Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Балаганский, Л. П. Власов, Проблема выпуклости чебышёвских множеств,
УМН, 1996, том 51, выпуск 6, 125–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1020>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:45:31

УДК 517.98+517.518.826

Посвящается памяти
Сергея Борисовича Стечкина

ПРОБЛЕМА ВЫПУКЛОСТИ ЧЕБЫШЕВСКИХ МНОЖЕСТВ

В. С. Балаганский, Л. П. Власов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	126
§ 1. Справочный материал	127
§ 2. Теоремы для ссылок	131
§ 3. Некоторые результаты	131
Глава I. Характеризация банаховых пространств с помощью соотношений между аппроксимативными свойствами множеств	134
§ 1. Существование, единственность	135
§ 2. Из аппроксимативной компактности — “солнечность”	137
§ 3. Из “солнечности” — аппроксимативная компактность	140
§ 4. Дифференцируемость по направлению градиента достаточна для дифференцируемости по Гато и Фреше	147
§ 5. Множества с выпуклым дополнением	149
Глава II. Структура чебышёвских и близких к ним множеств	151
§ 1. Метод изолированной точки	152
§ 2. Ограничения типа $ \overline{W} < X $	156
§ 3. Случай, когда M локально компактно	163
§ 4. Случай, когда W лежит в гиперплоскости	164
§ 5. Другие случаи	165
Глава III. Избранные результаты	168
§ 1. О некоторых приложениях теории монотонных операторов	168
§ 2. Невыпуклое чебышёвское множество в предгильбертовом пространстве	172
§ 3. Пример В. Кли (дискретное чебышёвское множество)	178
§ 4. Обзор некоторых других результатов	179
Заключение	181
Список литературы	182

Введение

Изучение проблематики чебышёвских множеств в нашей стране началось по инициативе Сергея Борисовича Стечкина. Исследования в области теории приближения функций привели его к вопросу: является ли множество R_m^n рациональных дробей чебышёвским в L_p ($p > 1$)? (Само название “чебышёвские множества” дано С. Б. Стечкиным в честь основателя теории наилучших приближений П. Л. Чебышёва.) Поскольку множество R_m^n невыпукло, ответ виделся отрицательным по крайней мере в L_2 . Так возникла ныне широко известная *проблема выпуклости чебышёвского множества в гильбертовом пространстве*.

С. Б. Стечкин заинтересовал своими идеями выдающегося геометра Н. В. Ефимова, с которым они опубликовали несколько совместных статей [ЕС1]–[ЕС4]. (Имеется также рукопись [ЕС].) Впоследствии, как это часто бывает, выяснилось, что вопрос имеет предысторию, однако участие математиков такого масштаба сильно оживило интерес к этой проблематике и вызвало постоянный рост публикаций.¹ Некоторый итог исследованиям до 1973 г. был подведен в обзорной статье Л. П. Власова [В], написанной по рекомендации С. Б. Стечкина.

Настоящая работа в известном смысле является продолжением этого обзора, но использует также идеи и результаты В. С. Балаганского [9]–[11], [13]. Первые две главы и часть введения были опубликованы малым тиражом в [БВ] (ротапринт).

В главе I рассматриваются соотношения между различными аппроксимативными свойствами множеств и точек (относительно этих множеств), а также характеризуются банаховы пространства в терминах таких соотношений. Многочисленные следствия из теорем содержатся в схемах 1–8.

В главе II изучается строение чебышёвских и близких к ним множеств в предположении, что “почти все” точки, внешние для множества, являются “хорошими” (*δ -солнечными*).

Глава III содержит изложение избранных результатов других авторов (Конягин, Джонсон, Кли и др.), а также результаты, полученные с помощью теории монотонных операторов.

Отметим особенности оформления. В целях экономии места некоторые результаты главы I не формулируются отдельно, но могут извлекаться из схем (диаграмм). Для сокращения формулировок с параллельными утверждениями применяются удлиненные квадратные скобки [...] (ср. [123], [49], [В]). Рубленным шрифтом выделяются

¹ Независимо от Ефимова и Стечкина проблему выпуклости чебышёвских множеств в гильбертовом пространстве сформулировал Кли [В106] (ссылка [В106] означает работу, имеющую номер 106 в списке литературы в [В]). Не так давно в этой проблематике обнаружили еще одного из “отцов церкви” (выражение, иногда употреблявшееся С. Б. Стечкиным): оказалось, что в 1937 г. Манн [98], как и Моцкин [В119], [В120] в 1935-м, рассматривал плоский случай. (Моцкину часто приписывают случай E_n , а он сам [В120] писал о строго выпуклом и гладком пространстве Минковского, однако его доказательства не переносятся автоматически даже на E_3 .) Первым был Бунт [В88], который в своей диссертации (1934 г.) рассматривал несколько более общий случай, чем E_n . Критикос [В111] в 1938 г. независимо от Бунта (но зная о работе Моцкина) доказал выпуклость чебышёвских множеств в E_n . Фактически Ефимов и Стечкин [ЕС2] первыми (1958 г.) опубликовали корректное, хотя и недостаточно полное, доказательство выпуклости чебышёвского компакта в гильбертовом пространстве: Кли [В105] в 1953 г. дал доказательство с ошибкой, а доказательство Фикена 1951 г. было опубликовано лишь в статье Кли [В106] в 1961 г.

обозначения единичных шара и сферы. Мы часто обозначаем формулу не номером, а звездочками (*), (**), если ссылаемся на нее лишь на той же или следующей странице. Ссылка [B106] означает работу, имеющую номер 106 в списке литературы в [B].

