Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Пионтковский, О рядах Гильберта и соотношениях в алгебрах, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 257–258

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:16:08

О РЯДАХ ГИЛЬБЕРТА И СООТНОШЕНИЯХ В АЛГЕБРАХ

Д. И. Пионтковский

Зафиксируем поле k . Ниже все k -алгебры ассоциативные и *градуированные*, т.е. конечно $\mathbb{Z}_+$ -градуированные с одномерной нулевой компонентой; такая алгебра $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$ называется *стандартной*, если она порождена компонентой A_1 . Для такой алгебры A через $A(x)$ обозначим ее ряд Гильберта $\sum_{i \geq 0} \dim A_i x^i$. Неравенства между степенными рядами понимаются покоэффициентно: запись $\sum_i a_i x^i \geq \sum_i b_i x^i$ означает, что $a_i \geq b_i$ для всех $i \geq 0$.

Пусть A – алгебра, $I \triangleleft A$ – двусторонний идеал, минимальным образом порожденный некоторым множеством однородных элементов $\alpha \subset A$, и $B = A/I$. Пусть $\alpha(x)$ – производящая функция множества α : $\alpha(x) = \sum_{i \geq 0} \#(\alpha \cap A_i) \cdot x^i$. Эта заметка посвящена исследованию следующего вопроса: какова связь между рядами Гильберта алгебр A и B и рядом $\alpha(x)$?

Пусть $C = B * k\langle\alpha\rangle$ – свободное произведение B и свободной алгебры $k\langle\alpha\rangle$. Очевидно, выполняется неравенство рядов Гильберта

$$(1) \quad C(x) \geq A(x).$$

Те множества α , для которых (1) обращается в равенство, называются *сильно свободными* [1]: это некоммутативный аналог хорошо известных в некоммутативной алгебре *регулярных последовательностей* [1], [2].

Вообще говоря, конечно-порожденная алгебра H имеет экспоненциальный рост, и асимптотическое поведение ряда Гильберта $H(x)$ характеризуется *экспонентой роста* $p(H)$: если $r(H)$ – радиус сходимости ряда $H(x)$, то $p(H) = r(H)^{-1}$. Назовем алгебру A *экстремальной*, если $r(A/I) > r(A)$ для любого собственного идеала $I \triangleleft A$.

ТЕОРЕМА 1. (i) *Экстремальные алгебры первичны.*

(ii) *Свободное произведение двух нетривиальных алгебр экстремально.*

(iii) *Если алгебра содержит непустое сильно свободное множество, то она экстремальна.*

Используя теорему 1, можно получить оценку на ряд $\alpha(x)$ и усилить приведенную выше характеристику сильно свободных множеств.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – конечно-порожденная алгебра, B , α – те же, что и раньше. Тогда имеет место неравенство

$$B(r(A)) \cdot \alpha(r(A)) \geq 1,$$

причем следующие условия эквивалентны:

(i) *это неравенство обращается в равенство;*

(ii) $r(A) = r(C)$;

(iii) *множество $\alpha \subset A$ сильно свободно.*

Пусть теперь A – свободная ассоциативная алгебра ранга s со стандартной градуировкой. Тогда подобного рода оценку дает теорема Голода–Шафаревича: из нее, в частности, следует, что при достаточно малом числе соотношений в каждой степени B бесконечномерна [3]. Как показано в [1, theorem 2.6], равенство в неравенстве Голода–Шафаревича

$$B(x)(1 - sx + \alpha(x)) \geq 1$$

равносильно тому, что множество соотношений α сильно свободно.

Пусть идеал I порожден t элементами степени l , т.е. $\alpha = \{f_1, \dots, f_t \mid \deg f_i = l\}$. В этой ситуации В. Е. Говоровым даны следующие оценки на число соотношений t .

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00149).

ТЕОРЕМА 3 [4]. Ряд $B(x) = \sum_{i \geq 0} b_i x^i$ сходится при $x = s^{-1}$. При этом выполняются неравенства

$$(2) \quad t \geq s^l / B(s^{-1})$$

и

$$(3) \quad t \geq (sb_{n-1} - b_n) / b_{n-1} \quad \text{при всех допустимых } n.$$

Оказывается, в обоих случаях равенство равносильно равенству в неравенстве Голода–Шафаревича.

ТЕОРЕМА 4. Следующие условия эквивалентны:

- (i) Множество α сильно свободно.
- (ii) Неравенство (2) обращается в равенство.
- (iii) Неравенство (3) обращается в равенство при всех допустимых n .

Как показал Д. Аник [5], даже при $l = 2$ над полем характеристики нуль для некоторых t и s проблема распознавания сильно свободных множеств α алгоритмически неразрешима. Таким образом, получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\text{char } k = 0$. Для некоторых натуральных чисел s, t не существует алгоритма, который по заданному набору α из t соотношений 2-й степени от s переменных проверял бы равенство $r(C) = s^{-1}$, где C – алгебра с данными соотношениями, порожденная s элементами 1-й степени и t элементами 2-й степени. Кроме того, не существует алгоритма, который проверял бы равенство $B(s^{-1}) = s^2 t^{-1}$, где B – s -порожденная стандартная алгебра с теми же соотношениями.

Тем самым, над полем нулевой характеристики для конечно определенных алгебр проблемы вычисления асимптотики ряда Гильберта или его значения в точке алгебраически неразрешимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Anick D. // J. Algebra. 1982. V. 78. P. 120–140. [2] Голод Е. С. // УМН. 1997. Т. 52. № 4. С. 210–202. [3] Голод Е. С., Шафаревич И. Р. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 2. С. 261–272. [4] Говоров В. Е. // Матем. заметки. 1972. Т. 12. № 2. С. 197–204. [5] Anick D. // Ann. of Math. 1985. V. 122. P. 87–112.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
02.09.1998