Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Стечкин, А. Ю. Попов, Асимптотическое распределение простых чисел в среднем, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 21–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1018>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 02:15:52

УДК 511.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В СРЕДНЕМ

С. Б. Стечкин, А. Ю. Попов

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	21
§ 2. Формулировки результатов	24
§ 3. Доказательства теорем 1–3 и их следствий	36
§ 4. Доказательства теорем 4–14 и их следствий	47
§ 5. Доказательства теорем 15–19	75
Список литературы	87

§ 1. Введение

Пусть

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1, \quad \text{li } x = \int_2^x (\ln t)^{-1} dt,$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & n = p^m, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \quad \psi_0(x) = \frac{\psi(x+0) + \psi(x-0)}{2}.$$

Буквой p , как обычно, здесь обозначены простые числа.

Исследование поведения функции $\pi(x)$ является одной из центральных задач аналитической теории чисел. После того, как Адамар [1] и Валле-Пуссен [2] независимо доказали асимптотический закон

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \sim \text{li } x \quad (x \rightarrow +\infty),$$

получение возможных лучших оценок сверху и снизу для модуля разности $P(x) = \pi(x) - \text{li } x$ стало одним из главных направлений исследований в теории распределения

простых чисел. Отметим сразу же, что обычно изучают функцию $R(x) = \psi(x) - x$ или же $R_0(x) = \psi_0(x) - x$. Последнее оказывается технически проще. Переход от $R(x)$ к $P(x)$ осуществляется с помощью известных соотношений [3, с. 124–125]

$$\pi_1(x) = \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} = \frac{\psi(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\psi(t) dt}{t \ln^2 t},$$

$$\pi_1(x) = \pi(x) + \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} \frac{\pi(x^{1/m})}{m},$$

откуда немедленно вытекает, что

$$(1) \quad P(x) = \frac{R(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{R(t) dt}{t \ln^2 t} - \frac{\sqrt{x}}{\ln x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}\right).$$

Равенство (1) показывает, что если $|R(x)|$ не слишком мал, то $|P(x)|$, грубо говоря, “в $\ln x$ раз меньше” чем $R(x)$.

В 1899 году Валле-Пуссен [4] доказал, что

$$R(x) = O(x \exp\{-c_1 \sqrt{\ln x}\}).$$

(Через c_1, c_2, c_3 и т. д. мы будем обозначать некоторые положительные постоянные.) Наилучшая по порядку из известных в настоящее время оценок сверху $|R(x)|$ (см. [5]–[9]) имеет вид

$$(2) \quad R(x) = O(x \exp\{-c_2 (\ln x)^{0.6} (\ln \ln x)^{-0.2}\}) \quad (x \geq 20).$$

Для ее доказательства потребовались очень глубокие и сложные теоремы об оценках тригонометрических сумм. Именно они и позволили получить неравенство

$$(3) \quad |\zeta(\sigma + it)| \leq c_3 (\ln |t|)^{2/3}, \quad \sigma \geq 1 - c_4 (\ln |t|)^{-2/3}, \quad |t| > t_0.$$

А уже из (3) с помощью методов, разработанных еще Валле-Пуссеном, можно вывести, что при $|t| > t_0$

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0, \quad \sigma > 1 - c_5 (\ln |t|)^{-2/3} (\ln \ln |t|)^{-1/3}.$$

Последняя оценка дает (2). Подобные доказательства имеются в книге [10], а более полное изложение истории вопроса – в [8], см. также обзор [11].

Не желая умалять достоинства результата (2), отметим, что он носит “достаточный” характер и по существу лишь отражает имеющиеся на сегодняшний день оценки сверху вещественных частей нулей дзета-функции Римана. Давно известно, что чем лучше оценка сверху для действительных частей нулей $\zeta(s)$, тем лучше и оценка сверху для $|R(x)|$ (а значит, ввиду (1) и для $|P(x)|$). Например, справедливо соотношение

$$(4) \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |R(x)|}{\ln x} = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |P(x)|}{\ln x} = \Theta,$$

где $\Theta = \sup\{\operatorname{Re} s \mid \zeta(s) = 0\}$.

Соотношение (4) показывает, что в действительности наибольший рост функций $|R(x)|$ и $|P(x)|$ определяется величиной Θ . Но, несмотря на усилия многих математиков, до сих пор про число Θ не известно ничего, кроме тривиального неравенства $1/2 \leq \Theta \leq 1$. Утверждение “ $\Theta = 1/2$ ” составляет гипотезу Римана. С другой стороны, даже возможность $\Theta = 1$ пока не исключена.

Обратим внимание на то обстоятельство, что в (4) нельзя заменить $\limsup$ на $\lim$. Это подтверждается теоремой Шмидта [12]

$$(5) \quad \begin{aligned} R(x) &= \Omega_{\pm}(x^{\Theta-\varepsilon}), \\ P(x) &= \Omega_{\pm}(x^{\Theta-\varepsilon}), \end{aligned} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

и безусловными оценками Литтлвуда [13]

$$(6) \quad \begin{aligned} R(x) &= \Omega_{\pm}(\sqrt{x} \ln \ln \ln x), \\ P(x) &= \Omega_{\pm}(\sqrt{x}(\ln x)^{-1} \ln \ln \ln x). \end{aligned}$$

Таким образом, функции $R(x)$ и $P(x)$ принимают “большие” по абсолютной величине как положительные, так и отрицательные значения, бесконечно много раз меняют знак и, следовательно, в окрестностях точек смены своего знака $R(x)$ и $P(x)$ по модулю “достаточно малы”.

Имеем также [14]

$$(7) \quad R(x) = O(x^{\Theta} \ln^2 x), \quad P(x) = O(x^{\Theta} \ln x).$$

Оценки (5)–(7) представляют из себя уточнение грубого соотношения (4).

Примечательно, что и после усреднения $R(x)$ функция $R_1(x) = \int_0^x R(u) du$ остается колеблющейся. При этом упомянутые смены знака $R(x)$ не дают существенной интерференции. Имеем [15], [16, с. 120]

$$(8) \quad \begin{aligned} R_1(x) &= O(x^{1+\Theta}), \\ R_1(x) &= \Omega_{\pm}(x^{1+\Theta-\varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon > 0), \\ R_1(x) &= \Omega_{\pm}(x^{3/2}). \end{aligned}$$

Правда, если справедлива гипотеза Римана, то между O -оценками и Ω -оценками для $R_1(x)$ уже нет зазора, и аналог “феномена Литтлвуда” (неограниченность $R(x)/\sqrt{x}$) для функции $R_1(x)$ отсутствует: $R_1(x) = O(x^{3/2})$. Но происходит это, в основном, не за счет компенсации в результате интегрирования положительных и отрицательных значений $R(x)$, а потому, что “литтлвудовские всплески” встречаются относительно редко. Это показывает теорема Крамера [17]

$$(9) \quad \int_1^x R^2(u) u^{-1} du = O(x) \quad (\text{если } \Theta = 1/2)$$

или же

$$(10) \quad \int_1^x R^2(u) du \leq c_6 x^2 \quad (\text{если } \Theta = 1/2).$$

Насколько нам известно, оценки (8)–(10) и асимптотика

$$\Theta = 1/2 \implies \int_1^x R^2(u)u^{-2} du \sim k \ln x, \quad 0 < k < +\infty \quad (x \rightarrow +\infty),$$

найденная в [18], составляют основные результаты о средних значениях функции $R(x)$, полученные ранее.

Наша работа посвящена изучению различного рода средних от функции $R(x)$. Выводятся оценки сверху и снизу для интегралов от функции $R(x)$ и степеней ее модуля. Соответствующие неравенства доказываются и для $P(x)$. Основным нашим достижением мы считаем то, что нам удалось Ω -оценки функций

$$|P(u)|, \quad |R(u)|, \quad R^+(u) = \max(0, R(u)), \quad R^-(u) = -\min(0, R(u))$$

заменить *правильными по порядку оценками снизу от их интегралов* по “не слишком длинным” отрезкам (от x до Ax , A – постоянная). Доказаны как условные, так и безусловные (т.е. не зависящие от возможного значения Θ) оценки. В качестве иллюстрации приведем безусловные оценки снизу.

Существуют положительные постоянные x_0 , $A > 1$ такие, что при всех $x > x_0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} |R(u)| du &\geq \frac{x^{3/2}}{200}, & \int_x^{2x} |P(u)| du &\geq \frac{x^{3/2}}{\ln x}, \\ \int_x^{Ax} R^+(u) du &\geq x^{3/2}, & \int_x^{Ax} R^-(u) du &\geq x^{3/2}. \end{aligned}$$

Приведенный результат можно усилить, не производя сенсации, только за счет постоянного множителя при $x^{3/2}$ в правых частях неравенств. Ведь если бы даже для какой-нибудь последовательности $x_n \rightarrow +\infty$ было доказано, что

$$\int_{x_n}^{Ax_n} |R(u)| du \geq \sqrt{c_6 A^3} x^{3/2}$$

(c_6 – постоянная неравенства (10)), то гипотеза Римана была бы опровергнута. Действительно, в предположении справедливости гипотезы Римана из (10) находим

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{Ax_n} |R(u)| du &< \int_1^{Ax_n} |R(u)| du \leq \left(\int_1^{Ax_n} R^2(u) du \right)^{1/2} \left(\int_1^{Ax_n} du \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{c_6 (Ax_n)^2} \sqrt{Ax_n - 1} < (Ax_n)^{3/2} \sqrt{c_6}. \end{aligned}$$

Несколько слов о структуре работы. В §2 формулируются и обсуждаются полученные результаты. §§ 3–5 посвящены их доказательствам.

§ 2. Формулировки результатов

ТЕОРЕМА 1. *Существует абсолютная эффективная постоянная c_7 такая, что при всех $b \geq 1$ и $x \geq 1$ справедливо неравенство*

$$(1.2) \quad \int_1^x |R(u)|^b du \leq (c_7 b)^{2b} x^{1+b\Theta}.$$

Обсудим содержание теоремы 1. Пусть $b = 1$. Тогда

$$(2.2) \quad \int_1^x |R(u)| du \leq c_8 x^{1+\Theta}.$$

Из неравенства (2.2) вытекает, что результат от интегрирования $|R(u)|$ по отрезку $[1, x]$ не больше, чем от интегрирования $2c_8 u^\Theta$. То есть $R(u)$ “в среднем есть $O(u^\Theta)$ ”, причем постоянные c_7 и c_8 — абсолютные, они не зависят от возможного значения Θ . Более того, и $|R(u)|^b$ “в среднем есть $O(u^{b\Theta})$ ” при любом $b > 1$. Теорема Крамера (10) содержится в теореме 1 при $\Theta = 1/2$, $b = 2$. Отметим, что при $\Theta = 1/2$ ввиду (6) теорема 1 не следует из абсолютных оценок для функции R .

На случай $\Theta > 1/2$ нам удалось асимптотически улучшить известное соотношение (7).

ТЕОРЕМА 2. Если $\Theta > 1/2$, то

$$(3.2) \quad |R(x)| \leq c_9(\Theta) x^\Theta.$$

Постоянная c_9 здесь зависит от возможного значения Θ . Если же Θ недостижимо, т.е. $\zeta(\Theta + it) \neq 0$ при любом $t \in \mathbb{R}$, то

$$R(x) = o(x^\Theta) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Нам не удалось доказать неравенство (3.2) с абсолютной постоянной c_9 . Поэтому даже если гипотеза Римана не верна и мы бы знали о значении Θ только то, что $\Theta > 1/2$, то и в этом случае теорема 1 не могла бы быть непосредственно выведена из (3.2), поскольку постоянная c_7 является абсолютной.

Заметим также, что если вдруг окажется (вопреки ожиданиям многих ученых!), что $\Theta = 1$, то теоремы 1 и 2 станут тривиальными и малосодержательными.

Приведем несколько следствий из сформулированных результатов. Положим

$$\Delta(u) = R(u)u^{-\Theta}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. При любых $b \geq 1$ и $x \geq 1$

$$x^{-1} \int_1^x |\Delta(u)|^b du = O(1).$$

Постоянная в символе O зависит только от b .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\lambda \leq (ec_7)^{-1}$, то

$$x^{-1} \int_1^x \exp\{\lambda \sqrt{|\Delta(u)|}\} du = O(1).$$

Постоянная в символе O абсолютная; она не зависит от возможного значения Θ .

Подчеркнем еще раз, что если $\Theta = 1/2$, то согласно теореме Литтлвуда

$$\Delta(x) = \Omega_\pm(\ln \ln x).$$

Таким образом, если верна гипотеза Римана, то оценки $R(u)$ в интегральных метриках принципиально отличаются от оценок максимума модуля этой функции. Те значения u , при которых $|R(u)|/\sqrt{u}$ велик, являются в некотором смысле исключениями из правила. Оценку меры больших значений $|R(u)|/\sqrt{u}$ дает

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть справедлива гипотеза Римана. Обозначим

$$\mathfrak{M}(V, x) = \text{мера}\{u \in [x, 2x] \mid |R(u)| > \sqrt{u} V(u)\},$$

где V – некоторая неубывающая функция, стремящаяся к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда

$$(4.2) \quad \mathfrak{M}(V, x) = O\left(x \exp\{-c_{10} \sqrt{V(x)}\}\right).$$

Заметим, что из следствия 3 несложно вывести известную теорему [19]: если $\Theta = 1/2$, то

$$R(u) = O(\sqrt{u} \ln^2 u).$$

Усилить ее, однако, не удастся. Это получилось бы, если бы мы могли в (1.2) заменить $(c_7 b)^{2b}$ на $(o(b))^{2b}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Существует абсолютная постоянная c_{11} такая, что при любых $b \geq 1$ и $x \geq 4$

$$(5.2) \quad \int_2^x |P(u)|^b du \leq (c_{11} b)^{2b} x^{1+b\Theta} (\ln x)^{-b}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Если $\Theta > 1/2$, то

$$|P(x)| \leq c_{12}(\Theta) x^\Theta / \ln x.$$

Если Θ недостижимо, то

$$P(x) = o(x^\Theta / \ln x) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Из следствия 1, в свою очередь, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6. При любых $q \geq 1$ и $x \geq e$

$$\int_1^x |\Delta(u)|^q u^{-1} du = O(\ln x).$$

Постоянная в O зависит от q , но не от Θ .

В частном случае $q = 2$ в предположении справедливости гипотезы Римана Крамер [18] доказал утверждение более сильное, чем следствие 6:

$$\int_1^x R^2(u) u^{-2} du \sim k \ln x,$$

где $k = \sum_\rho (\nu_\rho / |\rho|)^2$, где ν_ρ – кратность нуля ρ , а $\sum_\rho$ понимается как сумма по всем различным нетривиальным нулям ρ дзета-функции Римана.¹

Нам удалось найти обобщение этого результата Крамера.

¹Напомним, что нетривиальными называются все нули $\zeta(s)$, лежащие в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Остальные нули являются простыми, имеют вид $\{-2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и называются тривиальными. Все найденные к настоящему времени нетривиальные нули $\zeta(s)$ – простые, и до сих пор неизвестно, существуют ли у $\zeta(s)$ кратные нули.

ТЕОРЕМА 3. Если $b \in \mathbb{N}$, то существует предел

$$(6.2) \quad \mathcal{B}(b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{-1} \int_1^x (\Delta(u))^b u^{-1} du,$$

где

$$(7.2) \quad \mathcal{B}(b) = (-1)^b \sum_{\substack{\text{Im}(\sum_{k=1}^b \rho^{(k)}) = 0 \\ \text{Re } \rho^{(k)} = \Theta, \ 1 \leq k \leq b}} \cdots \sum_{k=1}^b \prod_{k=1}^b (\rho^{(k)})^{-1}.$$

Суммирование в ряде (7.2) ведется по всем наборам $(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(b)})$ нетривиальных нулей $\zeta(s)$, для которых $\text{Im}(\sum_{k=1}^b \rho^{(k)}) = 0$, а $\text{Re } \rho^{(k)} = \Theta$, $1 \leq k \leq b$. Каждый нуль $\rho^{(k)}$ встречается в качестве k -й компоненты набора столько раз, какова его кратность. Доказано, что ряд (7.2) абсолютно сходится. Если Θ недостижимо, то сумма (7.2) пуста и $\mathcal{B}(b) = 0$.

В случае $b = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(2) &= \sum_{\substack{\text{Im}(\rho^{(1)} + \rho^{(2)}) = 0 \\ \text{Re } \rho^{(1)} = \text{Re } \rho^{(2)} = \Theta}} \frac{1}{\rho^{(1)} \rho^{(2)}} = \sum_{\substack{\rho \text{ - различны} \\ \text{Re } \rho = \Theta}} \nu_\rho^2 |\rho|^{-2}, \\ \mathcal{B}(2) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{-1} \int_1^x R^2(u) u^{-1-2\Theta} du. \end{aligned}$$

Тем самым получается более сильная теорема, чем упомянутая теорема Крамера, поскольку здесь не делается никаких предположений о величине Θ .

Заметим, что $\mathcal{B}(1) = 0$. Сумма пуста, так как $\text{Im } \rho \neq 0$. Авторам не известно, пуста или нет сумма $\mathcal{B}(2r+1)$, $r \in \mathbb{N}$, даже для достижимого Θ . С другой стороны, из симметричности нулей $\zeta(s)$ относительно действительной оси вытекает, что если Θ достижимо, то $\mathcal{B}(2r) > 0$ при любых $r \in \mathbb{N}$.

Перейдем к оценкам снизу интегралов от $|R(x)|$, $R^+(x)$, $R^-(x)$. Напомним, что

$$R^+(x) = \max(0, R(x)), \quad R^-(x) = -\min(0, R(x)).$$

Центральным результатом этого раздела являются формулируемые ниже теоремы 4 и 5.

ТЕОРЕМА 4. Существует, вообще говоря неэффективная, постоянная c_{13} такая, что при любом $x > c_{13}$ выполняется неравенство

$$\int_x^{2x} |R(u)| du > \frac{x^{3/2}}{200}.$$

ТЕОРЕМА 5. *Существуют, вообще говоря неэффективные, положительные постоянные c_{14} и A такие, что при любом $x > c_{14}$ выполняются неравенства*

$$\int_x^{Ax} R^+(x) dx > x^{3/2},$$

$$\int_x^{Ax} R^-(x) dx > x^{3/2}.$$

В случае $\Theta = 1/2$ утверждение теоремы 5 справедливо с $A = 212$.

Как отмечалось во введении, если справедлива гипотеза Римана, то неравенства теорем 4 и 5 можно усилить только за счет постоянных в правых частях. Особенно интересно на наш взгляд то, что удалось дать оценки снизу в среднем для $|R|$, R^+ , R^- на “не слишком длинном” отрезке. Мы полагаем, что следствия 7 и 8 являются новыми (см., например, [20]).

СЛЕДСТВИЕ 7. *При $x > c_{13}$ на отрезке $[x, 2x]$ найдется число u такое, что*

$$|R(u)| > \frac{\sqrt{u}}{245}.$$

СЛЕДСТВИЕ 8. *Если A и $c_{14} > 0$ – постоянные теоремы 5, то при всех $x > c_{14}$ на отрезке $[x, Ax]$ найдутся точки u_1 и u_2 , в которых выполняются неравенства*

$$R(u_1) > A^{-3/2} \sqrt{u_1}, \quad R(u_2) < -A^{-3/2} \sqrt{u_2}.$$

К достоинствам теорем 4 и 5, следствий 7 и 8 можно отнести их безусловность. Они верны при любом возможном значении Θ . Недостатком является неэффективность этих результатов. Мы не можем указать значения постоянных A , c_{13} и c_{14} . Дело в том, что теорема 4, например, вытекает из формулируемых ниже теорем 6 и 7. В теореме 6 рассматривается случай $\Theta = 1/2$, и в ней всё эффективно. Теорема 7 доказывается в предположении, что гипотеза Римана неверна. Для того чтобы наш метод ее доказательства дал эффективную постоянную c_{13} , нужно обладать достаточно большой информацией о нулях ζ . В частности, знать оценку сверху ординаты какого-нибудь нуля $\zeta(s)$ с вещественной частью, большей $1/2$. Такой ход рассуждений и приводит к неэффективности безусловной теоремы, несмотря на то, что при $\Theta > 1/2$ оценки снизу интегралов от $|R|$, R^+ , R^- асимптотически лучше, чем при справедливости гипотезы Римана. Ситуация с теоремой 5 почти аналогична.

ТЕОРЕМА 6. *Если справедлива гипотеза Римана, то существует эффективная постоянная c_{15} такая, что при любых $x > c_{15}$ выполняется неравенство*

$$\int_x^{2x} |R(u)| du > \frac{x^{3/2}}{200}.$$

Из теоремы 6 и теоремы 1 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 9. Если $\Theta = 1/2$, то при $a \geq 2$

$$(8.2) \quad \int_x^{ax} |R(u)| du \asymp_a x^{3/2} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Весьма вероятно, что утверждение (8.2) справедливо при любом $a > 1$, но доказать это мы не умеем.

ТЕОРЕМА 7. Если $\Theta > 1/2$, то для любых $\varepsilon > 0$ и $a > 1$ существует постоянная x_0 , зависящая от ε и a , такая, что при всех $x > x_0$ справедливо неравенство

$$(9.2) \quad \int_x^{ax} |R(u)| du > x^{1+\Theta-\varepsilon}.$$

Если $\Theta > 1/2$ достижимо (т.е. при некотором $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}$ имеем $\zeta(\Theta + i\tilde{\gamma}) = 0$), то теорему 7 можно несколько уточнить.

ТЕОРЕМА 8. Если $\Theta > 1/2$ является достижимым, то для любого $a > 1$ существует положительная постоянная c_{16} , зависящая от a , такая, что при всех $x \geq 1$

$$(10.2) \quad \int_x^{ax} |R(u)| du \geq c_{16} x^{1+\Theta}.$$

Постоянные x_0 в теореме 7 и c_{16} в теореме 8 зависят от возможного значения Θ и величин, указанных в формулировках этих теорем, неэффективно. Чтобы сосчитать эти постоянные в рамках наших методов требуется обладать достаточно обширной информацией о распределении нулей $\zeta(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$ (если они вообще там имеются). Заметим, что если бы постоянная x_0 в теореме 7 была эффективной, то мы получили бы алгоритм вычисления Θ с любой наперед заданной точностью, на что в настоящее время мало надежды.

Сравнивая оценки теорем 7 и 8 с (2.2), мы видим, что (9.2) может быть улучшено только за счет ε , а (10.2) – за счет c_{16} . В этом смысле результаты теорем 7 и 8 по порядку точны.

