукашенко С. Ю. О структуре множеств расходимости тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша // *ДАН СССР*. 1980. Т. 253. № 3. С. 528–529.
- [21] Тайков Л. В. О расходимости рядов Фурье // *ДАН СССР*. 1961. Т. 137. № 4. С. 782–785.
- [22] Kahane J.-P., Katznelson. Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques // *Rtudia Math.* 1966. V. 26. P. 305–306.
- [23] Буздалин В. В. О неограниченно расходящихся тригонометрических рядах Фурье от непрерывных функций // *Матем. заметки*. 1970. Т. 7. № 4. С. 7–18.
- [24] Буздалин В. В. Тригонометрические ряды Фурье непрерывных функций, расходящихся на заданном множестве // *Матем. сб.* 1974. Т. 95. № 1. С. 84–107.
- [25] Sladkowska J.. Sur les ensembles des points de divergence des series de Fourier des fonctions continues // *Fund. Math.* 1961. V. 49. P. 271–294.
- [26] Fredholm Y. Sur une classe d'equations fonctionelles // *Acta Math.* 1903. V. 27. P. 365–390.
- [27] Бернштейн С. Н. Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов // *Сообщ. Харьк. матем. об-ва. Серия 2*. 1914. Т. 14. С. 139–144.
- [28] Бернштейн С. Н. Sur la convergence absolue des séries trigonométrique // *Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris*. 1934. Т. 199. С. 397–400.
- [29] Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. I. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
- [30] Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. II. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
- [31] Стечкин С. Б., Ульянов П. Л. О множествах единственности // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1962. Т. 26. С. 211–222.
- [32] Стечкин С. Б., Ульянов П. Л. Подпоследовательности сходимости рядов // *Труды МИАН*. 1965. Т. 86. С. 1–83.