ТЕОРЕМА 9. Если справедлива гипотеза Римана, то при всех $x > 2 \cdot 10^9$ выполняются неравенства

$$\int_x^{10x} R^+(u) du \geq 0.01x^{3/2}, \quad \int_x^{10x} R^-(u) du \geq 0.01x^{3/2}.$$

ТЕОРЕМА 10. Предположим, что $\Theta > 1/2$ недостижимо. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $a > 1$ при всех $x > x_1(\varepsilon, a)$ выполняются неравенства

$$(11.2) \quad \int_x^{ax} R^+(u) du > x^{1+\Theta-\varepsilon}, \quad \int_x^{ax} R^-(u) du > x^{1+\Theta-\varepsilon}.$$

ТЕОРЕМА 11. *Предположим, что $\Theta > 1/2$ достижимо. Обозначим*

$$k_1 = \sum_{\substack{\operatorname{Re} \rho = \Theta \\ \rho - \text{различны}}} |\operatorname{Im} \rho|^{-1}, \quad A_1 = \exp\{2\pi k_1\}.$$

Тогда существуют положительные постоянные c_{17} и c_{18} такие, что при всех $x > c_{18}$ выполняются неравенства

$$\int_x^{A_1 x} R^+(u) du > c_{19} x^{1+\Theta}, \quad \int_x^{A_1 x} R^-(u) du > c_{19} x^{1+\Theta}.$$

Здесь и далее под символом

$$(12.2) \quad \sum_{\rho \in E} f(\rho),$$

где $E \subset \mathbb{C}$, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, понимается сумма значений функции f в нетривиальных нулях $\zeta(s)$, принадлежащих множеству E . Если не оговорено противное, то считается, что каждый нуль в сумме (12.2) встречается столько раз, какова его кратность. Если ряд не является абсолютно сходящимся, то под его суммой понимается предел конечных сумм

$$(13.2) \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{\rho \in E \\ |\operatorname{Im} \rho| \leq T}} f(\rho).$$

У нас будут встречаться только такие ряды (12.2), которые будут сходиться в смысле существования предела (13.2) или даже абсолютно сходиться.

Ряд, сумму которого мы обозначили через k_1 , абсолютно сходится, если $\Theta > 1/2$. Это вытекает из простейшей плотностной теоремы [21, с 237].

ТЕОРЕМА 12. *При любом $x > c_{19}$ справедливо неравенство*

$$(14.2) \quad \int_x^{2x} |P(u)| du > x^{3/2} (\ln x)^{-1}.$$

Если $\Theta = 1/2$, то постоянная c_{19} эффективна. Если $\Theta > 1/2$, то каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $a > 1$ при $x > c_{20}(a, \varepsilon)$ имеем

$$(15.2) \quad \int_x^{ax} |P(u)| du > x^{1+\Theta-\varepsilon}.$$

Если же $\Theta > 1/2$ является достижимым, то при любом $a > 1$ и $x > c_{21}(a)$ имеем

$$(16.2) \quad \int_x^{ax} |P(u)| du > c_{22}(a) x^{1+\Theta} (\ln x)^{-1}.$$

Невозможность принципиального улучшения теоремы 12 вытекает из следствия 4 ($b = 1$). Как и в теореме 4, постоянная c_{19} в безусловной оценке (14.2) является неэффективной.

Случай $\Theta = 1/2$ разобран отдельно в теоремах 13 и 14. Если справедлива гипотеза Римана, то в некотором смысле “чаще всего” $P(x) < 0$. Следующая теорема представляет из себя уточнение результата, имеющегося на с. 138–139 в [16]. Положим

$$\mathcal{P}(x) = x^{-3/2} \ln x \int_2^x P(u) du,$$

$$\omega = \sum_{\rho} \frac{1}{\sqrt{\gamma^4 + 2,5\gamma^2 + 9/16}}, \quad \gamma = \operatorname{Im} \rho.$$

Если верна гипотеза Римана, то

$$\omega = \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho(\rho+1)|} < \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2} < 0.0456.$$

(См. ниже (20.4) в доказательстве теоремы 6.)

ТЕОРЕМА 13. Если справедлива гипотеза Римана, то выполняются оценки

$$\overline{L} = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(x) \leq -\frac{2}{3} + \omega,$$

$$\underline{L} = \liminf_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(x) \geq -\frac{2}{3} - \omega.$$

При этом $\underline{L} \neq \overline{L}$.

СЛЕДСТВИЕ 10. Если верна гипотеза Римана, то при всех $x > c_{23}$ справедливы неравенства

$$-0.714x^{3/2}(\ln x)^{-1} < \int_1^x P(u) du < -0.62x^{3/2}(\ln x)^{-1}.$$

При $\Theta = 1/2$ отрицательные значения функции P превалируют над положительными и на отрезках вида $[x, ax]$, где a “не слишком близко” к 1. Наоборот, при a , близких к 1, бесконечно часто наблюдается противоположный эффект.

ТЕОРЕМА 14. Предположим, что справедлива гипотеза Римана. Тогда

1) при любом $a > 1$ существует эффективная постоянная $c_{24} = c_{24}(a)$ такая, что при всех $x > c_{24}$ выполнено неравенство

$$(17.2) \quad \int_x^{ax} P(u) du < -\frac{2}{3} \frac{x^{3/2}}{\ln x} (a^{3/2} - 1)K(a) + O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^2 x}\right),$$

где

$$K(a) = 1 - \frac{3\omega}{2} \frac{(a^{3/2} + 1)}{(a^{3/2} - 1)};$$

2) существует эффективная постоянная c_{25} такая, что при всех $X \geq 3$ и $\alpha \in (0, c_{25})$ на отрезке $[X, X^B]$, $B = \exp\{\alpha^{-1} \ln^3 1/\alpha\}$, найдется точка ξ , для которой выполняется неравенство

$$(18.2) \quad \int_{\xi}^{\xi+\alpha\xi} P(u) du > \frac{\xi^{3/2} \alpha \ln(1/\alpha)}{6 \ln \xi};$$

3) существует постоянная $A_2 > 1$ такая, что при всех $x > x_2$ имеет место неравенство

$$\int_x^{A_2 x} P^+(u) du > \frac{x^{3/2}}{\ln x}.$$

СЛЕДСТВИЕ 11. *Если справедлива гипотеза Римана, то при достаточно больших x имеем*

$$(19.2) \quad \int_x^{1,2x} P(u) du < -0.1x^{3/2}(\ln x)^{-1},$$

$$(20.2) \quad \int_x^{2x} P(u) du < -x^{3/2}(\ln x)^{-1},$$

$$(21.2) \quad \int_x^{2x} |P(u)| du \geq \int_x^{2x} P^-(u) du > x^{3/2}(\ln x)^{-1},$$

а при любом фиксированном $a > 1$

$$(22.2) \quad \int_x^{ax} P^+(u) du = \Omega(x^{3/2}(\ln x)^{-1}).$$

Неравенства следствия 11 по порядку неулучшаемы (см. следствие 4 при $b = 1$). Нам не известно, можно ли к безусловной оценке (14.2) добавить оценки снизу

$$\int_x^{A_2x} P^+(u) du > x^{3/2}(\ln x)^{-1}, \quad \int_x^{A_2x} P^-(u) du > x^{3/2}(\ln x)^{-1}$$

хотя бы при каком-нибудь, пусть даже очень большом, но постоянном значении A_2 . Таким образом, мы не смогли перенести на функцию P результат теоремы 5. В теореме 14 мы доказали это в предположении справедливости гипотезы Римана с постоянной $A_2 = 2$ для P^- (см. (21.2)) и с некоторой неэффективной постоянной A_2 для P^+ . По-видимому, эта задача не является легкой в случае, если Θ недостижимо. Если $\Theta > 1/2$ достижимо, то из теоремы 11 и леммы 1 (см. ниже) почти тривиально получается

СЛЕДСТВИЕ 12. *Если $\Theta > 1/2$ достижимо, то при $x > c_{26}$*

$$\int_x^{A_1x} P^+(u) du > c_{27}x^{1+\Theta}(\ln x)^{-1},$$

$$\int_x^{A_1x} P^-(u) du > c_{27}x^{1+\Theta}(\ln x)^{-1}.$$

Постоянная A_1 определена в теореме 11.

Следующая часть наших результатов посвящена обобщению на средние для $R(x)$ по “коротким отрезкам” теоремы Литтлвуда о бесконечно больших в сравнении с $\sqrt{x}$ при $x \rightarrow +\infty$ значениях $R(x)$. В 1914 году Литтлвуд доказал, что

$$(23.2) \quad R(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x} \ln \ln x).$$

Эта безусловная $\Omega_{\pm}$ -оценка функции R остается лучшей по порядку и на сегодняшний день.

Пусть $H(x)$ — некоторая функция, положительная на $(1, +\infty)$. Рассмотрим среднее значение для R на отрезке $[x, x + H(x)]$:

$$R_1(x, H(x)) = \frac{1}{H(x)} \int_x^{x+H(x)} R(u) du.$$

Из (10) при $\Theta = 1/2$ (см. также теорему 1 при $b = 1$) немедленно вытекает, что если $H(x) \geq \alpha x$, $\alpha > 0$, то

$$\int_x^{x+H(x)} |R(u)| du = O((x + H(x))^{3/2}),$$

и, тем более,

$$R_1(x, H(x)) = O(\sqrt{x + H(x)}).$$

Таким образом, если справедлива гипотеза Римана, то при усреднении функции R по “не очень короткому” отрезку феномен Литтлвуда пропадает, и $R(u)$ “в среднем есть $O(\sqrt{u})$ ”.

В связи со сказанным возникает следующая задача. Требуется выяснить, для каких $H(x) = o(x)$ ($x \rightarrow +\infty$) функция $x^{-1/2} R_1(x, H(x))$ неограничена или даже

$$(24.2) \quad R_1(x, H(x)) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x} \ln \ln x).$$

Из (24.2) очевидным образом вытекает (23.2). Поэтому утверждения типа (24.2) можно рассматривать как обобщения упомянутого результата Литтлвуда. Отметим сразу же, что для

$$(25.2) \quad H(x) = o(\sqrt{x} \ln \ln x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

соотношение (24.2) тривиально следует из (23.2). Действительно, исходя из равенства

$$R(x+y) - R(x) = -y + \sum_{x < n \leq x+y} \Lambda(n), \quad y > 0,$$

и равномерной по x оценки [22]

$$\pi(x+y) - \pi(x) = O\left(\frac{y+2}{\ln(y+2)}\right), \quad y > 0,$$

при $1 \leq y \leq x$ получаем

$$R(x+y) - R(x) = O\left(\frac{(y+2) \ln x}{\ln(y+2)}\right)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 (26.2) \quad R_1(x, H(x)) &= R(x) + \frac{1}{H(x)} \int_0^{H(x)} (R(x+y) - R(x)) dy \\
 &= R(x) + \frac{1}{H(x)} \int_0^{H(x)} O\left(\frac{(y+2) \ln x}{\ln(y+2)}\right) dy \\
 &= \begin{cases} R(x) + O\left(\frac{H(x) \ln x}{\ln H(x)}\right), & H(x) \geq 3, \\ R(x) + O(\ln x), & 0 < H(x) < 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Из (16.2), (25.2) и (23.2) следует (24.2).

Если же функция $x^{-1/2-\delta}H(x)$ неограничена на $(1, +\infty)$ при некотором $\delta > 0$, то вряд ли (24.2) можно вывести из (23.2) на основе таких же простых соображений. Для достаточно широкого класса функций $H(x) = o(x)$ ($x \rightarrow +\infty$) нам удалось решить поставленную выше задачу. В теоремах 15–19 будет предполагаться, что задано $x_0 > 0$, $H(x) \geq 1$ — произвольная действительная функция на луче $[x_0, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 15. *Если при некотором $\delta > 0$ имеем*

$$(27.2) \quad H(x) = O(x^{1-\delta}),$$

то

$$R_1(x, H(x)) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x} \ln \ln \ln x).$$

Отметим, что теорема 15 является безусловной. Для функций $H(x) = o(x)$, растущих быстрее, чем (27.2), мы смогли обобщить результат Литтлвуда только лишь для достижимого Θ , в частности, в предположении справедливости гипотезы Римана.

ТЕОРЕМА 16.

1) *Если $\Theta = 1/2$ и*

$$(28.2) \quad H(x) = O(x(\ln \ln x)^{-1}),$$

то

$$(29.2) \quad R_1(x, H(x)) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x} \ln \ln \ln x).$$

2) *Если $\Theta > 1/2$ достижимо и $H(x) = o(x)$ ($x \rightarrow +\infty$), то*

$$R_1(x, H(x)) = \Omega_{\pm}(x^{\Theta}),$$

и, следовательно, тем более, верна оценка (29.2).

В предположении справедливости гипотезы Римана на функции, растущие быстрее, чем в (28.2), пришлось наложить дополнительные условия регулярности.

ТЕОРЕМА 17. Пусть функция H имеет на $(x_0, +\infty)$ непрерывную неотрицательную производную. Обозначим для краткости $V(x) = x/H(x)$. Пусть затем

$$(30.2) \quad \begin{aligned} V(x) &\leq \ln \ln x, & V(x) &\uparrow +\infty, \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{V(x)} \right) &= O \left(\frac{1}{x \ln x} \right), \\ V(x^{\ln x}) &\leq (V(x))^\lambda, \end{aligned}$$

где λ – некоторая постоянная. Тогда если $\Theta = 1/2$, то

$$(31.2) \quad R_1(x, H(x)) = \Omega_\pm(\sqrt{x} \ln V(x)).$$

Условия (30.2) накладывают некоторые ограничения на регулярность роста функции H , подчиненной условию $x(\ln \ln x)^{-1} \leq H(x) = o(x)$ ($x \rightarrow +\infty$). Ясно, что они выполняются для всех “достаточно медленно” и “достаточно правильно” растущих функций $V(x)$. В частности, условиями (30.2) удовлетворяют все функции $H(x) = x(\ln \ln x)^\alpha$, $-1 \leq \alpha < 0$, $H(x) = x(\ln \ln \ln x)^\alpha$, $\alpha < 0$, и т. д.

ТЕОРЕМА 18. Пусть справедлива гипотеза Римана. Тогда равномерно по $x \geq 10$, $0 < v < 1/3$ справедлива оценка

$$(32.2) \quad \int_x^{x+vx} R^2(u) du = O(vx^2 \ln^4 v).$$

В частности, если $H(x) = o(x)$ ($x \rightarrow +\infty$), то

$$(33.2) \quad R_1(x, H(x)) = O(\sqrt{x} \ln^2(x/H(x))).$$

Постоянные в символах O – абсолютные и эффективные.

Из (29.2), (31.2) и (33.2) видно, что даже при $\Theta = 1/2$ и любых допустимых $H(x) = o(x)$ ($x \rightarrow +\infty$) сохраняется зазор между Ω -оценкой $R_1(x, H(x))$ и оценкой сверху этой функции. Правда, чем медленнее убывает $H(x)/x$, тем этот зазор меньше.

Если не задаваться целью устанавливать количественные $\Omega_\pm$ -оценки (29.2) и (31.2), то в предположении $\Theta = 1/2$ можно доказать теорему более простую, чем теоремы 15–17, не накладывая при этом на функцию $H(x)$ существенных ограничений.

ТЕОРЕМА 19. Предположим, что $\Theta = 1/2$,

$$1 \leq H(x) = o(x) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Тогда функция $x^{-1/2} R_1(x, H(x))$ неограничена как сверху, так и снизу.

Теоремы 15–18 автоматически переносятся с $R_1(x, H(x))$ на

$$(34.2) \quad P_1(x, H(x)) = \frac{1}{H(x)} \int_x^{x+H(x)} P(u) du.$$

При замене в (27.2), (29.2) и (31.2) R_1 на P_1 требуется правые части этих соотношений разделить на $\ln x$. Если $\Theta = 1/2$, $1 \leq H(x) = o(x)$ ($x \rightarrow +\infty$), то функция $x^{-1/2}P_1(x, H(x)) \ln x$ неограничена как сверху, так и снизу.

Некоторые из результатов, сформулированных в этом параграфе, были анонсированы нами в [23]–[25].

В заключение §2 скажем несколько слов о методах исследования, используемых в этой работе, и поясним, за счет чего нам удалось получить новые результаты. Для $R_0(x)$ (определение см. в начале статьи) известна формула, открытая Риманом, а потом доработанная Мангольдтом, Э. Ландау и другими:

$$(35.2) \quad -R_0(x) = \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Ряд $\sum_{\rho} x^{\rho}/\rho$ по нетривиальным нулям $\zeta(s)$ сходится в смысле (13.2). Нетривиальные нули $\zeta(s)$ расположены симметрично относительно действительной оси, а для функции $\mathcal{N}(T)$, равной количеству нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\{0 < \operatorname{Re} s < 1, 0 < \operatorname{Im} s \leq T\}$, справедлива асимптотика [10, с. 44] с эффективной постоянной в символе O

$$(36.2) \quad \mathcal{N}(T) = \frac{T \ln T}{2\pi} - \frac{1 + \ln 2\pi}{2\pi} T + O(\ln T).$$

Обозначим

$$(37.2) \quad \mathcal{F}(x) = \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho}.$$

Из (35.2) (см. также [16, с. 105–106]) очевидным образом вытекает, что

$$(38.2) \quad \begin{aligned} R_0(x) &= -\mathcal{F}(x) + O(1), & x \geq 2, \\ R_0(x) &= -\mathcal{F}(x) + O(\ln(x-1)), & 1 < x < 2, \\ R(x) &= -\mathcal{F}(x) + O(\ln x), & x \geq 2. \end{aligned}$$

Поэтому совершенно ясно, что теоремы 1–11 и 15–19 достаточно доказать для $\mathcal{F}(x)$ вместо $R(x)$. Функция $\mathcal{F}(e^t) = \sum_{\rho} \exp(\rho t)/\rho$ представляет из себя ряд экспонент, показатели которых – нетривиальные нули дзета-функции Римана.

Мы не доказали ничего нового о нулях $\zeta(s)$, но зато разработали ряд технических приемов для оценок интегралов от степеней модуля, положительных и отрицательных частей рядов экспонент такого рода. Это и позволило нам получить все основные теоремы этой работы.

§3. Доказательства теорем 1–3 и их следствий

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Заметим сперва, что неравенство (1.2) достаточно установить лишь для четных целых b . Тогда для остальных b оно окажется верным

с постоянной $2c_7$ вместо c_7 . Действительно, если $b/2 \notin \mathbb{N}$, то возьмем в качестве m наименьшее четное число, превосходящее b . Если

$$\int_1^x (R(u))^m du \leq (c_{28}m)^{2m} x^{1+m\Theta},$$

то, обозначив $q = m/b$, $1/q' = 1 - 1/q$, используя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} \int_1^x |R(u)|^b du &\leq \left(\int_1^x (R(u))^m du \right)^{1/q} \left(\int_1^x du \right)^{1/q'} \\ &\leq (c_{28}m)^{2b} x^{1/q+b\Theta} (x-1)^{1/q'} \\ &\leq (c_{28}m)^{2b} x^{1+b\Theta} \\ &\leq (2c_{28}b)^{2b} x^{1+b\Theta}, \end{aligned}$$

а это и требовалось установить.

Ввиду сказанного, а также соотношений (38.2) заключаем, что для доказательства теоремы 1 достаточно при $b = 2r$, $r \in \mathbb{N}$, проверить справедливость неравенства

$$(1.3) \quad \int_1^x (\mathcal{F}(u))^b du \leq (c_{29}b)^{2b} x^{1+b\Theta}.$$

Как известно [3], последовательность частичных сумм $\sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} x^\rho / \rho$ ряда (37.2) сходится к $\mathcal{F}(x)$ при $T \rightarrow +\infty$ (для удобства будем считать, что $T \in \mathbb{N}$) в каждой точке $x \in (1, +\infty)$. Следовательно, при любом $u > 1$

$$(2.3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} S(T, b, u) = (\mathcal{F}(u))^b,$$

где

$$S(T, b, u) = \sum_{\substack{\rho_1 \\ |\operatorname{Im} \rho_j| \leq T}} \cdots \sum_{\substack{\rho_b \\ |\operatorname{Im} \rho_j| \leq T}} \frac{u^{\rho_1 + \cdots + \rho_b}}{\rho_1 \cdots \rho_b}.$$

Напомним лемму Фату [26, с. 40]. Пусть на промежутке $\omega \subset \mathbb{R}$ задана последовательность неотрицательных функций $f_T \in L(\omega)$ ($\forall T \in \mathbb{N}$). Пусть затем известно, что

$$\sup_{T \in \mathbb{N}} \int_\omega f_T(u) du = M < +\infty$$

и при почти всех $u \in \omega$

$$\exists \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(u) = f(u) \in \mathbb{R}.$$

Тогда $f \in L(\omega)$ и $0 \leq \int_\omega f(u) du \leq M$.

Функции $S(T, 1, u)$ действительнзначны при $u \in \mathbb{R}$, поскольку нули $\zeta(s)$ расположены симметрично относительно действительной оси. Поэтому последовательность

функций $S(T, b, u) = (S(T, 1, u))^b$ при $b = 2r$, $r \in \mathbb{N}$, неотрицательна. Интегралы от $S(T, b, u)$ по отрезку $[1, x]$ легко вычисляются:

$$(3.3) \quad \int_1^x S(T, b, u) du = \sum_{\substack{\rho_1 \\ |\operatorname{Im} \rho_j| \leq T}} \cdots \sum_{\rho_b} \frac{x^{1+\rho_1+\cdots+\rho_b} - 1}{(1 + \rho_1 + \cdots + \rho_b) \rho_1 \cdots \rho_b}.$$

Поэтому, если мы покажем, что

$$(4.3) \quad M_1(b) = \sum_{\rho_1} \cdots \sum_{\rho_b} \left(|1 + \rho_1 + \cdots + \rho_b| \prod_{j=1}^b |\rho_j| \right)^{-1} \leq (c_{30}b)^{2b},$$

то из (3.3), (4.3), учитывая, что $\operatorname{Re} \rho_j \leq \Theta$, получим

$$M(b, x) = \sup_T \int_1^x S(T, b, u) du \leq 2x^{1+b\Theta} M_1(b) < (2c_{30}b)^{2b} x^{1+b\Theta}.$$

А это вместе с (2.3) и леммой Фату приведет нас к (1.3).

Итак, осталось доказать неравенство (4.3). Имеем:

$$M_1(b) = \sum_{\overline{n}=(n_1, \dots, n_b) \in \mathbb{Z}^b} A(\overline{n}),$$

где

$$A(\overline{n}) = \sum_{\substack{n_j \leq \operatorname{Im} \rho_j \leq n_j + 1 \\ 1 \leq j \leq b}} \cdots \sum_{\substack{n_j \leq \operatorname{Im} \rho_j \leq n_j + 1 \\ 1 \leq j \leq b}} \left(\left| 1 + \sum_{j=1}^b \rho_j \right| \prod_{j=1}^b |\rho_j| \right)^{-1}.$$

Оценим $A(\overline{n})$ сверху. Обозначим $\nu(\overline{n}) = \sum_{j=1}^b n_j$. Поскольку $\operatorname{Re} \rho > 0$, то в сумме $A(\overline{n})$ стоят нули, для которых

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^b \rho_j \right) > 0, \quad \nu(\overline{n}) \leq \operatorname{Im} \left(\sum_{j=1}^b \rho_j \right) < \nu(\overline{n}) + b.$$

Поэтому

$$\left| 1 + \sum_{j=1}^b \rho_j \right|^{-1} \leq a(\nu) = \begin{cases} 1, & |\nu| \leq b, \\ (|\nu| - b)^{-1}, & |\nu| > b. \end{cases}$$

Количество нулей $\zeta(s)$ с учетом кратности в прямоугольнике $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s < 1, T \leq \operatorname{Im} s < T+1\}$ есть $O(\ln |T|)$, к тому же [27] мнимые части нетривиальных нулей ζ по абсолютной величине больше 14. Ввиду сказанного получаем оценку

$$A(\overline{n}) \leq \begin{cases} a(\nu)(c_{31})^b \prod_{j=1}^b \left(\frac{\ln |n_j|}{|n_j| - 1} \right), & \min |n_j| \geq 14, \\ 0, & \min |n_j| < 14. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$(5.3) \quad M_1(b) \leq (c_{31})^b M_2(b),$$

где

$$M_2(b) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a(\nu) \sigma(\nu),$$

$$\sigma(\nu) = \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 + \dots + n_b = \nu, \\ \min |n_j| \geq 14}} \dots \sum_{n_b \in \mathbb{Z}} \prod_{j=1}^b \left(\frac{\ln |n_j|}{|n_j| - 1} \right).$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля, получаем следующее представление для суммы $M_2(b)$:

$$M_2(b) = \int_0^1 f_1(t) f_2(t) dt,$$

где

$$f_1(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a(\nu) \exp\{-2\pi i \nu t\},$$

$$f_2(t) = (f_3(t))^b, \quad f_3(t) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 14}} \frac{\ln |n|}{|n| - 1} \exp\{2\pi i n t\}.$$

Учитывая четность коэффициентов Фурье функций f_1 и f_3 , приходим к соотношениям

$$(6.3) \quad M_2(b) = 2^{b+2} \int_0^{1/2} f_4(t) (f_5(t))^b dt,$$

где

$$(7.3) \quad f_4(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a(\nu) \cos(2\pi \nu t),$$

$$f_5(t) = \sum_{n=14}^{\infty} \frac{\ln n}{n-1} \cos(2\pi n t).$$

Стандартным образом [28, гл. 10, с. 671] получаем оценки функций (7.3):

$$(8.3) \quad \begin{aligned} |f_4(t)| &\leq c_{32} b |\ln t|, \\ |f_5(t)| &\leq c_{33} \ln^2 t, \end{aligned} \quad 0 < t < 1/2.$$

Из (8.3) и (6.3) находим

$$M_2(b) \leq (c_{34} b)^{2b},$$

откуда, учитывая (5.3), получаем (4.3). Как отмечалось выше, это доказывает теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Обозначим

$$\Phi_b(u) = \int_1^u |R(t)|^b dt.$$

Интегрируя по частям, с учетом (1.2) находим

$$\begin{aligned} (9.3) \quad \int_1^x |\Delta(u)|^b du &= \int_1^x |R(u)|^b u^{-b\Theta} du \\ &= \Phi_b(x) x^{-b\Theta} + b\Theta \int_1^x \Phi_b(u) u^{-1-b\Theta} du \\ &\leq x(c_7 b)^{2b} + b\Theta \int_1^x (c_7 b)^{2b} du < x(c_7 b)^{2b}(1+b). \end{aligned}$$

Следствие 1 доказано.

Следствие 6 выводится из (9.3) аналогичным приемом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Имеем

$$(10.3) \quad \exp\{\lambda\sqrt{|\Delta(u)|}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n |\Delta(u)|^{n/2}}{n!}.$$

Согласно (9.3)

$$(11.3) \quad x^{-1} \int_1^x |\Delta(u)|^{n/2} du \leq (1+n/2)(c_7 n/2)^n, \quad n \geq 2,$$

и очевидно, что

$$(12.3) \quad x^{-1} \int_1^x (|\Delta(u)|^0 + \lambda |\Delta(u)|^{1/2}) du \leq c_{35}.$$

Из (10.3)–(12.3) находим

$$\begin{aligned} (13.3) \quad x^{-1} \int_1^x \exp\{\lambda\sqrt{|\Delta(u)|}\} du &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{1}{x} \int_1^x |\Delta(u)|^{n/2} du \\ &\leq c_{35} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{n}{2}\right) \frac{(\lambda c_7 n/2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ясно, что если $\lambda \leq (ec_7)^{-1}$, то сумма ряда в (13.3) не превосходит некоторой абсолютной постоянной. Тем самым следствие 2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Согласно следствию 2 для $c_{36} = (ec_7)^{-1}$ имеем

$$(14.3) \quad I = \int_1^{2x} \exp\{c_{36} \sqrt{|\Delta(u)|}\} du = O(x).$$

С другой стороны, выполнено очевидное неравенство

$$(15.3) \quad I \geq I_1 = \int_E \exp\{c_{36} \sqrt{|\Delta(u)|}\},$$

где

$$(16.3) \quad E = \{u \in [x, 2x] \mid |\Delta(u)| \geq V(u)\}.$$

Из (15.3) и (16.3) ввиду монотонности функции V получаем

$$(17.3) \quad I_1 \geq \mathfrak{M}(V, x) \exp\{c_{36} \sqrt{V(x)}\}.$$

Из (14.3), (15.3) и (17.3) вытекает (4.2). Следствие 3 доказано.

Для дальнейшего нам потребуется

ЛЕММА 1. Пусть

$$Q(x) = \int_2^x \frac{|R(t)| dt}{t \ln^2 t}.$$

Тогда при любых $x \geq 2$ с некоторой абсолютной постоянной c_{37} выполняется неравенство

$$(18.3) \quad Q(x) \leq c_{37} x^\Theta \ln^{-2} x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сохраняя обозначение, введенное в доказательстве следствия 1, имеем

$$(19.3) \quad Q(x) = \frac{\Phi_1(t)}{t^2 \ln^2 t} \Big|_2^x + \int_2^x \Phi_1(t) \left(\frac{1}{t^2 \ln^2 t} + \frac{2}{t^2 \ln^3 t} \right) dt.$$

Из (2.2) и (19.3) находим

$$Q(x) \leq c_8 x^\Theta \ln^{-2} x + c_8 \int_2^x t^{-\Theta-1} (\ln^{-2} t + 2 \ln^{-3} t) dt \leq c_{37} x^\Theta \ln^{-2} x.$$

Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4. Из (1.1) и (18.3) находим

$$|P(x)| \leq \frac{|R(x)|}{\ln x} + c_{38} \frac{x^\Theta}{\ln x} \quad (\forall x \geq 2).$$

Так как при любых $b \geq 1$, $\alpha, \beta \geq 0$ справедливо неравенство $(\alpha + \beta)^b \leq 2^{b-1}(\alpha^b + \beta^b)$, то

$$\begin{aligned} (20.3) \quad \int_2^x |P(u)|^b du &\leq 2^{b-1} \left(\int_2^x |R(u)|^b (\ln u)^{-b} du + c_{38}^b \int_2^x u^{b\Theta} (\ln u)^{-b} du \right) \\ &= 2^{b-1} \left(\frac{\Phi_b(u)}{(\ln u)^b} \Big|_2^x + b \int_2^x \frac{\Phi(u) du}{u (\ln u)^{b+1}} + c_{38}^b \int_2^x \frac{u^{b\Theta}}{(\ln u)^b} du \right) \\ &< (c_{39}b)^{2b} \left(x^{1+b\Theta} (\ln x)^{-b} + \int_2^x u^{b\Theta} (\ln u)^{-b} du \right). \end{aligned}$$

Проверим, что при любых $b \geq 1$, $\alpha \geq b/2$ и $x \geq 4$ имеет место оценка

$$(21.3) \quad I(x, b, \alpha) = \int_2^x u^\alpha (\ln u)^{-b} du \leq 6^b x^{\alpha+1} (\ln x)^{-b}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} I(x, b, \alpha) &= \int_2^{\sqrt{x}} u^\alpha (\ln u)^{-b} du + \int_{\sqrt{x}}^x u^\alpha (\ln u)^{-b} du \\ &\leq (\ln 2)^{-b} x^{1+\alpha/2} + \left(\frac{1}{2} \ln x \right)^{-b} + \int_{\sqrt{x}}^x u^\alpha du \\ &\leq 2^b x^{\alpha+1} (x^{-\alpha/2} + (\ln x)^{-b}) \\ &\leq 2^b x^{\alpha+1} (\ln x)^{-b} (1 + (x^{-1/4} \ln x)^b). \end{aligned}$$

(В последнем переходе мы использовали, что $\alpha \geq b/2$ и, следовательно, $x^{-\alpha/2} \leq x^{-b/4}$.) Поскольку $\max_{x \geq 4} (x^{-1/4} \ln x) = 4/e$, окончательно получаем

$$I(x, b, \alpha) \leq 2^b x^{\alpha+1} (\ln x)^{-b} (1 + (4/e)^b) < 6^b x^{\alpha+1} (\ln x)^{-b}.$$

Неравенство (21.3) доказано. Из (21.3) при $\alpha = b\Theta$ получаем (20.3), а из (20.3), в свою очередь, вытекает (5.2).

Перед тем, как приступить к доказательствам теорем 2 и 3, введем несколько обозначений и установим справедливость одной леммы. Положим

$$(22.3) \quad \mathcal{F}_1(x, \sigma) = \sum_{\operatorname{Re} \rho < \sigma} x^\rho / \rho,$$

$$(23.3) \quad \mathcal{F}_2(x, \sigma) = \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}_1(x, \sigma) = \sum_{\operatorname{Re} \rho \geq \sigma} x^\rho / \rho.$$

Из простейшей плотностной теоремы о нулях дзета-функции Римана [21, с. 237], которая утверждает, что количество нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \leq \operatorname{Re} s < 1, |\operatorname{Im} s| \leq T\}$ есть $O(T^{3/2-\sigma} \ln^5 T)$, вытекает, что при $\sigma > 1/2$

$$(24.3) \quad S(\sigma) = \sum_{\operatorname{Re} \rho \geq \sigma} |1/\rho| < +\infty.$$

Следовательно, ряд (23.3) абсолютно сходится при всех $x > 0$, а ряд (22.3) сходится в каждой точке $x \in (1, +\infty)$, как и ряд (37.2) для $\mathcal{F}(x)$.

ЛЕММА 2. Если $\sigma > 1/2$, то

$$\mathcal{F}_1(x, \sigma) = o(x^\sigma) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $B = (\sigma - 1/2)^{-1}$,

$$U(x) = \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq x^B} x^\rho / \rho, \quad U_1(x, \sigma) = \sum_{\substack{|\operatorname{Im} \rho| \leq x^B \\ \operatorname{Re} \rho < \sigma}} x^\rho / \rho.$$

Известно [3, с. 122, формулы (9)–(10)], что²

$$(25.3) \quad \mathcal{F}(x) = U(x) + O(\ln x).$$

Отсюда находим

$$(26.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_1(x, \sigma) &= \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}_2(x, \sigma) = U(x) - \mathcal{F}_2(x, \sigma) + O(\ln x) \\ &= U_1(x, \sigma) - \sum_{\substack{|\operatorname{Im} \rho| > x^B \\ \operatorname{Re} \rho \geq \sigma}} x^\rho / \rho + O(\ln x). \end{aligned}$$

Из упомянутой выше плотностной теоремы вытекает, что при любых $\sigma > 1/2$ и $d > 2$

$$\sum_{\substack{\operatorname{Re} \rho \geq \sigma \\ |\operatorname{Im} \rho| > d}} |1/\rho| = O_\sigma(d^{1/2-\sigma} \ln^5 d).$$

Это вместе с (26.3) дает

$$(27.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_1(x, \sigma) &= U_1(x, \sigma) + O_\sigma(x^{\sigma+B(1/2-\sigma)} \ln^5 x + \ln x) \\ &= U_1(x, \sigma) + O_\sigma(\ln^5 x). \end{aligned}$$

Осталось показать, что $U_1(x, \sigma) = o(x^\sigma)$ ($x \rightarrow +\infty$). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его. Положим $\sigma_1 = 1/4 + \sigma/2$. Ясно, что $1/2 < \sigma_1 < \sigma$. В силу (24.3) найдется $T = T(\varepsilon)$ такое, что

$$(28.3) \quad \sum_{\substack{\operatorname{Re} \rho \geq \sigma_1 \\ |\operatorname{Im} \rho| > T}} |1/\rho| < \varepsilon/3.$$

Теперь воспользуемся очевидным представлением

$$(29.3) \quad U_1(x, \sigma) = U_2(x) + U_3(x) + U_4(x),$$

где

$$U_2(x) = \sum_{\substack{\operatorname{Re} \rho < \sigma_1 \\ |\operatorname{Im} \rho| \leq x^B}} x^\rho / \rho, \quad U_3(x) = \sum_{\substack{\sigma_1 \leq \operatorname{Re} \rho < \sigma \\ T < |\operatorname{Im} \rho| \leq x^B}} x^\rho / \rho, \quad U_4(x) = \sum_{\substack{\sigma_1 \leq \operatorname{Re} \rho < \sigma \\ |\operatorname{Im} \rho| \leq T}} x^\rho / \rho.$$

²В [3] дана существенно лучшая, чем (25.3), оценка, но она нам не потребуется.

Оценим каждую из сумм в отдельности. Поскольку (см. [3, с. 124–125])

$$\sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq y} |1/\rho| = O(\ln^2 y),$$

то

$$|U_2(x)| \leq x^{\sigma_1} \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq x^B} |1/\rho| \leq c_{40} B^2 x^{\sigma_1} \ln^2 x.$$

Ввиду (28.3)

$$U_3(x) \leq x^\sigma \sum_{\substack{\operatorname{Re} \rho \geq \sigma_1 \\ |\operatorname{Im} \rho| > T}} |1/\rho| < x^\sigma \varepsilon/3.$$

Наконец,

$$|U_4(x)| \leq x^\alpha \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} |1/\rho| \leq c_{40} x^\alpha \ln T,$$

где

$$\alpha = \max\{\operatorname{Re} \rho \mid \operatorname{Re} \rho < \sigma, |\operatorname{Im} \rho| \leq T\}.$$

Поскольку α вместе с T зависит только от ε и $\alpha < \sigma$, то найдется такое число $T_1 = T_1(\varepsilon)$, что при любых $x > T_1$ будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} c_{40} B^2 x^{\sigma_1 - \sigma} \ln^2 x &< \varepsilon/3, \\ c_{40} x^{\alpha - \sigma} \ln^2 T &< \varepsilon/3. \end{aligned}$$

Тогда окажется, что при $\forall x > T_1$

$$(30.3) \quad |U_j(x)| < x^\sigma \varepsilon/3, \quad j = 2, 3, 4.$$

Складывая оценки (30.3) для сумм U_j , приходим ввиду (29.3) к следующему утверждению. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $T_1 = T_1(\varepsilon)$ такое, что при всех $x > T_1$ справедливо неравенство $|U_1(x)| < \varepsilon x^\sigma$. Это и означает, что $U_1(x) = o(x^\sigma)$ ($x \rightarrow +\infty$). Последнее соотношение вместе с (27.3) убеждает нас в справедливости леммы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если Θ недостижимо, то теорема 2 сразу же получается из леммы 2 при $\sigma = \Theta$. Если $\Theta > 1/2$ достижимо, то согласно лемме 2

$$(31.3) \quad \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_2(x, \Theta) + o(x^\Theta) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Ввиду (24.3) и определений $\mathcal{F}_2(x, \Theta)$ и Θ имеем

$$(32.3) \quad |\mathcal{F}_2(x, \Theta)| \leq x^\Theta S(\Theta).$$

Из (31.3) и (32.3) получаем (3.2). Теорема 2 доказана.

Следствие 5 непосредственно вытекает из теоремы 2, леммы 1 и соотношения (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Если Θ недостижимо, то по теореме 2 имеем $\Delta(u) = o(1)$ ($u \rightarrow +\infty$), и, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((\ln x)^{-1} \int_1^x (\Delta(u))^b u^{-1} du \right) = 0.$$

С другой стороны, сумма в (7.2) пуста, и, значит, $B = 0$. Таким образом, равенство (6.2) в этом случае доказано. Если Θ достижимо, то согласно лемме 2

$$\Delta(u) = \mathcal{F}_2(u) u^{-\Theta} + o(1) \quad (u \rightarrow +\infty),$$

и, следовательно, достаточно доказать, что

$$(33.3) \quad B(b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((\ln x)^{-1} \int_1^x (\mathcal{F}_2(u), \Theta) u^{-1} du \right).$$

Сделаем замену переменного $u = e^t$ и обозначив $y = \ln x$, $\gamma = \operatorname{Im} \rho$, получим соотношение, равносильное (33.3):

$$(34.3) \quad B(b) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(y^{-1} \int_0^y \left(\sum_{\operatorname{Re} \rho = \Theta} e^{i\gamma t / \rho} \right)^b dt \right).$$

Если $\Theta > 1/2$, то соотношение (34.3) является почти очевидным. Поскольку

$$\sum_{\operatorname{Re} \rho = \Theta > 1/2} |1/\rho| < +\infty,$$

функция

$$(35.3) \quad \varphi(t) = \sum_{\operatorname{Re} \rho = \Theta} e^{i\gamma t / \rho}$$

является почти периодической функцией Бора [29] с абсолютно сходящимся рядом экспонент. Ясно, что и при любом $b \in \mathbb{N}$ функция $(\varphi(t))^b$ обладает тем же свойством. Согласно теореме из [30] предел, стоящий в правой части выражения (34.3), равен свободному члену в разложении $(\varphi(t))^b$ в ряд экспонент. С другой стороны, возводя в степень ряд (35.3), убеждаемся в том, что свободный член получившегося ряда равен сумме $B(b)$.

Если $\Theta = 1/2$, то $\varphi(t)$ является почти периодической функцией Безиковича класса $B_2 \subset B_1$, но не Бора.³ Упомянутая выше теорема из [30] доказывается для функций из B_1 . Поэтому нам остается только установить, что в случае справедливости гипотезы Римана любая целая степень $\varphi(t)$ лежит в B_1 , а ряд экспонент, сходящийся к ней по метрике этого пространства, получается после возведения в ту же степень ряда (35.3). Последнее означает, что

$$(36.3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\limsup_{y \rightarrow +\infty} J(N, y) \right) = 0,$$

³ Определения этих пространств функций и стандартных метрик в них см. в [29].

где

$$J(N, y) = \frac{1}{y} \int_{-y}^y |(\varphi(N, t))^b - (\varphi(t))^b| dt, \quad \varphi(N, t) = \sum_{|\gamma| \leq N} e^{i\gamma t} / \rho.$$

При любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} (37.3) \quad |x_1^b - x_2^b| &= |x_1 - x_2| \cdot \left| \sum_{k=0}^b x_1^k x_2^{b-k} \right| \\ &\leq |x_1 - x_2| \cdot \sum_{k=0}^b |x_1|^k |x_2|^{b-k} \\ &\leq |x_1 - x_2| \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^b (|x_1|^{2k} + |x_2|^{2b-2k}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{b-1} (|x_1 - x_2| |x_1|^{2k} + |x_1 - x_2| |x_2|^{2k}). \end{aligned}$$

Используя (37.3) для $x_1 = \varphi(N, t)$, $x_2 = \varphi(t)$ и далее неравенство Коши–Буняковского для интегралов, получаем

$$\begin{aligned} (38.3) \quad J(N, y) &< \left(\frac{1}{y} \int_{-y}^y (\varphi(N, t) - \varphi(t))^2 dt \right)^{1/2} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{b-1} \left(\left(\frac{1}{y} \int_{-y}^y (\varphi(N, t))^{4k} dt \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{y} \int_{-y}^y (\varphi(t))^{4k} dt \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Вспомним теперь результат следствия 6 и его доказательство. Если положить $y = \ln x$, $u = e^t$, то следствие 6 при $\Theta = 1/2$ утверждает, что

$$(39.3) \quad \int_0^y |R(e^t) e^{-t/2}|^q dt \leq c_{41}(q) y \quad (\forall q \geq 1, \forall y \geq 1).$$

Соотношение (39.3) выводилось из основного неравенства (1.2) теоремы 1. А в процессе доказательства теоремы 1 было видно, что оценка, стоящая в правой части (1.2), годится и для интегралов от степеней модуля всех сумм $\sum_{|\gamma| \leq N} x^\rho / \rho$. Всюду мы опираемся на то, что R “мало отличается” от $\mathcal{F}$ (см. (31.3)). А так как в случае $\Theta = 1/2$ имеем $\mathcal{F}(e^t) e^{-t/2} = \varphi(t)$, то в действительности было показано, что при любом $q \geq 1$

$$\begin{aligned} (40.3) \quad &\sup_{y \geq 1} \frac{1}{y} \int_0^y |\varphi(t)|^q dt \leq c_{41}(q), \\ &\sup_{y \geq 1} \sup_{N > 0} \frac{1}{y} \int_0^y |\varphi(N, t)|^q dt \leq c_{41}(q). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить справедливость тождества

$$\varphi(t) + \varphi(-t) = \sum_{\gamma} \frac{\cos \gamma t}{\gamma^2 + 1/4} \quad (\Theta = 1/2).$$

Это означает, что $\varphi(-t)$ и $\varphi(N, -t)$ отличаются соответственно от $\varphi(t)$ и $\varphi(N, t)$ на $O(1)$ равномерно по N и t . Поэтому оценки (40.3) переносятся на интегралы по отрезкам $[-y, y]$:

$$\begin{aligned} \sup_{y \geq 1} \frac{1}{y} \int_{-y}^y |\varphi(t)|^q dt &\leq c_{42}(q), \\ \sup_{y \geq 1} \sup_{N > 0} \frac{1}{y} \int_{-y}^y |\varphi(N, t)|^q dt &\leq c_{42}(q). \end{aligned} \quad (\forall q \geq 1)$$

Эти неравенства вместе с (38.3) приводят к оценке

$$(41.3) \quad J(N, y) < c_{43}(q) \left(\frac{1}{y} \int_{-y}^y (\varphi(N, t) - \varphi(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

Ввиду сходимости ряда $\sum_p |1/\rho|^2$ справедливо включение $\varphi \in B_2$. Поэтому ее ряд экспонент (35.3) сходится к φ по метрике этого пространства. То есть

$$(42.3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2y} \int_{-y}^y (\varphi(N, t) - \varphi(t))^2 dt \right)^{1/2} = 0.$$

Из (42.3) и (41.3) получаем (36.3). Как отмечалось выше, это доказывает теорему 3 и в случае $\Theta = 1/2$.

Заметим, что обобщенная нами теорема Крамера, представляющая частный случай теоремы 3 ($b = 2$ и $\Theta = 1/2$) с точки зрения теории почти периодических функций, является тривиальным замечанием. Это — формула среднего для φ^2 . Ясно, что она верна, так как $\varphi^2 \in B_1$, поскольку $\varphi \in B_2$.

§ 4. Доказательства теорем 4–14 и их следствий

Докажем сначала теоремы 6–11. Из теорем 6, 7 очевидным образом будет следовать теорема 4, а из теорем 9–11 — теорема 5. Доказательству теоремы 6 предположим две леммы и введем еще несколько обозначений. Положим

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\ln 2}{8}, \quad g(z) = \left(\frac{\sin \alpha z}{\alpha z} \right)^4 \left(1 - \frac{z}{12} \right), \\ \widehat{g}(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \exp(-izy) dz. \end{aligned}$$

Ясно, что $g \in L^2(\mathbb{R})$ и является целой функцией экспоненциального типа 4α . Поэтому

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \text{supp } \widehat{g} &\subset [-4\alpha, 4\alpha], \\ g(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(y) \exp(izy) dy = \int_{-4\alpha}^{4\alpha} \widehat{g}(y) \exp(izy) dy. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.

$$\max_{y \in \mathbb{R}} |\widehat{g}(y)| = \frac{8}{3 \ln 2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$(3.4) \quad G(y) = \begin{cases} 0, & |y| \geq 4, \\ \frac{|y| - 4}{16}, & 2 \leq |y| < 4, \\ \frac{4 - 3|y|}{16}, & 0 \leq |y| < 2. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(y) \exp(iyz) dy = \frac{\sin^4 z}{z^2} \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$(4.4) \quad G(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 z}{z^2} \exp(-iyz) dz.$$

Пусть $G_1(y) = \int_0^y G(t) dt$, т.е. G_1 — первообразная для G , которая обращается в нуль в точке $y = 0$. Интегрируя по y под знаком интеграла (4.4), находим

$$G_1(y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 z}{z^3} \exp(-iyz) dz.$$

С другой стороны, интегрируя (3.4), получаем явную формулу для $G_1(y)$:

$$(5.4) \quad G_1(y) = \begin{cases} \frac{8y - 3y^2}{32}, & 0 \leq y \leq 2, \\ \frac{(y - 4)^2}{32}, & 2 < y < 4, \\ 0, & y \geq 4, \\ -G_1(-y), & y < 0. \end{cases}$$

Пусть

$$G_2(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin z}{z} \right)^4 \exp(-iyz) dz.$$

Так как G_2 — преобразование Фурье целой функции $\left(\frac{\sin z}{z} \right)^4$ экспоненциального типа 4 из класса $L_2(\mathbb{R})$, то $\text{supp } G_2 \subset [-4, 4]$. Имеем также

$$G_2'(y) = -G_1(y), \quad G_2(0) = 1/3.$$

Легко видеть, что функция $\widehat{g}$, определенная в (1.4), выражается через G_1 и G_2 следующим образом:

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{\alpha} \left(G_2\left(\frac{y}{\alpha}\right) + \frac{i}{12\alpha} G_1\left(\frac{y}{\alpha}\right) \right).$$

Отсюда находим

$$|\widehat{g}(y)| = \frac{1}{\alpha} \sqrt{G_2^2\left(\frac{y}{\alpha}\right) + \left(\frac{2}{3 \ln 2}\right)^2 G_1^2\left(\frac{y}{\alpha}\right)}.$$

Поскольку $\widehat{g}$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, обращающаяся в нуль вне $(-4\alpha, 4\alpha)$, ясно, что максимум $|\widehat{g}(y)|$ на $\mathbb{R}$ существует и лежит на интервале $(-4\alpha, 4\alpha)$. Но, как мы сейчас установим, функция $G_2^2(y/\alpha) + k^2 G_1^2(y/\alpha)$, $k = 2/(3 \ln 2)$, имеет на интервале $(-4\alpha, 4\alpha)$ единственный локальный экстремум в точке $y = 0$. Отсюда и будет следовать, что

$$\max_{y \in \mathbb{R}} |\widehat{g}(y)| = |\widehat{g}(0)| = \frac{1}{\alpha} |G_2(0)| = \frac{8}{3 \ln 2}.$$

Итак, проверим, что функция $H(x) = G_2^2(x) + \lambda G_1^2(x)$ при $0 < \lambda < 1$ имеет на интервале $(-4, 4)$ единственный локальный экстремум в точке $x = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} H'(x) &= 2G_2(x)G_2'(x) + 2\lambda G_1(x)G_1'(x) \\ &= -2G_2(x)G_1(x) + 2\lambda G_1(x)G(x) \\ &= -2G_1(x)(G_2(x) - \lambda G(x)). \end{aligned}$$

Из (5.4) следует, что $G_1(x)$ имеет на $(-4, 4)$ единственный нуль в точке $x = 0$. Поэтому осталось показать, что

$$(6.4) \quad H_1(x) = G_2(x) - \lambda G(x) \neq 0 \quad \forall x \in (-4, 4).$$

При $x \in (4/3, 4)$ неравенство (6.4) очевидно, так как на этом интервале $G(x) < 0$ (см. (3.4)), а $G_2(x) > 0$. (Если бы на интервале $(0, 4)$ нашлась точка x_0 , в которой $G_2(x_0) \leq 0$, то ввиду того, что $G_2(0) > 0$, нашлась бы и точка $x_1 \in (0, 4)$, в которой $G_2(x_1) = 0$. Но тогда по теореме Ролля на интервале $(x_1, 4)$ функция $G_2'(x) = -G_1(x)$ имела бы нуль, а это, как отмечалось выше, неверно.) На $[0, 4/3]$ проверить (6.4) тоже несложно. При этих значениях x имеем

$$\begin{aligned} H_1(x) &\geq G_2(x) - G(x) = H_2(x) = H_2(0) + \int_0^x H_2'(t) dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \int_0^x (G_2'(t) - G'(t)) dt = \frac{1}{12} + \int_0^x \left(\frac{3}{16} - G_1(t)\right) dt. \end{aligned}$$

Из (5.4) видно, что $G_1(t) \leq 3/16 \forall t \in (0, 4/3)$. Поэтому $H_1(x) \geq H_2(x) > 0$. Таким образом, мы установили (6.4) при $\forall x \in [0, 4)$, а значит, и при любых $x \in (-4, 4)$ ввиду четности H_1 . Тем самым лемма 3 полностью доказана.

ЛЕММА 4. *Справедливы следующие неравенства:*

$$(7.4) \quad |g(x)| < \frac{0.8}{x + 14.5} \quad \forall x \geq 26,$$

$$(8.4) \quad |g(x)| < \frac{0.8}{|x + 14|} \quad \forall x \leq -40.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (7.4) установим по отдельности на промежутках $\delta_1 = [26, 46]$ и $\delta_2 = (46, +\infty)$. Из определения функции g (см. (1.4)) получаем

$$|g(x)| = \frac{a(x)(\sin \alpha x)^4}{12\alpha^4(x + 14.5)},$$

где $a(x) = x^{-4}(x + 14.5)(x - 12)$. Нетрудно убедиться в том, что при $x \geq 20$ функция $a(x)$ положительна и строго убывает. Ввиду сказанного приходим к оценкам

$$(9.4) \quad \sup_{x \in \delta_2} |g(x)(x + 14.5)| \leq \frac{a(46)}{12\alpha^4},$$

$$(10.4) \quad \max_{x \in \delta_1} |g(x)(x + 14, 5)| \leq \frac{a(26)}{12\alpha^4} \cdot \max_{x \in \delta_1} (\sin^4 \alpha x).$$

Легко проверить, что $\max_{x \in \delta_1} (\sin^4 \alpha x) < 0.4$, и после этого непосредственным подсчетом установить, что правые части неравенств (9.4) и (10.4) меньше 0.8. Тем самым (7.4) доказано. Аналогичным образом доказывается и неравенство (8.4). Имеем:

$$|g(x)| = \frac{a_1(x) \sin^4 \alpha x}{|x + 14| \cdot 12\alpha^4} \leq \frac{a_1(x)}{|x + 14| \cdot 12\alpha^4},$$

где $a_1(x) = |x + 14| |x - 12| x^4$. При $x \leq -20$ функция $a_1(x)$ строго возрастает, следовательно,

$$\max_{x \leq -40} (|x + 14| |g(x)|) \leq \frac{a_1(-40)}{12\alpha^4} < 0.8,$$

а это и означает справедливость (8.4). Лемма 4 полностью доказана.

Напомним, что в теореме 6 рассматривается случай $\Theta = 1/2$. Это означает, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Нам будет удобно расположить их в последовательность $\{\rho_n = 1/2 + i\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0}$ в порядке возрастания их мнимых частей. Если нуль оказался кратным, то он записывается в получившуюся последовательность столько раз, какова его кратность. Наконец, $\gamma_{-n} = -\gamma_n \forall n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\varphi(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \rho_n^{-1} \exp(i\gamma_n t).$$

Из (27.2) следует, что

$$(11.4) \quad \mathcal{F}(e^t) e^{-t/2} = \varphi(t) \quad (\Theta = 1/2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Поскольку при $x \geq 2$ имеем $R_0(x) = -\mathcal{F}(x) + O(1)$, достаточно доказать, что

$$(12.4) \quad \int_x^{2x} |\mathcal{F}(u)| du \geq 51 \cdot 10^{-4} x^{3/2} \quad (\forall x \geq 1).$$

В свою очередь, (12.4) вытекает из неравенства

$$(13.4) \quad \int_x^{2x} |\mathcal{F}(u)| u^{-3/2} du \geq 51 \cdot 10^{-4} \quad (\forall x \geq 1).$$

Сделаем в интеграле замену переменного $u = e^t$. В результате этого, обозначив $X = \ln x + \frac{1}{2} \ln 2$ и учитывая (11.4), придем к соотношению, эквивалентному (13.4):

$$(14.4) \quad J(X) = \int_{X-4\alpha}^{X+4\alpha} |\varphi(t)| dt \geq 51 \cdot 10^{-4}, \quad X \geq \frac{1}{2} \ln 2.$$

Положим

$$J_1(X) = \int_{X-4\alpha}^{X+4\alpha} \varphi(t) \widehat{g}(t-X) \exp\{i\gamma_1(X-t)\} dt.$$

Используя результат леммы 3, получаем оценку

$$(15.4) \quad |J_1(X)| \leq J(X) \max_{y \in \mathbb{R}} |\widehat{g}(y)| = \frac{8}{3 \ln 2} \cdot J(X).$$

С другой стороны, интеграл $J_1(X)$ вычисляется в виде ряда, модуль которого не очень сложно оценить снизу. Имеем:⁴

$$(16.4) \quad \begin{aligned} |J_1(X)| &= \left| \int_{-4\alpha}^{4\alpha} \varphi(y+X) \widehat{g}(y) \exp(-i\gamma_1 y) dy \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{\exp(i\gamma_n X)}{\rho_n} \int_{-4\alpha}^{4\alpha} \widehat{g}(y) \exp\{i(\gamma_n - \gamma_1)y\} dy \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{\exp(i\gamma_n X)}{\rho_n} g(\gamma_n - \gamma_1) \right| \\ &\geq \frac{|g(0)|}{|\rho_1|} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|g(\gamma_n - \gamma_1)|}{|\rho_n|} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left| \frac{g(\gamma_n - \gamma_1)}{\rho_n} \right| \\ &= \frac{1}{|\rho_1|} - \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{g(\gamma_n - \gamma_1)}{\rho_n} \right| - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{g(-(\gamma_n + \gamma_1))}{\rho_n} \right|. \end{aligned}$$

⁴Равенство $\int_a^b \varphi(t) f(t) dt = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \rho_n^{-1} \int_a^b f(t) \exp(i\gamma_n t) dt$ выполняется для любой функ-

ции $f \in L[a, b]$, $0 < a < b < +\infty$, так как частичные суммы $\sum_{0 < |n| < N} \text{ряда} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \rho_n^{-1} \exp(i\gamma_n t)$

сходятся к $\varphi(t)$ в каждой точке отрезка $[a, b]$ и являются равномерно ограниченными на этом отрезке (см. [3, с. 122, (9)–(10)]).

Ясно, что если доказать оценку

$$(17.4) \quad \sigma = \frac{1}{|\rho_1|} - \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{g(\gamma_n - \gamma_1)}{\rho_n} \right| - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{g(-(\gamma_n - \gamma_1))}{\rho_n} \right| > 0.02,$$

то из (15.4)–(17.4) получим (14.4):

$$|J(X)| \geq \frac{3 \ln 2}{8} |J_1(X)| \geq \frac{3 \ln 2}{8} \sigma \geq \frac{3 \ln 2}{8 \cdot 50} > 51 \cdot 10^{-4}.$$

Тем самым теорема 6 будет доказана. Таким образом, осталось проверить справедливость неравенства (17.4).

Используя приведенные в [31] (см. также [27]) приближенные значения ординат первых шести нулей дзета-функции Римана, с помощью компьютера⁵ получаем оценки

$$(18.4) \quad \frac{1}{|\rho_1|} > 0.07, \quad \sum_{n=2}^6 \left| \frac{g(\gamma_n - \gamma_1)}{\rho_n} \right| < 0.026, \quad \sum_{n=1}^3 \left| \frac{g(-\gamma_n - \gamma_1)}{\rho_n} \right| < 0.002.$$

Теперь оценим сверху сумму

$$\sigma_1 = \sum_{n=7}^{\infty} \left| \frac{g(\gamma_n - \gamma_1)}{\rho_n} \right| + \sum_{n=4}^{\infty} \left| \frac{g(-\gamma_n - \gamma_1)}{\rho_n} \right|.$$

При $n \geq 7$ имеем [31] $\gamma_n - \gamma_1 \geq \gamma_7 - \gamma_1 > 26$, а если $n \geq 4$, то $\gamma_n + \gamma_1 \geq \gamma_4 + \gamma_1 > 40$. Поэтому к оценке значений $|g(\gamma_n - \gamma_1)|$ и $|g(-(\gamma_n - \gamma_1))|$ можно применить лемму 4. Учитывая неравенство $14.1 < \gamma_1 < 14.2$, из леммы 4 получаем

$$(19.4) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &\leq \sum_{n=7}^{\infty} \frac{0.8}{|\rho_n|(\gamma_n - \gamma_1 + 14.5)} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{0.8}{|\rho_n|(\gamma_n + \gamma_1 - 14)} \\ &< \sum_{n=7}^{\infty} \frac{0.8}{|\rho_n|(\gamma_n + 0.3)} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{0.8}{|\rho_n|(\gamma_n + 0.1)} \\ &< 0.8 \left(\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|^2} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|^2} \right) \\ &= 0.8 \left(\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{|\rho_n|^2} - \left(\frac{1}{|\rho_4|^2} + \frac{1}{|\rho_5|^2} + \frac{1}{|\rho_6|^2} \right) \right). \end{aligned}$$

⁵Мы использовали известные неравенства $a_n \leq \gamma_n \leq b_n$, $1 \leq n \leq 7$, где a_n, b_n – десятичные дроби, $0 < b_n - a_n < 10^{-3}$. Далее, делалась оценка $\left| \frac{g(\gamma_n - \gamma_1)}{\rho_n} \right| \leq \frac{M_n}{a_n}$, где $M_n = \max_{t \in \delta_n} |g(t)|$, $\delta_n = [a_n - b_1, b_n - a_1]$. Получить границу сверху $M'_n \geq M_n$, где M'_n – конечные десятичные дроби, мало отличающиеся от M_n , не представило труда. Далее было установлено, что $\sum_{n=2}^6 M'_n / a_n \leq 0.026$. Аналогично оценивались и другие конечные суммы, связанные с $\rho_1, \dots, \rho_6$. На компьютере велись *только точные вычисления с рациональными числами*. Таким образом, все неравенства строго доказаны. Однако, выкладки слишком громоздки для того, чтобы приводить их здесь.

Имеет место равенство [3, с. 91–92]

$$\sum_{\rho} \frac{2\beta}{\beta^2 + \gamma^2} = 2 + C - \ln 4\pi < 0.0465,$$

где C – постоянная Эйлера, $\beta = \operatorname{Re} \rho$, $\gamma = \operatorname{Im} \rho$. Если справедлива гипотеза Римана, то

$$(20.4) \quad \sum_{\rho} \frac{2\beta}{\beta^2 + \gamma^2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{|\rho_n|^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-2} < 0.0465.$$

Имеем также

$$(21.4) \quad \begin{aligned} 2(|\rho_1|^{-2} + |\rho_2|^{-2} + |\rho_3|^{-2}) &> 0.0175, \\ |\rho_4|^{-2} + |\rho_5|^{-2} + |\rho_6|^{-2} &> 0.002. \end{aligned}$$

Из (19.4)–(21.4) получаем $\sigma_1 < 0,022$. Отсюда и из (18.4) находим

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{|\rho_1|} - \sum_{n=2}^6 \left| \frac{g(\gamma_n - \gamma_1)}{\rho_n} \right| - \sum_{n=2}^3 \left| \frac{g(-\gamma_n - \gamma_1)}{\rho_n} \right| - \sigma_1 \\ &> 0.07 - 0.026 - 0.002 - 0.022 = 0.02. \end{aligned}$$

Мы получили (17.4), а это, как отмечалось выше, доказывает теорему 6.

Докажем сразу же и теорему 9, поскольку метод ее доказательства очень близок к методу, применявшемуся только что при доказательстве теоремы 6.

ЛЕММА 5. *Предположим, что справедлива гипотеза Римана. Пусть $b > 0$, $\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n^{-1} \exp(i\gamma_n t)$, $Y > b$. Тогда выполняется неравенство*

$$\int_{Y-b}^{Y+b} |\varphi(t)| dt \geq \frac{4b}{\pi|\rho_1|} - \frac{\pi}{b} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0, n \neq 1}}^{+\infty} \frac{|\cos((\gamma_n - \gamma_1)b)|}{|(\gamma_n - \gamma_1)^2 - (\pi/2b)^2| |\rho_n|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$(22.4) \quad g_1(y) = \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right), \quad |y| \leq b.$$

Тогда [32, с. 357] имеем

$$\widehat{g}_1(z) = \int_{-b}^b \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \exp(izy) dy = \frac{4\pi a \cos(bz)}{\pi^2 - 4z^2 b^2}.$$

Следовательно,

$$(23.4) \quad |\widehat{g}_1(z)| = \frac{\pi}{b} \left| \frac{\cos bz}{z^2 - (\pi/2b)^2} \right|.$$

Из (22.4) и (23.4) находим

$$\begin{aligned}
\int_{Y-b}^{Y+b} |\varphi(t)| dt &\geq \left| \int_{Y-b}^{Y+b} \varphi(t) g_1(Y-t) \exp(i\gamma_1(t-Y)) dt \right| \\
&= \left| \int_{-b}^b \varphi(Y+y) g_1(y) \exp(-i\gamma_1 y) dy \right| \\
&= \left| \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \rho_n^{-1} \int_{-b}^b \exp\{-i\gamma_n(Y+y)\} g_1(y) \exp(-i\gamma_1 y) dy \right| \\
&= \left| \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{e^{i\gamma_n Y}}{\rho_n} \int_{-b}^b g_1(y) \exp\{iy(\gamma_n - \gamma_1)\} dy \right| \\
&= \left| \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{e^{i\gamma_n Y}}{\rho_n} \widehat{g}_1(\gamma_n - \gamma_1) \right| \\
&\geq \left| \frac{\widehat{g}_1(0)}{\rho_1} \right| - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0, n \neq 1}}^{+\infty} \left| \frac{\widehat{g}_1(\gamma_n - \gamma_1)}{\rho_n} \right| \\
&= \frac{4b}{\pi|\rho_1|} - \frac{\pi}{b} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0, n \neq 1}}^{+\infty} \frac{|\cos((\gamma_n - \gamma_1)b)|}{|(\gamma_n - \gamma_1)^2 - (\pi/2b)^2| |\rho_n|}.
\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Положим

$$b = \frac{5\pi}{\gamma_1}, \quad I(Y) = \int_{Y-b}^{Y+b} \varphi(t) dt, \quad J(Y) = \int_{Y-b}^{Y+b} |\varphi(t)| dt, \quad Y > b.$$

Интеграл $I(Y)$ легко вычисляется:

$$I(Y) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{2e^{i\gamma_n Y} \sin(\gamma_n b)}{\rho_n \gamma_n}.$$

Учитывая выбор b , находим

$$(24.4) \quad |I(Y)| \leq 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin(5\pi\gamma_n/\gamma_1)|}{|\rho_n| \gamma_n}.$$

К оценке снизу интеграла $J(Y)$ применим лемму 5. Получим

$$J(Y) \geq \frac{20}{|\rho_1| \gamma_1} - \frac{\gamma_1}{5} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0, n \neq 1}}^{+\infty} \frac{|\cos(5\pi\gamma_n/\gamma_1)|}{|\rho_n| |(\gamma_n - \gamma_1)^2 - (\gamma_1/10)^2|}.$$

Используя приближенное значение для γ_1 из [31], находим $\gamma_1^2 < \gamma_1 |\rho_1| < 200$. Поэтому

$$(25.4) \quad J(Y) > 0.1 - \frac{\gamma_1}{5} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0, n \neq 1}}^{+\infty} \frac{|\cos(5\pi\gamma_n/\gamma_1)|}{|\rho_n| |(\gamma_n - \gamma_1)^2 - 2|}.$$

Легко проверяется справедливость неравенств

$$(26.4) \quad \begin{aligned} &(\gamma_n - \gamma_1)^2 - 2 > 2\gamma_n \quad \forall n \geq 2, \\ &(\gamma_n - \gamma_1)^2 - 2 = (\gamma_{-n} + \gamma_1)^2 - 2 > \gamma_n^2 > 21|\gamma_n| \quad \forall n \leq -2, \\ &\frac{1}{5((2\gamma_1)^2 - 2)} < 3 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Соотношения (25.4) и (26.4) влекут за собой оценку

$$(27.4) \quad \begin{aligned} J(Y) &> 0.1 - \left(\frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_1}{105} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\cos(5\pi\gamma_n/\gamma_1)|}{|\rho_n|\gamma_n} - 3 \cdot 10^{-4} \\ &> 0.0997 - 1.56 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(5\pi\gamma_n/\gamma_1)}{|\rho_n|\gamma_n}. \end{aligned}$$

Поскольку при любых $x_1, x_2, \alpha \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, из (24.4) и (27.4) находим

$$J(Y) - |I(Y)| > 0.0997 - \sqrt{18.44} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|\rho_n|\gamma_n}.$$

При $n \geq 2$ имеем $|\rho_n|/\gamma_n = \sqrt{1 + 1/4\gamma_n^2} < \sqrt{1 + 1/(4 \cdot 21^2)} < \sqrt{1.001}$. Кроме того, $|\rho_1|^{-2} > 0.00499$, а если и верна гипотеза Римана (см. доказательство предыдущей теоремы), то $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-2} < 0.02325$. Ввиду сказанного получаем

$$(28.4) \quad \begin{aligned} J(Y) - |I(Y)| &> 0.0997 - \sqrt{18.44} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{1.001}}{|\rho_n|^2} \\ &> 0.0997 - 4.3 \sum_{n=2}^{\infty} |\rho_n|^{-2} \\ &> 0.0997 - 4.3(0.02325 - 0.00499) = 0.021182. \end{aligned}$$

Полученное неравенство показывает, что модуль интеграла от $\varphi(t)$ по отрезку $[Y - b, Y + b]$ меньше интеграла от $|\varphi(t)|$ на некоторую величину, отделенную от нуля. Отсюда заключаем, что интегралы от положительной и отрицательной части $\varphi(t)$ ⁶ не слишком малы. На этой идее и построена завершающая часть доказательства теоремы 9.

⁶Напомним, что ввиду симметричного расположения относительно $\mathbb{R}$ нулей $\zeta(s)$ функция φ действительназначна.

Положим

$$\begin{aligned}\varphi^+(t) &= \max(0, \varphi(t)), & \varphi^-(t) &= -\min(0, \varphi(t)), \\ J^+(Y) &= \int_{Y-b}^{Y+b} \varphi^+(t) dt, & J^-(Y) &= \int_{Y-b}^{Y+b} \varphi^-(t) dt.\end{aligned}$$

Напомним, что $b = 5\pi/\gamma_1$. Имеем очевидные равенства

$$(29.4) \quad \begin{aligned}J(Y) &= J^+(Y) + J^-(Y), \\ I(Y) &= J^+(Y) - J^-(Y).\end{aligned}$$

Из (29.4) можно выразить $J^+(Y)$ и $J^-(Y)$:

$$(30.4) \quad J^+(Y) = (J(Y) + I(Y))/2, \quad J^-(Y) = (J(Y) - I(Y))/2.$$

Из (30.4), (28.4) и элементарных неравенств $|x_1 + x_2| \geq |x_2| - |x_1|$, $|x_1 - x_2| \geq |x_2| - |x_1|$ находим

$$(31.4) \quad J^+(Y) > 0,0105, \quad J^-(Y) > 0,0105 \quad \forall Y > b.$$

Если верна гипотеза Римана, то $\varphi(t) = \mathcal{F}(e^t)e^{-t/2}$. Поэтому при $x > 1$

$$(32.4) \quad \begin{aligned}\int_x^{10x} \mathcal{F}^+(u) du &\geq \int_x^{10x} \mathcal{F}^+(u) \left(\frac{x}{u}\right)^{3/2} du \\ &= x^{3/2} \int_{\ln x}^{\ln 10 + \ln x} \mathcal{F}^+(e^t) e^{-t/2} dt \\ &= x^{3/2} \int_{Y - \frac{1}{2} \ln 10}^{Y + \frac{1}{2} \ln 10} \varphi^+(t) dt.\end{aligned}$$

(Здесь обозначено $Y = \frac{1}{2} \ln 10 + \ln x$.) Поскольку

$$\frac{1}{2} \ln 10 > 1.15, \quad b = \frac{5\pi}{\gamma_1} < \frac{5 \cdot 3.142}{14.13} < 1.12,$$

из (31.4) и (32.4) выводим

$$(33.4) \quad \int_x^{10x} \mathcal{F}^+(u) du > 0.0105 x^{3/2} \quad \forall x > 1.$$

Аналогично находим

$$(34.4) \quad \int_x^{10x} \mathcal{F}^-(u) du > 0.0105 x^{3/2} \quad \forall x > 1.$$

Из определения функций $R_0(x)$ и $R(u)$ видно, что они не совпадают только лишь на счетном дискретном на $[1, +\infty)$ множестве точек. Следовательно, при любом $x \geq 1$ имеем

$$(35.4) \quad \int_x^{10x} R^+(u) du = \int_x^{10x} R_0^+(u) du, \quad \int_x^{10x} R^-(u) du = \int_x^{10x} R_0^-(u) du.$$

А при $u \geq 2$ вследствие (28.2) и (29.2) выполняются неравенства

$$-\mathcal{F}(u) \geq R_0(u) \geq -\mathcal{F}(u) - \ln 2\pi > -\mathcal{F}(u) - 1.84.$$

Следовательно,

$$(36.4) \quad \begin{aligned} R_0^+(u) &\geq (\mathcal{F}(u))^- - 1.84, \\ R_0^-(u) &\geq \mathcal{F}^+(u). \end{aligned} \quad (\forall u \geq 2)$$

Из (33.4)–(36.4) находим, что в случае справедливости гипотезы Римана при всех $x \geq 2$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \int_x^{10x} R^-(u) du &= \int_x^{10x} R_0^-(u) du \geq \int_x^{10x} \mathcal{F}^+(u) du > 0.0105x^{3/2}, \\ \int_x^{10x} R^+(u) du &= \int_x^{10x} R_0^+(u) du \geq \int_x^{10x} (\mathcal{F}^-(u) - 1.84) du > 0.0105x^{3/2} - 16.56x. \end{aligned}$$

В частности, при всех $x \geq 2 \cdot 10^9$

$$\int_x^{10x} R^+(u) du > \frac{x^{3/2}}{100}.$$

Теорема 9 доказана.

Перейдем к доказательствам оценок снизу интегралов от $|R(u)|$, $R^+(u)$, $R^-(u)$ в предположении, что гипотеза Римана неверна. Из соотношений (23.3), (38.2) и леммы 2 следует упрощенная формула для $R(u)$ в случае $\Theta > 1/2$:

$$(37.4) \quad R(u) = \mathcal{F}_2(\Theta_1, u) + o(u^{\Theta_1}) \quad (u \rightarrow +\infty).$$

(Мы обозначили $\Theta_1 = 1/4 + \Theta/2$.) Она убеждает нас в том, что теоремы 7 и 8 непосредственно вытекают из следующего утверждения.

Пусть $\tilde{\rho} = \tilde{\beta} + i\tilde{\gamma}$ – произвольный нуль $\zeta(s)$, вещественная часть которого $\tilde{\beta}$ больше Θ_1 . Тогда для любого $a > 1$ существует постоянная $c_{43}(a, \tilde{\rho}) > 0$ такая, что при всех $x \geq 1$ выполняется неравенство

$$(38.4) \quad \int_x^{ax} |\mathcal{F}_2(\Theta_1, u)| du \geq c_{43}(a, \tilde{\rho}) x^{1+\tilde{\beta}}.$$

Действительно, для доказательства теоремы 7 выберем нуль с вещественной частью $\tilde{\beta} > \Theta - \varepsilon/2$ (он существует по определению числа Θ). А в доказательстве теоремы 8 возьмем $\tilde{\rho} = \Theta + i\tilde{\gamma}$.

Докажем сформулированное утверждение. Положим

$$(39.4) \quad L(z) = \prod_{\substack{\text{Re } \rho \geq \Theta_1 \\ \rho \neq \tilde{\rho}}} (1 - iz/\rho).$$

Поскольку количество нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\{\Theta_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \Theta, |\operatorname{Im} s| \leq T\}$ есть $O(T^{\delta_1})$, $0 < \delta_1 < 1$, то [33, с. 197] произведение (39.4) представляет из себя целую функцию, имеющую оценку роста

$$(40.4) \quad |L(z)| \leq c_{44} \exp(c_{45}|z|^{\delta_1}) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Нули $L(z)$ расположены в точности в точках $\{-i\rho\}$, $\operatorname{Re} \rho \geq \Theta_1$, $\rho \neq \tilde{\rho}$. Постоянные c_{44} , c_{45} и δ_1 , естественно, зависят от возможного значения Θ .

Хорошо известно, что, каковы бы ни были заданные числа $\tau > 0$ и $\delta \in (0, 1)$, существует целая функция f , имеющая экспоненциальный тип, равный τ , и “достаточно быстро” убывающая на действительной оси:

$$(41.4) \quad |f(t)| = O(\exp(-|t|^\delta)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Такой целой функцией является, например,

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin d_k t}{d_k t} \right), \quad d_k = \frac{\tau k^{-1/\delta_2}}{\zeta(1/\delta_2)}, \quad \delta_2 = \frac{1+\delta}{2}.$$

Возьмем такую функцию f для $\tau = \frac{1}{2} \ln a$ и $\delta = (1 + \delta_1)/2$. Положим, наконец,

$$g(z) = \begin{cases} f(z)L(z), & \text{если } f(-i\tilde{\rho}) \neq 0, \\ \frac{f(z)L(z)}{(z + i\tilde{\rho})^q}, & \text{если } -i\tilde{\rho} \text{ — нуль } f(z) \text{ кратности } q. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$(42.4) \quad \begin{aligned} g(-i\rho) &= 0, \quad \operatorname{Re} \rho \geq \Theta_1, \quad \rho \neq \tilde{\rho}, \\ g(-i\tilde{\rho}) &\neq 0. \end{aligned}$$

Кроме того, из (40.4) и (41.4) вытекает, что g является целой функцией экспоненциального типа τ и быстро убывает на действительной оси. Поэтому преобразование Фурье

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \exp(-izy) dz$$

лежит в классе $C^\infty(\mathbb{R})$ и имеет носитель внутри отрезка $[-\tau, \tau] = [-\frac{1}{2} \ln a, \frac{1}{2} \ln a]$.

Подготовительная работа завершена и теперь мы можем приступить к оценке снизу интеграла $\int_x^{ax} |\mathcal{F}_2(\Theta_1, u)| du$. Сделаем замену переменного $u = e^t$ и обозначим $X = \ln x + \frac{1}{2} \ln a$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_x^{ax} |\mathcal{F}_2(\Theta_1, u)| du &\geq x \int_x^{ax} |\mathcal{F}_2(\Theta_1, u)| \frac{du}{u} \\ &= x \int_{X-\tau}^{X+\tau} |\mathcal{F}_2(\Theta_1, e^t)| dt \\ &\geq \frac{x}{\max_{y \in \mathbb{R}} |\widehat{g}(y)|} \left| \int_{X-\tau}^{X+\tau} \mathcal{F}_2(\Theta_1, e^t) \widehat{g}(t-X) dt \right| \\ &= c_{46} x \left| \int_{X-\tau}^{X+\tau} \left(\sum_{\operatorname{Re} \rho \geq \Theta_1} \frac{\exp(\rho t)}{\rho} \right) \widehat{g}(t-X) dt \right|. \end{aligned}$$

Сделаем в последнем интеграле замену $t - X = y$, произведя почленное интегрирование (это возможно в силу равномерной сходимости ряда для $\mathcal{F}_2(\Theta_1, e^t)$ на любом отрезке в $\mathbb{R}$) и обозначив $\lambda = -i\rho$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_x^{ax} |\mathcal{F}_2(\Theta_1, u)| du &\geq c_{46} x \left| \sum_{\operatorname{Re} \rho \geq \Theta_1} \frac{\exp(\rho X)}{\rho} \int_{-\tau}^{\tau} \widehat{g}(y) e^{i\lambda y} dy \right| \\ &= c_{46} x \left| \sum_{\operatorname{Re} \rho \geq \Theta_1} \frac{\exp(\rho X)}{\rho} g(\lambda) \right|. \end{aligned}$$

Ввиду соотношений (42.4) в последней сумме все слагаемые, кроме соответствующих $\tilde{\rho}$ (количество их равно ν – кратности нуля $\tilde{\rho}$), обращаются в ноль. Поэтому приходим к неравенствам

$$\int_x^{ax} |\mathcal{F}_2(\Theta_1, u)| du \geq c_{46} x \left| \frac{\nu}{\tilde{\rho}} g(-i\rho) \right| \exp\{(\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma})X\} = c_{47} x \exp(\tilde{\beta}X) > c_{47} x^{1+\tilde{\beta}},$$

а это и доказывает требуемое.

Для дальнейшего нам потребуются доказать существование еще одного вида непрерывных на $\mathbb{R}$ функций с конечным носителем, которые вместе со своим преобразованием Фурье имеют нужные для наших целей специальные свойства. Рассмотрим семейство функций

$$(43.4) \quad f(\beta, \gamma, z) = \frac{1}{1 + (z/\beta)^2} \cdot \frac{\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma}) - \cos(\frac{2\pi z}{\gamma})}{\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma}) - 1},$$

$$(44.4) \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1, \quad \gamma > 10, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ЛЕММА 6. *Относительно любой функции вида (43.4) с ограничениями на параметры (44.4) справедливы следующие утверждения:*

1) f – четная целая функция экспоненциального типа $2\pi/\gamma$, вещественная на $\mathbb{R}$. Все ее нули в $\mathbb{C}$ имеют вид $m\gamma \pm i\beta$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2) $f(\beta, \gamma, 0) = 1$.

3) $0 < f(\beta, \gamma, z) < 1 \quad \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4) Если $\gamma > 2\pi|z|$, то равномерно по β, γ, z

$$(45.4) \quad f(\beta, \gamma, z) = 1 + O((1 + |z|^2)\gamma^{-2}).$$

5) Преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\beta, \gamma, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\beta, \gamma, z) \exp(-izy) dz$$

положительно при всех $y \in (-2\pi\gamma, 2\pi\gamma)$ и обращается в нуль всюду вне этого интервала.

Проверка истинности утверждений 1) и 2) леммы 6 предоставляется читателю. Докажем утверждения 3)–5). Для вычисления преобразования Фурье функции f воспользуемся известной формулой [34, с. 391]

$$(46.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|b|}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая четность функции f и используя (46.4), находим

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\beta, \gamma, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma}) - \cos(\frac{2\pi z}{\gamma})}{\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma}) - 1} \cdot \frac{\cos zy}{1 + (z/\beta)^2} dz \\ &= \frac{\beta}{2\pi(\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma}) - 1)} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\beta xy) \operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma}) - \frac{1}{2} \cos(\beta xy + \frac{2\pi\beta x}{\gamma}) - \frac{1}{2} \cos(\beta xy - \frac{2\pi\beta x}{\gamma})}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma}) \exp(-\beta|y|) - \frac{1}{2} \exp(-\beta|y + \frac{2\pi}{\gamma}|) - \frac{1}{2} \exp(-\beta|y - \frac{2\pi}{\gamma}|)}{2(\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma}) - 1)}.\end{aligned}$$

Раскрывая модули в полученном выражении и записывая стоящий в числителе дроби гиперболический косинус через экспоненты, приходим к равенствам

$$\widehat{f}(\beta, \gamma, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(\frac{2\pi}{\gamma} - |y|)}{2(\operatorname{ch}(\frac{2\pi\beta}{\gamma}) - 1)}, & |y| < \frac{2\pi}{\gamma}, \\ 0, & |y| \geq \frac{2\pi}{\gamma}. \end{cases}$$

Утверждение 5) доказано. Положительность функции f на $\mathbb{R}$ очевидна, а неравенство $f(\beta, \gamma, z) < 1$ при любом действительном $z \neq 0$ легко следует из 2), неотрицательности, непрерывности и четности на $\mathbb{R}$ преобразования Фурье $\widehat{f}(\beta, \gamma, y)$:

$$\begin{aligned}f(\beta, \gamma, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\beta, \gamma, y) \exp(iyz) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\beta, \gamma, y) \cos zy dy \\ &< \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\beta, \gamma, y)| dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\beta, \gamma, y) dy = f(\beta, \gamma, y) = 1.\end{aligned}$$

Тем самым установлено неравенство 3). Для доказательства 4) заменим в выражении для $f(\beta, \gamma, z)$ функции $\cos$ и ch по известным формулам: $\cos w = 1 - w^2/2 + O(w^4)$, $\operatorname{ch} w = 1 + w^2/2 + O(w^4)$ ($w \geq 1$). Тогда при $\gamma > 2\pi|z|$, $z \notin (K_1 \cup K_2)$ ($K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i\beta| < 0, 1\}$, $K_2 = -K_1$) получим

$$f(\beta, \gamma, z) = \frac{\frac{1}{2}((\frac{2\pi\beta}{\gamma})^2 + (\frac{2\pi z}{\gamma})^2 + O((1 + |z|^4)\gamma^{-4}))}{(1 + (\frac{z}{\beta}))(\frac{1}{2}(\frac{2\pi\beta}{\gamma})^2 + O(\gamma^{-4}))}.$$

Разделив числитель и знаменатель этой дроби на $\frac{1}{2}(\frac{2\pi\beta}{\gamma})^2$, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}f(\beta, \gamma, z) &= \frac{1 + (z/\beta)^2 + O((1 + |z|^4)\gamma^{-2})}{(1 + (z/\beta)^2)(1 + O(\gamma^{-2}))} \\ &= \left(1 + O\left(\frac{1 + |z|^4}{\gamma^2(1 + (z/\beta)^2)}\right)\right)(1 + O(\gamma^{-2})).\end{aligned}$$

Отсюда сразу видно, что при $|z| < 0.1$

$$f(\beta, \gamma, z) = 1 + O(\gamma^{-2}),$$

а при $0.1 < |z| < \gamma/2\pi$, $z \notin (K_1 \cup K_2)$

$$(47.4) \quad f(\beta, \gamma, z) = 1 + O(z^2 \gamma^{-2}).$$

В частности, из (47.4) следует, что на границах кругов K_1 и K_2 выполняется неравенство $|f(\beta, \gamma, z) - 1| \leq c_{48} \gamma^{-2}$. Поскольку функция $f(\beta, \gamma, z)$ целая, такое же неравенство выполняется по принципу максимума и при $z \in (K_1 \cup K_2)$. Тем самым (45.4) доказано при всех $|z| < \gamma/2\pi$. Лемма полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Возьмем произвольные $\varepsilon > 0$, $a > 1$ и зафиксируем их. Из плотностных теорем вытекает сходимость ряда $\sum_{\text{Re } \rho \geq \Theta_1} |\text{Im } \rho|^{-1}$, где $\Theta_1 = 1/4 + \Theta/2$. Следовательно,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{\text{Re } \rho \geq \Theta_1 \\ |\text{Im } \rho| > N}} |\text{Im } \rho|^{-1} = 0.$$

Но так как согласно посылке теоремы 10 Θ недостижимо, то легко сообразить, что для любого фиксированного T существует $\delta = \delta(T) > 0$ такое, что прямоугольник $\{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re } s \geq \Theta - \delta(T), |\text{Im } s| \leq T\}$ не содержит нулей $\zeta(s)$. Поэтому найдется такое $\delta = \delta(a)$, что

$$\sum_{\text{Re } \rho \geq \Theta - \delta} |\text{Im } \rho|^{-1} < \frac{\ln a}{4\pi}.$$

При этом, естественно, можно взять $\delta < \varepsilon$.

Возьмем $\tilde{\rho} = \tilde{\beta} + i\tilde{\gamma}$ — нуль $\zeta(s)$, лежащий в полуплоскости $\text{Re } s > \Theta - \delta$ и имеющий среди таких нулей наименьшую положительную ординату (если их несколько, то выберем тот, у которого больше действительная часть). Теперь все различные нули $\zeta(s)$, лежащие в полосе $\text{Re } s \geq \Theta - \delta$, за исключением двух $\tilde{\beta} \pm i\tilde{\gamma}$ занумеруем в последовательность $\{\omega_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Через ν_n обозначим кратность нуля ω_n . Нули нумеруются, как обычно, в порядке возрастания их мнимых частей, а при равных мнимых частях — в произвольном порядке. Наконец, $\omega_{-n} = \bar{\omega}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Номер “0” в нашей нумерации не задействован. Согласно введенным обозначениям имеем

$$(48.4) \quad \mathcal{F}_2(\Theta - \delta, e^t) = \tilde{\nu} \left(\frac{e^{(\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma})t}}{\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma}} + \frac{e^{(\tilde{\beta} - i\tilde{\gamma})t}}{\tilde{\beta} - i\tilde{\gamma}} \right) + \mathcal{F}_3(e^t),$$

где $\tilde{\nu}$ — кратность нуля $\tilde{\rho}$, а

$$\mathcal{F}_3(x) = \sum_{|n| \geq 1} \frac{\nu_n x^{\omega_n}}{\omega_n}.$$

Перед тем, как приступить к оценкам интегралов от $\mathcal{F}_2^+$ и $\mathcal{F}_2^-$, докажем еще одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 7. Обозначим⁷

$$\beta_n = \operatorname{Re} \omega_n, \quad \gamma_n = \operatorname{Im} \omega_n, \quad q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}.$$

Тогда существует неотрицательная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $\widehat{g}$, обращающаяся в нуль вне интервала $(-2\pi q, 2\pi q)$, такая, что

$$(49.4) \quad \int_{-2\pi q}^{2\pi q} e^{(\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma})t} \widehat{g}(t) dt \neq 0,$$

а при любом $Y \in \mathbb{R}$

$$(50.4) \quad \int_{Y-2\pi q}^{Y+2\pi q} \mathcal{F}_3(e^t) \widehat{g}(t-Y) dt = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g_N(z) = \prod_{n=1}^N f(\beta_n, \gamma_n, z).$$

В силу (45.4) последовательность функций $g_N(z)$ имеет предел

$$g(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f(\beta_n, \gamma_n, z),$$

причем сходимость на любом компакте в $\mathbb{C}$ равномерна. Следовательно (см. утверждение 1) леммы 6), $g(z)$ является целой четной вещественной на $\mathbb{R}$ функцией и все ее нули в $\mathbb{C}$ расположены в точках

$$m\gamma_n \pm i\beta_n, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad mn \neq 0.$$

Согласно выбору нуля $\tilde{\rho} = \tilde{\beta} + i\tilde{\gamma}$ нет другого нуля $\zeta(s)$ с положительной мнимой частью, меньшей $\tilde{\gamma}$, и с вещественной частью $\tilde{\beta}$. Поэтому если бы для каких-нибудь $m, n \in \mathbb{Z}$ имело место равенство $\tilde{\gamma} - i\tilde{\beta} = m\gamma_n \pm i\beta_n$, то мы получили бы $\tilde{\gamma} = \gamma_{|n|}$, $\tilde{\beta} = \beta_{|n|}$, т.е. $\tilde{\rho} = \omega_{|n|}$. Но все элементы $\{\omega_n\}$ отличны от $\tilde{\rho}$ по определению этой последовательности. Сказанное означает, что

$$(51.4) \quad g(\tilde{\gamma} - i\tilde{\beta}) \neq 0.$$

Поскольку преобразование Фурье произведения двух функций является сверткой их преобразований Фурье, справедливо соотношение

$$\widehat{g}_N(y) = \widehat{f}(\beta_1, \gamma_1, y) * \cdots * f(\beta_N, \gamma_N, y).$$

⁷В сумме q участвуют нули $\zeta(s)$, вещественные части которых больше или равны $\Theta - \delta > 1/2$. Следовательно, по плотностной теореме [21, с. 237] имеем $q < +\infty$.

Поэтому (см. утверждение 5) леммы 6)

$$(52.4) \quad \begin{aligned} \widehat{g}_N(y) &> 0, & |y| < 2\pi q_N, \\ \widehat{g}_N(y) &= 0, & |y| \geq 2\pi q_N, \end{aligned}$$

где $q_N = \sum_{n=1}^N \gamma_n^{-1}$.

Из утверждения 3) леммы 6 следует, что все функции g_N положительны на $\mathbb{R}$, и при любом фиксированном $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ последовательность $g_N(z_0)$ убывает. Как отмечалось выше, $\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $g_1(z) = f(\beta_1, \gamma_1, \cdot) \in L(\mathbb{R})$. Поэтому $g \in L(\mathbb{R})$,

$$(53.4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_N(z) - g(z)| dz = 0.$$

Вследствие (53.4) $\widehat{g} \in C(\mathbb{R})$ и последовательность $\widehat{g}_N(y)$ сходится к $\widehat{g}(y)$ равномерно на $\mathbb{R}$. Это вместе с (52.4) влечет за собой справедливость соотношений

$$(54.4) \quad \begin{aligned} \widehat{g}(y) &\geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}, \\ \text{supp } \widehat{g} &\subset [-2\pi q, 2\pi q]. \end{aligned}$$

Первая часть леммы 7 доказана. Установим справедливость соотношений (49.4) и (50.4). По формуле обращения преобразования Фурье имеем

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(y) \exp(izy) dy.$$

Отсюда, из (51.4) и (54.4) находим

$$\begin{aligned} 0 \neq g(\widetilde{\gamma} - i\widetilde{\beta}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(y) \exp((\widetilde{\beta} + i\widetilde{\gamma})y) dy \\ &= \int_{-2\pi q}^{2\pi q} \widehat{g}(y) \exp((\widetilde{\beta} + i\widetilde{\gamma})y) dy. \end{aligned}$$

Тем самым (49.4) доказано. Поскольку $g(\gamma_n - i\beta_n) = 0$ при любых $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$(55.4) \quad \int_{-2\pi q}^{2\pi q} \widehat{g}(y) \exp((\beta_n + i\gamma_n)y) dy = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Ряд для $\mathcal{F}_3(e^t)$ сходится равномерно на любом отрезке в $\mathbb{R}$ и, следовательно, допускает почленное интегрирование. Поэтому, учитывая (55.4), находим

$$\begin{aligned} \int_{Y-2\pi q}^{Y+2\pi q} \mathcal{F}_3(e^t) \widehat{g}(t-Y) dt &= \int_{Y-2\pi q}^{Y+2\pi q} \left(\sum_{|n| \geq 1} \frac{\nu_n e^{\omega_n t}}{\omega_n} \right) \widehat{g}(t-Y) dt \\ &= \sum_{|n| \geq 1} \frac{\nu_n e^{\omega_n t}}{\omega_n} \int_{-2\pi q}^{2\pi q} e^{\omega_n y} \widehat{g}(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Лемма 7 полностью доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Обозначим $X = \ln x + \frac{1}{2} \ln a$, $\widehat{g}(\tilde{\gamma} - i\tilde{\beta}) = \xi e^{i\alpha}$ (можно взять $\xi > 0$, так как $\widehat{g}(\tilde{\gamma} - i\tilde{\beta}) \neq 0$). Если Y пробегает некоторый отрезок действительной оси длины $2\pi/\tilde{\gamma}$, то точка $\exp(iY\tilde{\gamma})$ совершает полный оборот по единичной окружности в $\mathbb{C}$. Поэтому найдутся два числа $X_1, X_2 \in [X - \pi/\tilde{\gamma}, X + \pi/\tilde{\gamma}]$ такие, что

$$(56.4) \quad \operatorname{Re} \left(\frac{\exp(i(X_1\tilde{\gamma} + \alpha))}{\tilde{\rho}} \right) = \frac{1}{|\tilde{\rho}|}, \quad \operatorname{Re} \left(\frac{\exp(i(X_2\tilde{\gamma} + \alpha))}{\tilde{\rho}} \right) = -\frac{1}{|\tilde{\rho}|}.$$

Обозначим для краткости $\mathcal{F}_2(u) = \mathcal{F}_2(\Theta - \delta, u)$ и приступим к оценке снизу интеграла $\int_x^{ax} \mathcal{F}_2^+(u) du$. Имеем:

$$(57.4) \quad \int_x^{ax} \mathcal{F}_2^+(u) du \geq x \int_x^{ax} \mathcal{F}_2^+(u) \frac{du}{u} = x \int_{X - \frac{1}{2} \ln a}^{X + \frac{1}{2} \ln a} \mathcal{F}_2^+(e^t) dt.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2} \ln a > 2\pi \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \right) = 2\pi q + 2\pi\tilde{\gamma}^{-1},$$

справедливы включения

$$(58.4) \quad [X_j - 2\pi q, X_j + 2\pi q] \subset [X - \frac{1}{2} \ln a, X + \frac{1}{2} \ln a], \quad j = 1, 2.$$

Из (57.4) и (58.4) находим

$$(59.4) \quad \begin{aligned} \int_x^{ax} \mathcal{F}_2^+(u) du &\geq \int_{X_1 - 2\pi q}^{X_1 + 2\pi q} \mathcal{F}_2^+(e^t) dt \\ &\geq \frac{x}{\max_{y \in \mathbb{R}} \widehat{g}(y)} \int_{X_1 - 2\pi q}^{X_1 + 2\pi q} \mathcal{F}_2^+(e^t) \widehat{g}(t - X_1) dt \\ &\geq c_{49} x \int_{X_1 - 2\pi q}^{X_1 + 2\pi q} \mathcal{F}_2(e^t) \widehat{g}(t - X_1) dt, \end{aligned}$$

где $c_{49} = 1/\max_{y \in \mathbb{R}} \widehat{g}(y)$. Здесь мы использовали, что функция $\widehat{g}$ неотрицательна, непрерывна на $\mathbb{R}$ и не равна нулю тождественно (см. (49.4)). Используя представление (48.4) функции $\mathcal{F}_2(e^t)$, а также равенства (50.4) и (49.4), получаем

$$\begin{aligned} &\int_{X_1 - 2\pi q}^{X_1 + 2\pi q} \mathcal{F}_2(e^t) \widehat{g}(t - X_1) dt \\ &= \int_{X_1 - 2\pi q}^{X_1 + 2\pi q} \left(\tilde{\nu} \left(\frac{e^{(\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma})t}}{\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma}} + \frac{e^{(\tilde{\beta} - i\tilde{\gamma})t}}{\tilde{\beta} - i\tilde{\gamma}} \right) + \mathcal{F}_3(e^t) \right) \widehat{g}(t - X_1) dt \\ &= \tilde{\nu} \int_{X_1 - 2\pi q}^{X_1 + 2\pi q} \left(\frac{e^{(\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma})t}}{\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma}} + \frac{e^{(\tilde{\beta} - i\tilde{\gamma})t}}{\tilde{\beta} - i\tilde{\gamma}} \right) \widehat{g}(t - X_1) dt \\ &= \tilde{\nu} \int_{-2\pi q}^{2\pi q} \left(\frac{e^{(\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma})X_1}}{\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma}} e^{(\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma})y} \widehat{g}(y) + \frac{e^{(\tilde{\beta} - i\tilde{\gamma})X_1}}{\tilde{\beta} - i\tilde{\gamma}} e^{(\tilde{\beta} - i\tilde{\gamma})y} \widehat{g}(y) \right) dy \\ &= \tilde{\nu} e^{\beta X_1} \left(\frac{e^{i\tilde{\gamma}X_1} g(\tilde{\gamma} - i\tilde{\beta})}{\tilde{\beta} + i\tilde{\gamma}} + \frac{e^{-i\tilde{\gamma}X_1} g(-\tilde{\gamma} - i\tilde{\beta})}{\tilde{\beta} - i\tilde{\gamma}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку функция g четна и вещественна на $\mathbb{R}$, числа $g(\tilde{\gamma} - i\tilde{\beta})$ и $g(-\tilde{\gamma} - i\tilde{\beta})$ являются комплексно-сопряженными и, следовательно, в скобках в последнем выражении стоит сумма двух комплексно-сопряженных чисел. Ввиду сказанного приходим к равенству

$$(60.4) \quad \int_{X_1 - 2\pi q}^{X_1 + 2\pi q} \mathcal{F}_2^+(e^t) \widehat{g}(t - X_1) dt = 2\tilde{\nu} e^{\beta X_1} \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\tilde{\gamma} X_1} g(\tilde{\gamma} - i\tilde{\beta})}{\tilde{\rho}} \right).$$

Вспоминая обозначение $g(\tilde{\gamma} - i\tilde{\beta}) = \xi e^{i\alpha}$, $\xi > 0$, и исходя из выбора X_1 , из (56.4), (59.4) и (60.4) находим

$$\int_x^{ax} \mathcal{F}_2^+(u) du \geq c_{50} x e^{\tilde{\beta} X_1} \frac{\xi}{|\tilde{\rho}_1|} = c_{51} x^{1+\tilde{\beta}} > c_{51} x^{1+\Theta-\delta}.$$

С помощью совершенно аналогичных рассуждений получаем оценку для интеграла от $\mathcal{F}^-$:

$$\begin{aligned} \int_x^{ax} \mathcal{F}_2^-(u) du &\geq x \int_{X - \frac{1}{2} \ln a}^{X + \frac{1}{2} \ln a} \mathcal{F}_2(e^t) dt \\ &\geq c_{49} x \int_{X_2 - 2\pi q}^{X_2 + 2\pi q} \mathcal{F}_2(e^t) \widehat{g}(t - X_2) dt \\ &\geq c_{49} x \int_{X_2 - 2\pi q}^{X_2 + 2\pi q} -\mathcal{F}_2(e^t) \widehat{g}(t - X_2) dt \\ &= -2c_{49} x \tilde{\nu} e^{\tilde{\beta} X_2} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\tilde{\gamma} X_2} g(\tilde{\gamma} - i\tilde{\beta})}{\tilde{\rho}} \right) \\ &= c_{51} x^{1+\tilde{\beta}} > c_{51} x^{1+\Theta-\delta}. \end{aligned}$$

Из доказанных оценок и соотношения

$$R(x) = -\mathcal{F}_2(\Theta - \delta, x) + o(x^{\Theta-\delta}) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

(см. лемму 2 и (38.2)) получаем

$$\begin{aligned} \int_x^{Ax} R^+(u) du &> c_{51} x^{1+\Theta-\delta} + o(x^{1+\Theta-\delta}), \\ \int_x^{Ax} R^-(u) du &> c_{51} x^{1+\Theta-\delta} + o(x^{1+\Theta-\delta}). \end{aligned} \quad (x \rightarrow \infty)$$

Так как $\delta < \varepsilon$, то отсюда при $x > x_1(\varepsilon)$ получаем неравенства (11.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 11 основывается совершенно на той же идее, что и доказательство теоремы 10, только чуть-чуть проще. Вкратце, оно состоит в следующем.

По лемме 2

$$R(u) = \mathcal{F}_2(\Theta, u) + o(u^\Theta) \quad (u \rightarrow +\infty).$$

Поэтому задача сводится к оценкам интегралов от $\mathcal{F}_2^+(\Theta, u)$ и $\mathcal{F}_2^-(\Theta, u)$. В качестве $\tilde{\rho}$ берем нуль с наименьшей положительной ординатой, лежащий на прямой $\operatorname{Re} s = \Theta$ (в этой теореме предполагается, что Θ достижимо). Остальные различные нули $\zeta(s)$ на прямой $\operatorname{Re} s = \Theta$ расположим в последовательность ω_n по тому же принципу, что и ранее. Далее делаем в точности те же выкладки, что и в доказательстве теоремы 10. Но так как здесь $\tilde{\beta} = \Theta$, то никакого ε не появляется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 13. Если справедлива гипотеза Римана, то из (1), леммы 1 и (35.2) получается следующая приближенная явная формула для $P(u)$:

$$(61.4) \quad P(u) = -(\ln u)^{-1} \left(\sqrt{u} + \sum_{\rho} \frac{u^{\rho}}{\rho} \right) + O\left(\frac{\sqrt{u}}{\ln^2 u} \right), \quad u \geq 2.$$

Интегрируя (61.4) от 2 до x , находим

$$(62.4) \quad \int_2^x P(u) du = - \left(\frac{2}{3} \frac{u^{3/2}}{\ln u} \Big|_2^x + \frac{2}{3} \int_2^x \frac{\sqrt{u}}{\ln^2 u} du + \sum_{\rho} \left(\frac{u^{\rho+1}}{\rho(\rho+1) \ln u} \Big|_2^x + \frac{1}{\rho(\rho+1)} \int_2^x \frac{u^{\rho} du}{\ln^2 u} \right) \right) + O\left(\int_2^x \frac{\sqrt{u}}{\ln^2 u} du \right).$$

Поскольку $\rho = 1/2 + i\gamma$, $\int_2^x \sqrt{u} \ln^{-2} u du = O(x^{3/2} \ln^{-2} x)$ и

$$(63.4) \quad \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho(\rho+1)|} = \sum_{\rho} \frac{1}{\sqrt{\gamma^4 + 2.5\gamma^2 + 9/16}} = \omega \quad \text{при } \Theta = 1/2,$$

из (62.4) и (63.4) получаем

$$\int_2^x P(u) du = -\frac{2}{3} \frac{x^{3/2}}{\ln x} - \sum_{\rho} \frac{x^{3/2+i\gamma}}{\rho(\rho+1) \ln x} + O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^2 x} \right).$$

Отсюда и из определения функции $\mathcal{P}$ находим

$$(64.4) \quad \mathcal{P}(x) = -\frac{2}{3} - \sum_{\rho} \frac{x^{i\gamma}}{\rho(\rho+1)} + O((\ln x)^{-1}).$$

Из (63.4) и (64.4) легко следуют требуемые оценки $\bar{L}$ и $\underline{L}$. Неравенство $\underline{L} \neq \bar{L}$ вытекает из того, что функция $v(t) = \sum_{\rho} \frac{\exp(i\gamma t)}{\rho(\rho+1)}$ не имеет предела при $t \rightarrow +\infty$.

Это — хорошо известный факт из теории почти периодических функций. Впрочем, его легко доказать. Предположив, что существует

$$(65.4) \quad l = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t),$$

мы получили бы $l = 0$, так как ввиду того, что все показатели γ отличны от нуля и ряд (63.4) абсолютно сходится, справедливо соотношение

$$\int_0^T v(t) dt = \sum_{\rho} \frac{e^{i\gamma t} - 1}{i\gamma\rho(\rho + 1)} = O(1).$$

С другой стороны,

$$\int_0^T v(t) e^{-i\gamma_1 t} dt = \frac{T}{\rho_1(\rho_1 + 1)} + O(1),$$

но если $l = 0$, то $\int_0^T |v(t)| dt = o(T)$ ($T \rightarrow \infty$). Полученное противоречие показывает, что предел (65.4) не существует. Теорема 13 доказана.

Для доказательства теорем 14, 15, 17 и 19 нам потребуются два вспомогательных утверждения. Обозначим в предположении гипотезы Римана

$$(66.4) \quad S(y, h) = \sum_{\gamma > 0} \frac{\sin \gamma y}{\gamma} \frac{\sin \gamma h}{\gamma h}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad h > 0.$$

Ввиду (36.2) ряд (66.4) при всех $y \in \mathbb{R}$ и $h > 0$ сходится абсолютно и равномерно по y при фиксированном h . Из дальнейшего будет видно, что равномерная сходимость ряда (66.4) по совокупности переменных (y, h) не имеет места.

ЛЕММА 8. Если верна гипотеза Римана, то равномерно по $x \geq 6$ и $h \in (0, 1)$

$$(67.4) \quad \frac{1}{2hx^{3/2}} \int_{x \exp(-h)}^{x \exp h} R(u) du = -2S(\ln x, h) + w(x, h),$$

$|w(x, h)| \leq c_{52}$, постоянная c_{52} — абсолютная и эффективная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду ограничений на x и h в интеграле (67.4) $u \geq 2$. Поэтому из (35.2) и (38.2) находим

$$\begin{aligned} (68.4) \quad & \frac{x^{-3/2}}{2h} \int_{x \exp(-h)}^{x \exp h} R(u) du \\ &= \frac{x^{-3/2}}{2h} \int_{x \exp(-h)}^{x \exp h} \left(- \sum_{\gamma} \frac{u^{1/2+i\gamma}}{1/2+i\gamma} + O(1) \right) du \\ &= \frac{x^{-3/2}}{2h} \left(- \sum_{\gamma} \frac{u^{3/2+i\gamma}}{(1/2+i\gamma)(3/2+i\gamma)} \Big|_{x \exp(-h)}^{x \exp h} + O(x \operatorname{sh} h) \right) \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma} (e^{(3/2+i\gamma)h} - e^{-(3/2+i\gamma)h})}{(\gamma + 3/2i)(\gamma + 1/2i)} + O(1/\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma} \operatorname{sh}((3/2+i\gamma)h)}{\gamma^2 - 2i\gamma - 3/4} + O(x^{-1/2}). \end{aligned}$$

Поскольку при $u, v \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sh}(u + iv) = \operatorname{sh} u \cos v + i \sin v \operatorname{ch} u,$$

а при $\gamma \rightarrow \pm\infty$

$$(\gamma^2 - 2i\gamma - 3/4)^{-1} = \gamma^{-2} + O(\gamma^{-3}),$$

из (68.4) получаем

$$\begin{aligned} (69.4) \quad & \frac{x^{-3/2}}{2h} \int_{x \exp(-h)}^{x \exp h} R(u) du \\ &= \frac{\operatorname{sh}(3h/2)}{h} \sum_{\gamma} \frac{\cos(\gamma h) x^{i\gamma}}{\gamma^2 - 2i\gamma - 3/4} \\ & \quad + \frac{i \operatorname{ch}(3h/2)}{h} \sum_{\gamma} (\gamma^{-2} + O(\gamma^{-3})) \sin(\gamma h) x^{i\gamma} + O(x^{-1/2}) \\ &= i \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{\gamma} \frac{\sin \gamma h}{\gamma h} + O(1). \end{aligned}$$

Мы воспользовались ограниченностью $\frac{\operatorname{sh}(3h/2)}{h}$ и $\frac{\operatorname{ch}(3h/2) - 1}{h}$ на $(0, 1)$ и равномерной ограниченностью по x и h суммы ряда

$$\sum_{\gamma} \left| \frac{x^{i\gamma} \sin \gamma h}{\gamma^3 h} \right| \leq \sum_{\gamma} \frac{1}{\gamma^2} < +\infty.$$

Теперь обозначим $y = \ln x$ и в ряде

$$\sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{\gamma} \cdot \frac{\sin \gamma h}{\gamma h}$$

перейдем к суммированию по $\gamma > 0$. Имеем:

$$(70.4) \quad \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{\gamma} \cdot \frac{\sin \gamma h}{\gamma h} = \sum_{\gamma > 0} \frac{\sin \gamma h}{\gamma h} \left(\frac{e^{i\gamma y}}{\gamma} + \frac{e^{-i\gamma y}}{-\gamma} \right) = \sum_{\gamma} \frac{2i \sin \gamma y}{\gamma} \cdot \frac{\sin \gamma h}{\gamma h}.$$

Из (69.4) и (70.4) получаем утверждение леммы 8.

ЛЕММА 9. *Предположим, что верна гипотеза Римана. Тогда существует эффективная абсолютная постоянная $c_{53} \in (0, 0.1)$ такая, что при любых $Y \geq 1$ и $h \in (0, c_{53}]$ найдутся точки $y_1, y_2 \in [Y, Y \exp(h^{-1}(\ln(1/h))^{5/2})]$, в которых выполняются неравенства*

$$(71.4) \quad \begin{aligned} S(y_1, h) &> 0.1 \ln(1/h), \\ S(y_2, h) &< 0.1 \ln h. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$T(h) = h^{-1} \ln(1/h), \quad S_1(y, h) = \sum_{0 < \gamma \leq T(h)} \frac{\sin \gamma y}{\gamma} \cdot \frac{\sin \gamma h}{\gamma h}.$$

Ввиду (29.2) имеем

$$\sum_{\gamma > T} \gamma^{-2} = O(T^{-1} \ln T), \quad T \geq 2.$$

Поэтому равномерно по $y \in \mathbb{R}$, $h \in (0, 1/3)$ с эффективной постоянной в символе O выполняется соотношение

$$(72.4) \quad S(y, h) = S_1(y, h) + O(1).$$

Используя (36.2), находим

$$\begin{aligned} S_1(h, h) &= h \sum_{0 < \gamma \leq T(h)} \left(\frac{\sin \gamma h}{\gamma h} \right)^2 \geq h \sum_{0 < \gamma \leq \pi/2h} \left(\frac{\sin \gamma h}{\gamma h} \right)^2 \\ &\geq h \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \sum_{0 < \gamma \leq \pi/2h} 1 = \frac{4h}{\pi^2} \mathcal{N} \left(\frac{\pi}{2h} \right) \\ &= \frac{4h}{\pi^2} \left(\frac{1}{2h} \cdot \frac{\pi}{2h} \ln \frac{\pi}{2h} + O \left(\frac{1}{h} \right) \right) = \pi^{-2} \ln(1/h) + O(1), \\ S_1(-h, h) &= -S_1(h, h) \leq \pi^{-2} \ln h + O(1). \end{aligned}$$

Согласно асимптотической теореме Дирихле [15, с. 133] для любого $X \in \mathbb{N}$ найдется натуральное число k , $1 \leq k \leq X^N$, $N = \mathcal{N}(T(h))$, такое, что при всех $m = 1, 2, \dots, N$ выполнены неравенства

$$(73.4) \quad \left\| \frac{\gamma_m Y}{\pi} k \right\| < X^{-1}.$$

(Здесь мы занумеровали нули $\zeta(s)$ так же, как и в доказательстве теоремы 6, а через $\|z\|$ обозначим расстояние от z до ближайшего целого числа.) Положим $X = [\ln^2 h]$,

$$(74.4) \quad y_1 = 2kY + h, \quad y_2 = 2kY - h,$$

где $k \in \mathbb{N}$ есть то самое число, для которого справедливы неравенства (73.4). Так как $Y \geq 1$, $0 < h < 1/3$, то очевидно, что $y_j \geq Y$, $j = 1, 2$. С другой стороны, $y_j \leq 3X^N Y$, откуда имеем, что

$$y_j Y^{-1} \leq 3 \exp\{\mathcal{N}(T(h)) \ln X\} \leq 3 \exp\{c_{54} h^{-1} \ln^2 h \ln |\ln h|\} < \exp\{h^{-1} (\ln(1/h))^{5/2}\}$$

при $h \in (0, c_{55})$, $j = 1, 2$.

Таким образом, для доказательства леммы 9 осталось лишь установить справедливость соотношений (71.4) для y_j , определенных в (74.4), $j = 1, 2$, при $0 < h < c_{53} < c_{55}$. Для $j = 1, 2$ имеем:

$$\begin{aligned}
 (75.4) \quad & |S_1(y_j, h) - S_1(y_j - 2kY, h)| \\
 &= \left| \sum_{0 < \gamma < T(h)} \frac{(\sin \gamma y_j - \sin((y_j - 2kY)\gamma))}{\gamma} \cdot \frac{\sin \gamma h}{\gamma h} \right| \\
 &= \left| \sum_{m=1}^N \frac{2 \sin((y_j - kY)\gamma_m) \sin(kY \gamma_m)}{\gamma_m} \cdot \frac{\sin \gamma_m h}{\gamma_m h} \right| \\
 &\leq \sum_{m=1}^N \left| \frac{2 \sin(kY \gamma_m)}{\gamma_m} \right|.
 \end{aligned}$$

Так как $|\sin \pi \alpha| \leq \pi \|\alpha\|$ ($\forall \alpha \in \mathbb{R}$), то, учитывая (73.4) при $1 \leq m \leq N$, получаем неравенства

$$(76.4) \quad |\sin(kY \gamma_m)| \leq \pi \left\| \frac{kY \gamma_m}{\pi} \right\| \leq \pi (\ln^2 h)^{-1} = O(\ln^{-2} h).$$

Из (75.4), (76.4) и (36.3) находим

$$(77.4) \quad |S_1(y_j, h) - S_1(y_j - 2kY, h)| \leq c_{56} \ln^{-2} h \sum_{m=1}^N \gamma_m^{-1} < c_{56}, \quad j = 1, 2.$$

Ввиду (74.4) неравенства (77.4) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (78.4) \quad & |S_1(y_1, h) - S_1(h, h)| < c_{57}, \\
 & |S_1(y_2, h) - S_1(-h, h)| < c_{57}.
 \end{aligned}$$

Полученные выше оценки для $S_1(\pm h, h)$ вместе с (72.4) и (78.4) влекут за собой справедливость неравенств (71.4) при $h \in (0, c_{53})$. Лемма 9 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 14. Поскольку при любом постоянном $a > 1$ и $u \in [x, ax]$ имеем

$$(\ln u)^{-1} = (\ln x)^{-1} + O_a((\ln x)^{-2}),$$

из (61.4) и (2.2) находим

$$(79.4) \quad \int_x^{ax} P(u) du = -(\ln x)^{-1} \int_x^{ax} \left(\sqrt{u} + \sum_{\rho} u^{\rho} / \rho \right) du + O(x^{3/2} (\ln x)^{-2}).$$

Вычисляя интеграл, стоящий в правой части (79.4), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
& \int_x^{ax} P(u) du \\
&= -(\ln x)^{-1} \left(\frac{2}{3} ((ax)^{3/2} - x^{3/2}) + \sum_{\rho} \frac{(ax)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \right) + O(x^{3/2} (\ln x)^{-2}) \\
&= \frac{x^{3/2}}{\ln x} \left(-\frac{2}{3} (a^{3/2} - 1) - \sum_{\rho} \frac{x^{i\gamma} (a^{3/2+i\gamma} - 1)}{\rho(\rho+1)} \right) + O(x^{3/2} (\ln x)^{-2}) \\
&\leq \frac{x^{3/2}}{\ln x} \left(-\frac{2}{3} (a^{3/2} - 1) + \sum_{\rho} \frac{a^{3/2} + 1}{|\rho(\rho+1)|} \right) + O(x^{3/2} (\ln x)^{-2}) \\
&= -\frac{2}{3} \frac{x^{3/2} (a^{3/2} - 1)}{\ln x} K(a) + O(x^{3/2} (\ln x)^{-2}).
\end{aligned}$$

Первая часть теоремы 14 доказана. Приступим к доказательству второй части. Положим

$$(80.4) \quad h = \frac{1}{2} \ln(1 + \alpha), \quad Y = h + \ln X.$$

Ясно, что $\alpha/3 < h < \alpha/2$ при всех $\alpha \in (0, 1/2)$ и при $0 < \alpha < \min(e^{-50}, c_{53})$ согласно лемме 9 на отрезке⁸

$$[Y, Y \exp\{h^{-1}(\ln(1/h))^{2.5}\}] \subset [Y, Y \exp\{\frac{1}{2}\alpha^{-1} \ln^3(1/\alpha)\}]$$

найдется точка y_2 , для которой

$$S(y_2, h) < 0.1 \ln h < 0.1 \ln \alpha.$$

По лемме 8 это означает, что справедливо неравенство ($x = \exp y_2$)

$$\frac{x^{-3/2}}{2h} \int_{x \exp(-h)}^{x \exp h} R(u) du > 0.2 \ln(1/\alpha) + O(1),$$

т.е. при малых α верна оценка

$$(81.4) \quad \int_{x \exp(-h)}^{x \exp h} R(u) du > 0.2 \alpha x^{3/2} \ln(1/\alpha) - c_{58} \alpha x^{3/2}$$

с абсолютной и эффективной постоянной c_{57} .

Ввиду (1) и леммы 1

$$(82.4) \quad P(u) = \frac{R(u)}{\ln u} + O\left(\frac{\sqrt{u}}{\ln u}\right) \quad (\Theta = 1/2, u \geq 2).$$

⁸ Это включение заведомо имеет место, если $\alpha < e^{-50}$.

Обозначая $\xi = xe^{-h}$ (тогда $xe^h = \xi + \xi\alpha$), из (81.4) и (82.4) находим (постоянные в символах O абсолютные)

$$\begin{aligned}
& \int_{\xi}^{\xi+\xi\alpha} P(u) du \\
&= \int_{\xi}^{\xi+\xi\alpha} \frac{R(u)}{\ln u} du + O\left(\frac{\alpha\xi^{3/2}}{\ln \xi}\right) \\
&= \frac{1}{\ln \xi} \int_{\xi}^{\xi+\xi\alpha} R(u) du + \int_{\xi}^{\xi+\xi\alpha} R(u) \left(\frac{1}{\ln u} - \frac{1}{\ln \xi}\right) du + O\left(\frac{\alpha\xi^{3/2}}{\ln \xi}\right) \\
&> \frac{0.2\alpha\xi^{3/2} \ln(1/\alpha)}{\ln \xi} - \frac{c_{59}\alpha\xi^{3/2}}{\ln \xi} - \left[\max_{u \in [\xi, \xi+\alpha]} \left(\frac{1}{\ln \xi} - \frac{1}{\ln u}\right) \right] \cdot \int_{\xi}^{\xi+\xi\alpha} |R(u)| du \\
&> \frac{0.2\alpha\xi^{3/2} \ln(1/\alpha)}{\ln \xi} - \frac{c_{60}\alpha\xi^{3/2}}{\ln \xi} > \frac{\alpha\xi^{3/2} \ln(1/\alpha)}{6 \ln \xi}
\end{aligned}$$

при $\alpha \in (0, c_{24})$. Тем самым неравенство (18.2) доказано. Осталось установить, что $\xi \in [X, X^B]$, где $B = \exp(\alpha^{-1} \ln^3(1/\alpha))$. Имеем: $\ln \xi = \ln x - h = y_2 - h \geq Y - h = \ln X$. Требуемая оценка снизу для ξ получена. С другой стороны, $\ln \xi = y_2 - h < YB/2 = B(h + \ln X)/2 < B \ln X$. Поэтому $\xi < X^B$. Вторая часть теоремы 14 доказана.

Перейдем к доказательству третьей части теоремы 14. В доказательстве леммы 9 было установлено предельное соотношение: $\lim_{h \rightarrow +0} S(-h, h) = -\infty$. Поэтому найдется $h_0 \in (0, 0.01)$, для которого выполняется неравенство

$$S(-h_0, h_0) < 1 - c_{52},$$

где c_{52} — постоянная леммы 8. Поскольку ряд по системе $\{\sin \gamma_n y\}_{n=1}^{\infty}$ для функции $S(y, h_0)$ абсолютно сходится, $S(y, h_0)$ является почти периодической функцией Бора. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ множество ε -почти периодов $S(y, h_0)$ относительно плотно [30]. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $T(\varepsilon)$, что на любом отрезке в $\mathbb{R}$ длины $T(\varepsilon)$ имеется число τ , для которого

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |S(y + \tau, h_0) - S(y, h_0)| < \varepsilon.$$

Из сказанного несложно вывести, что при некотором достаточно большом L и при любом $\alpha > 0$ на отрезке $[\alpha, \alpha + L]$ отыщется точка $\hat{y} = \hat{y}(\alpha, L)$ такая, что

$$S(\hat{y}, h_0) < -0.9 - c_{52}.$$

(Достаточно взять $\varepsilon = 0, 1$, $L = T(0, 1)$ и, положив $y = -h_0$, применить сформулированную выше теорему об ε -почти периодах к отрезку $[\alpha + h_0, \alpha + L + h_0]$.) Тогда по лемме 8 получаем, что при $\alpha_1 \geq 6$ на отрезке $[\alpha_1, \alpha_1 L_1]$ ($L_1 = \exp L$, $\alpha_1 = \exp \alpha$) найдется точка z , для которой имеет место неравенство

$$\int_{z \exp(-h_0)}^{z \exp h_0} R(u) du > 3.6 h_0 z^{3/2}.$$

Так как⁹

$$\int_{z \exp(-h_0)}^{z \exp h_0} \sqrt{u} du = (4/3)z^{3/2} \operatorname{sh}(3h_0/2) < (7/3)z^{3/2}h_0,$$

то, воспользовавшись приближенной явной формулой (61.4) для $P(u)$ ($\Theta = 1/2$) и (38.2), получаем

$$\int_{z \exp(-h_0)}^{z \exp h_0} P(u) du > \frac{1.2h_0 z^{3/2}}{\ln z} + O\left(\frac{z^{3/2}}{\ln^2 z}\right).$$

Положив $a_1 = \max(L_1 e^{2h_0}, 1/h_0)$, приходим к следующему утверждению. При всех $x > x_2$

$$\int_x^{a_1 x} P^+(u) du > h_0 x^{3/2} (\ln x)^{-1}.$$

Отсюда находим

$$\int_{a_1 x}^{a_1^2 x} P^+(u) du > h_0 a_1^{3/2} x^{3/2} (\ln(a_1 x))^{-1} > \frac{\sqrt{a_1} x^{3/2}}{\ln a_1 + \ln x} > x^{3/2} (\ln x)^{-1}.$$

Тем самым утверждение 3 теоремы 14 доказано, и, следовательно, теорема 14 доказана полностью.

Из теоремы 14 легко получить следствие 11. Неравенства (19.2) и (20.2) вытекают из (17.2) и непосредственно проверяемых оценок $K(1, 2) > 0.6$, $K(2) > 0.85$. (Напомним, что $\omega < 0.0456$. Это было отмечено в § 2 перед формулировкой теоремы 13.) Неравенство (21.2) является тривиальным следствием (20.2), а утверждение 2 теоремы 14 немедленно влечет за собой (22.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. Рассмотрим сначала самый простой случай: $\Theta > 1/2$ является достижимым. Из (1) и леммы 1 находим

$$(83.4) \quad P(u) = \frac{R(u)}{\ln u} + O_\Theta\left(\frac{u^\Theta}{\ln^2 u}\right).$$

Следовательно, при любом $a > 1$ из (83.4) и теоремы 8 получаем

$$\begin{aligned} \int_x^{ax} |P(u)| du &= \int_x^{ax} \frac{|R(u)|}{\ln u} du + O_\Theta\left(\frac{x^{1+\Theta}}{\ln^2 x}\right) \\ &\geq (\ln ax)^{-1} \int_x^{ax} |R(u)| du - c_{64} x^{1+\Theta} (\ln^{-2} x) \\ &\geq c_{16} (\ln ax)^{-1} x^{1+\Theta} - c_{64} x^{1+\Theta} \ln^{-2} x > c_{22} x^{1+\Theta} (\ln^{-1} x) \end{aligned}$$

при $x > c_{24}$. Неравенство (16.2) доказано.

Теперь пусть $\Theta > 1/2$ недостижимо. Обозначим

$$B(x) = \frac{R(x)}{\ln x}, \quad \mathcal{P}(x) = B(x) + \int_2^x \frac{B(t) dt}{t \ln t}.$$

⁹Если $0 < q < 0.1$, то $\operatorname{sh}(3q/2) < (7/4)q$.

Поскольку $P(x) = \mathcal{P}(x) + O(\sqrt{x}/\ln x)$, $x \geq 2$, достаточно доказать, что при любых $a > 1, \varepsilon > 0$ и $x > x_3(a, \varepsilon)$ справедливо неравенство

$$(84.4) \quad \int_x^{ax} |\mathcal{P}(u)| du > x_n^{1+\Theta-\varepsilon}.$$

Доказательство поведем от противного. Предположим, что сформулированное нами только что утверждение неверно. Это означает, что существуют $\delta > 0, a > 1$ и последовательность $x_n \rightarrow +\infty$ такие, что

$$(85.4) \quad \int_{x_n}^{ax_n} |\mathcal{P}(u)| du \leq x_n^{1+\Theta-\delta}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \int_2^{x_n} \frac{B(t)}{t \ln t} dt &= \mathcal{D}_n, \quad \varphi_n(x) = \frac{\mathcal{D}_n \ln x_n}{\ln x}, \\ B_n(x) &= B(x) + \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Легко сообразить, что имеет место равенство

$$(86.4) \quad \mathcal{P}(u) = B_n(u) + \int_{x_n}^u \frac{B_n(t)}{t \ln t} dt, \quad u > x_n.$$

Обозначим

$$\beta_n(u) = \int_{x_n}^u \frac{B_n(t)}{t \ln t} dt, \quad K_n = \{(u, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n \leq u \leq ax_n, x_n \leq t \leq u\}$$

и оценим сверху

$$I_n = \int_{x_n}^{ax_n} |\beta_n(u)| du.$$

Имеем:

$$(87.4) \quad \begin{aligned} I_n &\leq \int_{x_n}^{ax_n} \int_{x_n}^u \frac{|B_n(t)|}{t \ln t} dt du = \iint_{K_n} \frac{|B_n(t)|}{t \ln t} dt du \\ &= \int_{x_n}^{ax_n} \frac{|B_n(t)|(ax_n - t)}{t \ln t} dt \leq \frac{a-1}{\ln x_n} \int_{x_n}^{ax_n} |B_n(t)| dt. \end{aligned}$$

Из (86.4) и (87.4) находим, что при $n > n_0$

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{ax_n} |\mathcal{P}(u)| du &\geq \frac{1}{2} \int_{x_n}^{ax_n} |B_n(t)| dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_n}^{ax_n} \left| \frac{R(t) + \mathcal{D}_n \ln x_n}{\ln t} \right| dt \\ &\geq \frac{1}{2 \ln(ax_n)} \int_{x_n}^{ax_n} |R(t) + k_n| dt, \end{aligned}$$

где $k_n = \mathcal{D}_n \ln x_n$. Очевидно, что если f — произвольная функция, интегрируемая по Лебегу на множестве конечной меры $\omega \subset \mathbb{R}$, то

$$\inf_{k \in \mathbb{R}} \|f + k\|_{L(\omega)} \geq \min(\|f^+\|_{L(\omega)}, \|f^-\|_{L(\omega)}).$$

Ввиду сказанного заключаем, что при $n > n_1 > n_0$ справедлива оценка

$$\int_{x_n}^{ax_n} |\mathcal{P}(u)| du \geq 0.4(\ln x_n)^{-1} \min\left(\int_{x_n}^{ax_n} R^+(u) du, \int_{x_n}^{ax_n} R^-(u) du\right).$$

Согласно теореме 10 в случае недостижимого Θ при $x > x_1(\delta/2, a)$

$$\int_x^{ax} R^+(u) du > x^{1+\Theta-\delta/2}, \quad \int_x^{ax} R^-(u) du > x^{1+\Theta-\delta/2}.$$

Следовательно, при $n > n_2 > n_1$

$$\int_{x_n}^{ax_n} |\mathcal{P}(u)| du > x_n^{1+\Theta-\delta},$$

а это противоречит предположению (85.4). Тем самым (84.4), а значит, и (20.2) доказано. Из (21.2), (20.2) и (18.2) при $x > c_{19}$ получаем оценку

$$\int_x^{2x} |P(u)| du > x^{3/2}(\ln x)^{-1}$$

вне зависимости от значения Θ . Если проследить доказательство теоремы 14 и следствия 11, то видно, что в случае $\Theta = 1/2$ постоянная c_{19} является эффективной. Теорема 12 полностью доказана.

§ 5. Доказательства теорем 15–19

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 18. Согласно определению $R, R_0, \mathcal{F}$, (37.2) и (38.3) при $x \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} (1.5) \quad \int_x^{x+vx} R^2(u) du &= \int_x^{x+vx} R_0^2(u) du = \int_x^{x+vx} (\mathcal{F}(u) + O(1))^2 du \\ &\leq 2 \int_x^{x+vx} \mathcal{F}^2(u) du + O\left(\int_x^{x+vx} du\right) \\ &\leq 2 \int_x^{x+vx} \mathcal{F}^2(u) du + c_{65}vx. \end{aligned}$$

Интегрируя почленно возведенный в квадрат ряд (37.2) для $\mathcal{F}(u)$,¹⁰ получаем¹¹

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad \frac{1}{x^2} \int_x^{x+vx} \mathcal{F}^2(u) du &= \frac{1}{x^2} \int_x^{x+vx} \sum_{\rho_1} \sum_{\rho_2} \frac{u^{1+i(\gamma_1+\gamma_2)}}{\rho_1 \rho_2} du \\
 &= \frac{1}{x^2} \sum_{\rho_1} \sum_{\rho_2} \frac{(x+vx)^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)} - x^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)}}{\rho_1 \rho_2 (2+i(\gamma_1+\gamma_2))} \\
 &\leq \sum_{\rho_1} \sum_{\rho_2} \frac{|(1+v)^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)} - 1|}{|\rho_1 \rho_2| \sqrt{4 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2}} := \sigma(v).
 \end{aligned}$$

В свете введенного обозначения осталось доказать, что при $v \in (0, 1/3)$

$$(3.5) \quad \sigma(v) = O(v \ln^4 v).$$

Положим $T = [1/v]$ и разобьем двойной ряд $\sigma(v)$ на “начало” и “остаток”:

$$\begin{aligned}
 \sigma(v) &= \sigma_1(v) + \sigma_2(v), \\
 \sigma_1(v) &= \sum_{|\gamma_1| \leq T} \sum_{|\gamma_2| \leq T} \frac{|(1+v)^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)} - 1|}{|\rho_1 \rho_2| \sqrt{4 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2}}, \\
 \sigma_2(v) &= \sigma(v) - \sigma_1(v).
 \end{aligned}$$

Начало ряда оценим, пользуясь неравенствами ($s = 1 + i(\gamma_1 + \gamma_2)$, $0 < v < 1$)

$$\left| \frac{(1+v)^{s+1} - 1}{s+1} \right| = \left| \int_0^v (1+t^s) dt \right| \leq v(1+v)^{\operatorname{Re} s} = v(1+v) < 2v.$$

Получаем

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad \sigma_1(v) &\leq 2v \sum_{|\gamma_1| \leq T} \sum_{|\gamma_2| \leq T} \frac{1}{|\rho_1 \rho_2|} \\
 &= 2v \left(\sum_{|\gamma| \leq T} |\rho|^{-1} \right)^{-2} = O(v \ln^4 T) = O(v \ln^4 v).
 \end{aligned}$$

Теперь оценим остаток ряда. Воспользуемся очевидным представлением

$$(5.5) \quad \sigma_2(v) = \sum_{N=T}^{\infty} A(N),$$

где

$$A(N) = \sum_{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Pi(N)} \frac{|(1+v)^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)} - 1|}{|\rho_1 \rho_2| \sqrt{4 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2}},$$

¹⁰Законность этой операции была обоснована в доказательстве теоремы 1.

¹¹Здесь мы снова, как и в доказательстве теоремы 1, нетривиальные нули $\zeta(s)$ не нумеруем, а через ρ_1 и ρ_2 обозначаем соответственно первую и вторую компоненты декартова квадрата множества $\{\rho\}$.

$\Pi(N) = K_{N+1} \setminus K_N$, а K_r – квадрат в $\mathbb{R}^2$ следующего вида: $K_r = [-r, r] \times [-r, r]$. $\Pi(N)$, в свою очередь, разобьем на квадратики со сторонами длины 1, параллельными координатным осям. В суммах $A(N)$ тривиально оценим числитель:

$$|(1+v)^{2+i(\gamma_1+\gamma_2)} - 1| \leq (1+v)^2 + 1 < 3.$$

Из соображений симметрии ясно, что суммы от $|\rho_1 \rho_2|^{-1} (4 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2)^{-1/2}$ по любому из четырех рядов квадратов (верхнему и нижнему горизонтальным, левому и правому вертикальным) совпадают между собой. Поэтому

$$(6.5) \quad A(N) < 12B(N),$$

где

$$B(N) = \sum_{m=-1-N}^N \sum_{(\gamma_1, \gamma_2) \in q_m} \frac{1}{|\rho_1 \rho_2| \sqrt{4 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2}},$$

$$q_m = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N < y_1 < N+1, m \leq y_2 < m+1\}.$$

Количество элементов последовательности (γ_1, γ_2) в квадрате q_m составляет $O(\ln N \cdot \ln m)$, если $|m| \geq 14$, и равно нулю, если $|m| < 14$. К тому же $|\rho_1| > N$. Ввиду сказанного приходим к оценкам

$$(7.5) \quad B(N) < \frac{\ln N}{N} \sum_{14 \leq |m| \leq N+1} \frac{\ln m}{m \cdot |\max(2, N+m)|}$$

$$< \frac{2 \ln N}{N} \left(\frac{\ln N}{N} + \sum_{m=14}^{N-1} \frac{\ln m}{m(N-m)} \right) < c_{66} \frac{\ln^3 N}{N^2}.$$

Из (5.5)–(7.5) находим

$$(8.5) \quad \sigma_2(v) \leq c_{67} T^{-1} \ln^3 T.$$

Из (1.5)–(4.5) и (8.5) получаем (32.2). Оценка (33.2) сразу же получается из (32.2) с помощью неравенства Коши–Буняковского:

$$|R_1(x, H(x))| \leq (H(x))^{-1} \int_x^{x+H(x)} |R(u)| du$$

$$\leq (H(x))^{-1} \left(\int_x^{x+H(x)} R^2(u) du \right)^{1/2} \cdot \left(\int_x^{x+H(x)} du \right)^{1/2}$$

$$= O(H(x))^{-1} \sqrt{x H(x) \ln^4 \left(\frac{x}{H(x)} \right)} \sqrt{H(x)}$$

$$= O \left(\sqrt{x} \ln^2 \left(\frac{x}{H(x)} \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 19 поведем от противного. Допустим, что существует некоторая функция $H(x)$, $1 \leq H(x) = o(x)$ ($x \rightarrow +\infty$), такая, что выражение

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{x} H(x)} \int_x^{x+H(x)} R(u) du$$

ограничено либо сверху, либо снизу. Мы разберем случай ограниченности $E(x)$ сверху. Неограниченность снизу $E(x)$ доказывается совершенно аналогично.

Итак, предположим, что существует постоянная $K \geq 1$ такая, что при любых $x > 2$

$$(9.5) \quad \int_x^{x+H(x)} R(u) du < K\sqrt{x} H(x).$$

Положим

$$h = \min(c_{53}, \exp(-20K - 10c_{52})),$$

где c_{52} , c_{53} — постоянные лемм 8 и 9 соответственно. По лемме 9 существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ такая, что выполнены неравенства

$$(10.5) \quad S(t_n, h) < 0.1 \ln h \leq -2K - c_{52}.$$

Обозначим $z_n = \exp(t_n)$. Лемма 8 вместе с (10.5) дает

$$\frac{1}{2hz_n^{3/2}} \int_{z_n e^{-h}}^{z_n e^h} R(u) du > 4K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Полагая $z_n e^{-h} = x_n$, $\alpha = e^{2h} - 1$ (ясно, что $2h > 3\alpha/4$), получаем

$$(11.5) \quad \int_{x_n}^{x_n + \alpha x_n} R(u) du > 3K\alpha x_n^{3/2}.$$

Покажем, что оценки (11.5) и (9.5) при больших x_n несовместны. Получившееся противоречие и будет означать неограниченность сверху функции $x^{-1/2} R_1(x, H(x))$.

Зададим рекуррентно последовательности чисел $x_{k,n}$. Положим

$$(12.5) \quad x_{0,n} = x_n, \quad x_{k+1,n} = x_{k,n} + H(x_{k,n}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть N — такой номер, что

$$x_{N,n} \leq x_n + \alpha x_n < x_{N+1,n}.$$

Он обязательно существует, так как $H(x) \geq 1$, и, следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,n} = +\infty$. Из (9.5) находим

$$(13.5) \quad \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} R(u) du = \int_{x_{k,n}}^{x_{k,n} + H(x_{k,n})} R(u) du < K\sqrt{x_{k,n}} H(x_{k,n}).$$

Но, так как при $k \leq N$ имеем $x_{k,n} \leq x_n + \alpha x_n < 2x_n$, то $\sqrt{x_{k,n}} \leq \sqrt{2x_n}$, $0 \leq k \leq N-1$, и, складывая неравенства (13.5), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
 (14.5) \quad \int_{x_n}^{x_{N,n}} R(u) du &< \sqrt{2x_n} K \sum_{k=0}^{N-1} H(x_{k,n}) \\
 &= \sqrt{2x_n} K \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1,n} - x_{k,n}) \\
 &= \sqrt{2x_n} K (x_{N,n} - x_{0,n}) \leq \alpha x_n \sqrt{2x_n} K.
 \end{aligned}$$

Обозначим $v_n = (x_n + \alpha x_n - x_{N,n})/x_{N,n}$. Из (13.5) следует, что $v_n < H(x_{N,n})/x_{N,n}$. Применяя теорему 18, находим

$$\begin{aligned}
 (15.5) \quad \left| \int_{x_{N,n}}^{x_n + \alpha x_n} R(u) du \right| &= \left| \int_{x_{N,n}}^{x_{N,n} + v_n x_{N,n}} R(u) du \right| \\
 &= O(x_n^{3/2} v_n \ln^2 v_n) = o(x_n^{3/2}) \quad (n \rightarrow +\infty),
 \end{aligned}$$

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

Вследствие (14.5) и (15.5) при достаточно больших n получаем неравенство

$$\int_{x_{N,n}}^{x_n + \alpha x_n} R(u) du < 2K\alpha x_n^{3/2},$$

которое противоречит (11.5). Как отмечалось выше, это доказывает неограниченность сверху $x^{-1/2} R_1(x, H(x))$. Неограниченность снизу этой функции доказывается совершенно аналогично. Нужно лишь вместо оценки сверху $S(y_2, h)$ воспользоваться оценкой снизу $S(y_1, h)$ из леммы 9. Теорема 19 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 17. Сначала с помощью леммы 8 перепишем утверждение теоремы 17 в более удобном для доказательства виде. Положим

$$z = \sqrt{x(x + H(x))}, \quad h_0 = h_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{H(x)}{x} \right).$$

Тогда $z \exp(-h_0) = x$, $z \exp(h_0) = x + H(x)$. По лемме 8

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2h_0 z^{3/2}} \int_{z \exp(-h_0)}^{z \exp(h_0)} R(u) du \\
 &= \frac{H(x)/x}{\ln(1 + H(x)/x)} \cdot x^{-1/2} (1 + H(x)/x)^{-3/4} \frac{1}{H(x)} \int_x^{x+H(x)} R(u) du \\
 &= \frac{(1 + o(1))}{\sqrt{x}} R_1(x, H(x)).
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (67.4) находим (определение функции S см. в (66.4))

$$R_1(x, H(x)) = \sqrt{x} (1 + o(1)) (S(\ln z, h_0) + O(1)).$$

Поэтому требуется доказать, что

$$(16.5) \quad S(y, a(y)) = \Omega_{\pm}(\ln(a(y))),$$

где

$$y = \ln z, \quad a(y) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{H(x)}{x} \right) \sim \frac{1}{(2V(x))} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Из условий, наложенных на функцию H , получим условия на функцию a :

$$(17.5) \quad a(y) \searrow 0 \quad (y \rightarrow +\infty), \quad a \in C^1(y(x_0), +\infty),$$

$$(18.5) \quad \begin{aligned} \frac{da}{dy} &= \frac{da}{dx} \frac{dx}{dy} = \frac{da}{dx} \frac{dx}{dz} \frac{dz}{dy} = O\left(\frac{1}{x \ln x}\right) (1 + o(1)) e^y \\ &= O(1/\ln x) = O(1/y) \quad (y \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

$$(19.5) \quad \begin{aligned} \ln \frac{1}{a(y^2)} &= \ln \frac{1}{a(z^{\ln z})} = \ln V(z^{\ln z}) \\ &= O(\ln V(z)) = O(\ln(1/a(y))). \end{aligned}$$

Итак, осталось доказать $\Omega_{\pm}$ -оценку (16.5) для любой функции $a(y)$, удовлетворяющей условиям (17.5)–(19.5). Положим

$$T(h) = h^{-1} \ln(1/h), \quad h(Y) = \sqrt{a(Y)}.$$

При $Y > x_4 > x_3$ ввиду (17.5) имеем $h(Y) < c_{52}$. Поэтому согласно неравенствам, доказанным в лемме 9, для любых $Y > x_4$ и $h = h(Y)$ найдутся числа $y_1, y_2 \in [Y, Y \exp(h^{-1} \ln^{2.5}(1/h))]$, для которых

$$(20.5) \quad \begin{aligned} S_1(y_1, h) &> 0.1 \ln(1/h), \\ S_1(y_2, h) &< 0.1 \ln h. \end{aligned}$$

Из (20.5) несложно вывести, что при $Y > x_5 > x_4$

$$(21.5) \quad \begin{aligned} S_2(y_1, a(y), h) &> \frac{1}{30} \ln \left(\frac{1}{a(Y)} \right), \\ S_2(y_2, a(y), h) &< \frac{1}{30} \ln(a(Y)), \end{aligned}$$

где

$$S_2(y_1, a(y), h) = \sum_{0 < \gamma < T(h)} \frac{\sin \gamma y}{\gamma} \frac{\sin \gamma h}{\gamma h} \frac{\sin \gamma a(y)}{\gamma a(y)}.$$

(Напомним, что здесь $h = \sqrt{a(Y)}$.) Действительно, при $|z| < 1$ имеем $1 - (\sin z)/z = O(z^2)$, а если $\gamma \in [0, T(h(Y))]$ и $y \geq Y$, то

$$0 < \gamma a(y) < T(h(Y))a(Y) = O(\sqrt{a(Y)} \ln(1/a(Y))).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 (22.5) \quad |S_1(y, h) - S_2(y, a(y), h)| &= O\left(a(Y) \ln^2(1/a(Y)) \sum_{0 < \gamma < T(h)} \left| \frac{\sin \gamma y}{\gamma} \frac{\sin \gamma h}{\gamma h} \right| \right) \\
 &= O\left(a(Y) \ln^2(a(Y)) \sum_{0 < \gamma < T(h)} \gamma^{-1}\right) \\
 &= O(a(Y) \ln^4(a(Y))) = o(1) \quad (y \geq Y \rightarrow +\infty).
 \end{aligned}$$

Тем самым из (20.5) и (22.5) следуют неравенства (21.5) при $Y > x_5$.

Теперь покажем, что $S_2(y, a(y), h)$ “мало отличается” от среднего для функции $S(t, a(t))$ на отрезке $[y - h, y + h]$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 (23.5) \quad \frac{1}{2h} \int_{y-h}^{y+h} S(t, a(t)) dt &= \frac{1}{2h} \sum_{\gamma > 0} \int_{y-h}^{y+h} \frac{\sin \gamma t}{\gamma} \frac{\sin \gamma a(t)}{\gamma a(t)} dt \\
 &= \frac{1}{2h} \sum_{\gamma > 0} \frac{\sin \gamma a(y)}{\gamma a(y)} \int_{y-h}^{y+h} \frac{\sin \gamma t}{\gamma} dt \\
 &\quad + \frac{1}{2h} \sum_{\gamma > 0} \int_{y-h}^{y+h} \frac{\sin \gamma t}{\gamma} \left(\frac{\sin \gamma a(t)}{\gamma a(t)} - \frac{\sin \gamma a(y)}{\gamma a(y)} \right) dt \\
 &= S_3(y, a(y), h) + O(S_4(y, a(y), h)),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 S_3(y, a(y), h) &= \sum_{\gamma > 0} \frac{\sin \gamma y}{\gamma} \frac{\sin \gamma h}{\gamma h} \frac{\sin \gamma a(y)}{\gamma a(y)}, \\
 S_4(y, a(y), h) &= h^{-1} \sum_{\gamma > 0} \gamma^{-1} \int_{y-h}^{y+h} \left| \frac{\sin \gamma a(t)}{\gamma a(t)} - \frac{\sin \gamma a(y)}{\gamma a(y)} \right| dt.
 \end{aligned}$$

Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 9, получаем соотношение

$$(24.5) \quad S_2(y, a(y), h) - S_3(y, a(y), h) = O(1).$$

Оценим сумму S_4 . С этой целью разобьем ее на две части:

$$S_4 = S_5 + S_6, \quad \text{где} \quad S_5 = \sum_{\gamma \leq a^{-2}(y)}, \quad S_6 = \sum_{\gamma > a^{-2}(y)}.$$

В сумме S_6 оценим интеграл тривиально:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2h} \int_{y-h}^{y+h} \left| \frac{\sin \gamma t}{\gamma} - \frac{\sin \gamma a(y)}{\gamma a(y)} \right| dt &\leq \max_{t \in [y-h, y+h]} \left| \frac{\sin \gamma a(t)}{\gamma a(t)} - \frac{\sin \gamma a(y)}{\gamma a(y)} \right| \\
 &\leq \frac{2}{\gamma a(y+h)} < \frac{2}{\gamma a(y+1)}.
 \end{aligned}$$

Поэтому¹²

$$(25.5) \quad S_6 \leq \frac{4}{a(y+1)} \sum_{\gamma > a^{-2}(y)} \gamma^{-2} \\ = O\left(\frac{a^2(y) \ln(1/a(y))}{a(y+1)}\right) = o\left(\frac{a(y)}{a(y+1)}\right) = o(1) \quad (y \rightarrow +\infty).$$

В сумме S_5 для $f(t) = f_\gamma(t) = \frac{\sin \gamma a(t)}{\gamma a(t)}$ оценим интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} h^{-1} \int_{y-h}^{y+h} |f(t) - f(y)| dt &\leq h^{-1} \int_{y-h}^{y+h} |(t-y) f'(\xi(t, y))| dt \\ &\leq \max_{u \in [y-h, y+h]} |f'(u)| \cdot h^{-1} \int_{y-h}^{y+h} |t-y| dt \\ &= h \cdot \max_{u \in [y-h, y+h]} |f'(u)|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(26.5) \quad S_5 \leq h \sum_{0 < \gamma < a^{-2}(y)} \gamma^{-1} \max_{u \in [y-h, y+h]} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin \gamma a(t)}{\gamma a(t)} \right).$$

Так как

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \leq \min(\alpha, 2/\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

и, как уже отмечалось, справедливы соотношения

$$a(u) \sim a(y), \quad u \in [y-h, y+h], \quad a'(u) = O(1/u),$$

то из (26.5) с учетом (18.5) и (36.2) получаем оценки

$$(27.5) \quad S_5 = O\left(hy^{-1} \sum_{0 < \gamma < a^{-2}(y)} \min(\gamma a(y), 1/(\gamma a(y)))\right) \\ = O\left(hy^{-1} \frac{\ln(1/a(y))}{a(y)}\right) = o(y^{-1} \ln y \ln \ln y) = o(1) \quad (y \rightarrow +\infty).$$

Из (23.5)–(25.5) и (27.5) находим

$$(28.5) \quad S_2(y, a(y), h) = \frac{1}{2h} \int_{y-h}^{y+h} S(t, a(t)) dt + O(1), \quad y \geq Y.$$

Соотношения (22.5) и (28.5) позволяют заключить, что

$$(29.5) \quad \begin{aligned} S(t, a(t)) &= \Omega_\pm \ln(a(Y)), \\ t &\in [Y - h(Y), h(Y) + Y \exp(h^{-1}(Y)) \ln^{2.5}(h^{-1}(Y))]. \end{aligned}$$

Но, исходя из выбора $h(Y)$ и неравенства $a(Y) \geq 1/4 \ln Y$, нетрудно проверить, что правый конец промежутка (29.5) не превосходит Y^2 , а ввиду (19.5) и монотонности $a(t)$ при $t \in [Y, Y^2]$ имеем $\ln(a(t)) \asymp \ln(a(Y))$. Поэтому

$$S_2(t, a(t)) = \Omega_\pm \ln(a(t)),$$

а это доказывает теорему 17.

¹²Из (17.5)–(18.5) легко следует, что $\lim_{y \rightarrow +\infty} (a(y)/a(y+1)) = 1$.

ЛЕММА 10. Обозначим $A(x) = \int_x^{2x} R(u) du$. Тогда

$$\begin{aligned} A(x) &= \Omega_{\pm}(x^{1+\Theta-\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0, \\ A(x) &= \Omega_{\pm}(x^{1+\Theta}), \quad \text{если } \Theta \text{ достижимо.} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно [16, с. 50] интегральное представление

$$(30.5) \quad -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} = \int_1^{+\infty} R(u)u^{-s-1} du, \quad \operatorname{Re} s > \Theta.$$

Произведя в правой части (30.5) интегрирование по частям, приходим к соотношению $\left(R_1(u) = \int_1^u R(t) dt\right)$

$$(31.5) \quad \int_1^{+\infty} R_1(u)u^{-s-2} du = -\frac{1}{s+1} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} \right), \quad \operatorname{Re} s > \Theta.$$

Поскольку $A(x) = R_1(2x) - R(x)$, из (32.2) получаем аналитическое выражение для преобразования Меллина функции $A(u)$:

$$\begin{aligned} (32.5) \quad f(s) &= \int_1^{+\infty} A(u)u^{-s-2} du \\ &= \int_{1/2}^{+\infty} R_1(2u)u^{-s-2} du - \int_1^{+\infty} R_1(u)u^{-s-2} du - \int_{1/2}^1 R_1(2u)u^{-s-2} du \\ &= -\frac{2^{s+1}-1}{s+1} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} \right) + \text{целая функция.} \end{aligned}$$

Таким образом, $f(s)$ – преобразование Меллина функции $A(u)$ – регулярно на луче $(0, +\infty)$ и все особые точки $f(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ – изолированные, совпадают с нулями $\zeta(s)$ и являются полюсами. Воспользуемся теперь одной известной тауберовой теоремой.

Пусть $g(x)$ – всюду конечная измеримая действительнoзначная функция на $[1, +\infty)$, $g(x) = O(x^\lambda)$ ($x \geq 1$), где λ – некоторая постоянная. Пусть затем преобразование Меллина функции g

$$G(s) = \int_1^{+\infty} g(x)x^{-s-1} dx$$

имеет в $\mathbb{C}$ полюс в точке $s = \beta + i\gamma$, $\gamma \neq 0$, и регулярно на луче $[\beta, +\infty)$. Тогда

$$g(x) = \Omega_{\pm}(x^\beta) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Из этой теоремы и представления (32.5) без труда получаем утверждение леммы 10.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 16.

I. $\Theta = 1/2$. Идея доказательства очень проста. Предположив, что либо

$$(33.5) \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{R_1(x, H(x))}{\sqrt{x} \ln \ln \ln x} \leq 0,$$

либо

$$(34.5) \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R_1(x, H(x))}{\sqrt{x} \ln \ln \ln x} \geq 0,$$

мы для функции $H_0(x) = x/\sqrt{\ln \ln x}$ из (33.5) получим

$$(35.5) \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{R_1(x, H_0(x))}{\sqrt{x} \ln \ln \ln x} \leq 0,$$

а из (34.5) находим, что

$$(36.5) \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{R_1(x, H_0(x))}{\sqrt{x} \ln \ln \ln x} \geq 0.$$

Но, применив к $R_1(x, H_0(x))$ теорему 17 (функция H_0 удовлетворяет всем условиям этой теоремы), убеждаемся в том, что оба соотношения (35.5) и (36.5) неверны. Значит, неверны и соотношения (33.5) и (34.5). Это и означает справедливость $\Omega_{\pm}$ -оценки (29.2).

Установим справедливость импликации (33.5) $\Rightarrow$ (35.5). С каждым $x > x_0$ свяжем последовательность чисел $a_n(x)$:

$$a_0(x) = x, \quad a_n(x) = a_{n-1}(x) + H(a_{n-1}(x)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $N = N(x)$ – номер, для которого выполнено неравенство

$$a_N(x) \leq x + H_0(x) < a_{N+1}(x).$$

Ввиду (33.5) найдется монотонно стремящаяся к нулю положительная функция $\varepsilon(z)$ такая, что

$$(37.5) \quad \int_z^{z+H(z)} R(u) du < \varepsilon(z) \sqrt{z} H(z) \ln \ln \ln z.$$

Применяя (37.5) к $z = a_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, находим

$$\begin{aligned} \int_{a_k(x)}^{a_{k+1}(x)} R(u) du &< \varepsilon(a_k(x)) \sqrt{a_k(x)} H(a_k(x)) \ln \ln \ln(a_k(x)) \\ &= (a_{k+1}(x) - a_k(x)) O(\varepsilon(x) \sqrt{x} \ln \ln \ln x). \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получим

$$(38.5) \quad \int_x^{a_N(x)} R(u) du = o(\sqrt{x} H_0(x) \ln \ln \ln x) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Осталось оценить интеграл $R(u)$ по “короткому” отрезку $[a_N(x), x + H_0(x)]$. Его длина $l(x)$ меньше, чем $H(a_N(x)) \leq H(2x)$. По теореме 18

$$(39.5) \quad \int_{a_N(x)}^{x+H_0(x)} |R(u)| du = O(x^{3/2} \varphi(x/l(x))),$$

где $\varphi(t) = t^{-1} \ln^2 t$. Так как $\varphi(t)$ убывает при $t \geq e^2$, то вместо $x/l(x)$ при больших x в (39.5) можно поставить оценку снизу этой величины: $x/l(x) \geq x/H(2x) \geq c_{58} \ln \ln(2x)$. Поэтому

$$(40.5) \quad \begin{aligned} \int_{a_N(x)}^{x+H_0(x)} |R(u)| du &= O(x^{3/2} (\ln \ln(2x))^{-1} (\ln \ln \ln(2x))^2) \\ &= o(\sqrt{x} H_0(x) \ln \ln \ln x). \end{aligned}$$

Из (38.5) и (40.5) получаем (35.5). Импликация (34.5) $\Rightarrow$ (36.5) доказывается совершенно аналогично.

II. $\Theta > 1/2$ достижимо. Как и выше, положим

$$(41.5) \quad a_0(x) = x, \quad a_n(x) = a_{n-1}(x) + H(a_{n-1}(x)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Но здесь через $N = N(x)$ обозначим номер, для которого выполнено неравенство $a_N(x) \leq 2x < a_{N+1}(x)$. Из теоремы 2 находим

$$(42.5) \quad \begin{aligned} \int_{a_N(x)}^{2x} |R(u)| du &= O(x^\Theta (2x - a_N(x))) = O(x^\Theta H(a_N(x))) \\ &= o(x^\Theta a_N(x)) = o(x^{1+\Theta}) \quad (x \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Предположив, что $\limsup_{x \rightarrow +\infty} x^{-\Theta} R_1(x, H(x)) \leq 0$, получим, что существует монотонно стремящаяся к нулю положительная функция $\varepsilon(x)$, для которой справедливо неравенство

$$\int_x^{x+H(x)} R(u) du \leq \varepsilon(x) x^\Theta H(x), \quad x > x_0.$$

Поэтому

$$(43.5) \quad \begin{aligned} \int_{a_k(x)}^{a_{k+1}(x)} R(u) du &\leq (a_{k+1}(x) - a_k(x)) \varepsilon(x) (a_k(x))^\Theta \\ &\leq (a_{k+1}(x) - a_k(x)) \varepsilon(x) (2x)^\Theta. \end{aligned}$$

Складывая неравенства (43.5), находим

$$(44.5) \quad \begin{aligned} \int_x^{a_N(x)} R(u) du &\leq (a_N(x) - a_0(x)) \varepsilon(x) (2x)^\Theta \\ &\leq 2x^{1+\Theta} \varepsilon(x) = o(x^{1+\Theta}) \quad (x \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Из (42.5) и (44.5) получаем импликацию

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} x^{-\Theta} R_1(x, H(x)) \leq 0 \implies \limsup_{x \rightarrow +\infty} x^{-1-\Theta} A(x) \leq 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} x^{-\Theta} R_1(x, H(x)) \geq 0 \implies \liminf_{x \rightarrow +\infty} x^{-1-\Theta} A(x) \geq 0.$$

Но согласно лемме 10 правые части этих импликаций неверны. Следовательно, неверны посылки. Это и означает, что $R_1(x, H(x)) = \Omega_{\pm}(x^{\Theta})$. Теорема 16 полностью доказана.

Из теоремы 16 заключаем, что теорему 15 осталось доказать только в случае, когда Θ недостижимо. Снова, так же как и в (41.5), определим $a_k(x)$, $1 \leq k \leq N+1$. Предположив, что

$$\int_x^{x+H(x)} R(u) du \leq \varepsilon(x) \sqrt{x} H(x) \ln \ln \ln x \quad (x > x_0),$$

где $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ (и, следовательно, можно без ограничения общности считать, что $\varepsilon(x) \downarrow 0$), получаем тем же техническим приемом, что и ранее,

$$(45.5) \quad \int_x^{a_N(x)} R(u) du = o(x^{3/2} \ln \ln \ln x) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Пользуясь абсолютной оценкой $R(u)$ из теоремы 2, находим

$$(46.5) \quad \int_{a_N(x)}^{2x} |R(u)| du = o(x^{\Theta} H(a_N(x))) = o(x^{1+\Theta-\delta}).$$

Возьмем теперь $\varepsilon = \min(\delta/2, \Theta/2 - 1/4)$. Ясно, что из (45.5) и (46.5) следуют импликации

$$(47.5) \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} x^{-1/2-\varepsilon} R_1(x, H(x)) \leq 0 \implies \limsup_{x \rightarrow +\infty} x^{\varepsilon-1-\Theta} A(x) \leq 0,$$

$$(48.5) \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} x^{-1/2-\varepsilon} R_1(x, H(x)) \geq 0 \implies \liminf_{x \rightarrow +\infty} x^{\varepsilon-1-\Theta} A(x) \geq 0.$$

Согласно лемме 10 правые части (47.5) и (48.5) неверны и, следовательно, неверны посылки этих импликаций. Поэтому

$$R_1(x, H(x)) = \Omega_{\pm}(x^{1/2+\varepsilon}) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x} \ln \ln \ln x).$$

А. Ю. Попов, писавший окончательный вариант этой работы после смерти профессора С.Б. Стечкина, приносит благодарность доктору физико-математических наук С.В. Конягину за прочтение рукописи и ценные замечания, которые помогли значительно улучшить изложение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hadamar J. Sur la distribution des zeros de la fonction $\zeta(s)$ et des consequences arithmetiques // Bull. Soc. Math. France. 1896. V. 24. P. 199–220.
- [2] de la Vallée Poussin Ch. J. Recherches analytiques sur la théorie des nombres. Première partie: la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en générale // Ann. Sci. Bruxells. 1896. V. 20. P. 183–256.
- [3] Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Наука, 1971.
- [4] de la Vallée Poussin Ch. J. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres des nombres premiers inférieurs à une limite donnée // Memories couronnées de l' Acad. Roy. des. de Belgique. 1899–1900. V. 59. № 1.
- [5] Виноградов И. М. Новая оценка $\zeta(1 + it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. № 1. С. 161–164.
- [6] Коробов Н. М. О нулях функции $\zeta(s)$ // ДАН СССР. 1958. Т. 118. С. 431–432.
- [7] Коробов Н. М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения // УМН. 1958. Т. 13. № 4. С. 185–192.
- [8] Walfisz A. Weylsche Exponentialsummen in der neuen Zahlentheorie. Berlin: Verlag der Wissenschaften, 1963.
- [9] Arkhipov G., Buriev K. Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neighbourhood of the line $\operatorname{Re} s = 1$ // Integral Transformation and Special Functions. 1993. V. 1. P. 1–7.
- [10] Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
- [11] Карацуба А. А. Распределение простых чисел // УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 81–140.
- [12] Schmidt E. Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze // Math. Ann. 1903. V. 57. P. 195–204.
- [13] Littlewood J. E. Sur la distribution des nombres premiers // Contes Rendus. 1914. V. 158. P. 1869–1872.
- [14] Лаврик А. Ф. Распределение простых чисел // Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Советская энциклопедия, 1984. С. 876–883.
- [15] Landau E. Vorlesungen Über Zahlentheorie. V. 2. Leipzig: Verlag von S. Hirzelin, 1927.
- [16] Ингам А. Е. Распределение простых чисел. М.-Л.: ОНТИ, 1936.
- [17] Cramer H. Some theorems concerning prime numbers // Arkiv för Matematik 1920. V. 15. № 5.
- [18] Cramer H. Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie // Math. Zeitschrift. 1922. V. 12. P. 147–153.
- [19] von Koch H. Sur la distribution de nombres premiers // Acta Math. 1901. V. 24. P. 159–182.
- [20] Kaczorowski J. On sign-changes in the remainder-term of the prime-number formula // Acta Arith. 1984. V. 54. № 4. P. 365–377.
- [21] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
- [22] Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of partitio numerorum III. On the expression of a number as a sum of primes // Acta Math. 1923. V. 44. P. 1–70.
- [23] Попов А. Ю., Стечкин С. Б. Асимптотическое распределение простых чисел в среднем // II-я международная конференция “Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел”. Тезисы докладов. Воронеж, 1995. С. 128.
- [24] Popov A. Yu., Stechkin S. B. Almost periodic functions and the asymptotic distribution of prime numbers // East J. Approx. 1996. V. 2. № 2. P. 143–150.
- [25] Попов А. Ю., Стечкин С. Б. О поведении разности $\psi(x) - x$ // III Международная конференция “Современные проблемы теории чисел и ее приложения”. Тезисы докладов. Тула, 1996. С. 116.
- [26] Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная. М.: Наука, 1967.
- [27] Лаврик А. Ф. Дзета-функция. // Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1984. С. 112–119.
- [28] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: ГТФМЛ, 1961.

- [29] Бредихина Е. А. Почти периодическая функция // Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Советская энциклопедия, 1984. С. 543–545.
- [30] Bezicovitch A. S. Almost periodic functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932.
- [31] Arno S. The imaginary quadratic fields of the class number 4 // Acta. Arith. 1992. V. 60. № 4. P. 321–334.
- [32] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [33] Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
- [34] Прудников А. Ф., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН;
Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
12.09.1996