Мы благодарны С. В. Конягину за предложение написать статью и поддержку при ее подготовке. Ценную информацию сообщили нам В. В. Васин, Н. В. Величко, А. А. Меленцов, Е. Г. Пыткеев, Ю. А. Шашкин, Н. Berens, D. Braess, B. Brosowski, A. L. Brown, F. Deutsch, J.-B. Hiriart-Urruty, R. Huotari, V. L. Klee, S. Mabizela, P.-L. Papini, Ivan Singer, L. Veselý, U. Westphal, Wu Li и др.

§ 1. Справочный материал

В работе приняты следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ $[\mathbb{R}]$ – множество натуральных [вещественных] чисел;

X – вещественное банахово пространство, как правило, бесконечномерное;

${}^{\circ}A$, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A} = \text{int } A$, ∂A , $\text{co } A$, $\overline{\text{co}} A$, $|A| = \text{card } A$, $\text{diam } A$ – соответственно, дополнение, замыкание, внутренность, граница, выпуклая оболочка, замкнутая выпуклая оболочка, мощность, диаметр множества $A \subset X$;

$B_r x = B(x, r) = \{z \in X : z x \leq r\}$ – шар в X ;

$S_r x = S(x, r) = B_r x \setminus \overset{\circ}{B}_r x$ – сфера;

B, S $[B^*, S^*]$ – единичные шар и сфера в X $[X^*]$;

$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ – отрезок;

$(x, y) = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : 0 < \lambda < 1\}$ – интервал;

$\overrightarrow{xy} = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \geq 0\}$ – луч;

$xy = d(x, y) = \|x - y\|$;

$xA = d(x, A) = \inf\{xy : y \in A\}$ – расстояние от x до $A \subset X$;

$\rho(A, B) = \inf\{xB : x \in A\}$; $d(A, B) = \sup\{xB : x \in A\}$, $d(x, \emptyset) = \rho(A, \emptyset) = \infty$;

$d_M : x \mapsto d_M(x) = xM$ (метрическая функция множества $M \subset X$, функционал наилучшего приближения, функция расстояния);

$P = P_M : x \mapsto Px = \{y \in M : xy = xM\}$ (метрическая проекция, оператор наилучшего приближения);

$P^\delta = P_M^\delta : x \mapsto P^\delta x = \{y \in M : xy \leq xM + \delta\}$ (δ -проекция).

В этой работе множество, подлежащее изучению, всегда обозначается через M ; при этом предполагается, что

$$\emptyset \neq M = \overline{M} \neq X;$$

$\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ – семейство всех таких M ;

$\mathcal{F}_{cc}$ – семейство всех тех $M \in \mathcal{F}$, для которых ${}^{\circ}M$ выпукло.

Пусть $b > 0$. С множеством M мы связываем также следующие множества:

$M_b = \{z \in X : zM \leq b\}$ (b -расширение M);

$Q^b = \{z \in X : zM \geq b\}$;

$\Gamma^b = \{z \in X : zM = b\}$.

Через τ обозначается любая из топологий: n (нормированная, или сильная; n обычно опускается), w (слабая), $w\omega$ (секвенциальная слабая), w^* (слабая * сопряженного пространства).

$A \sim B$ для величин A, B означает $A - B \rightarrow 0$ (а не $A/B \rightarrow 1$).

Мы используем следующие виды непрерывности многозначного отображения, как правило, метрической проекции P :

ρ -непрерывность (в точке x): $Pz \neq \emptyset$ для всех z из некоторой окрестности $B_\varepsilon x$ и $\lim_{z \rightarrow x} \rho(Px, Pz) = 0$;

H -полунепрерывность сверху: $Pz \neq \emptyset \forall z \in B_\varepsilon x$ и $d(Pz, Px) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow x$;

полунепрерывность снизу: $\forall y \in Px \lim_{z \rightarrow x} \rho(y, Pz) = 0$;

Γ'' -непрерывность: $\exists y \in Px, \rho(y, Px_n) \rightarrow 0$ для любых $x_n \rightarrow x$ с $x \in (x_n, y)$;

n - $w\omega$ -полунепрерывность снизу: $\forall y \in Px, \forall x_n \rightarrow x \exists y_n \in Px_n, w\text{-}\lim y_n = y$.

Заметим, что если $\forall x Px \neq \emptyset$, а P полунепрерывна снизу или обладает непрерывной селекцией, то P Γ'' -непрерывна.

В работе встречаются следующие классы банаховых пространств:

(Rf) – класс *рефлексивных* пространств;

(R) – класс *строго выпуклых* пространств;

(R') – класс пространств, в которых из условий $x, y, h_n \in S, h_n x \rightarrow 2, h_n y \rightarrow 2$ следует $x = y$;²

(S) или (G) – класс *гладких* пространств, т.е. пространств с нормой, дифференцируемой по Гато в точках S ;

(F) – класс пространств с нормой, дифференцируемой по Фреше в точках S ;

(D) – класс пространств, в которых из $x_n \in S, f \in S^*, f(x_n) \rightarrow 1$ следует сходимость x_n ;³

(CD) – класс пространств, в которых из $x_n \in S, f \in S^*, f(x_n) \rightarrow 1$ следует существование предельной точки x_n (*пространства Ефимова–Стечкина*);⁴

$(\gamma R) [(C\gamma R)]$ – класс пространств, в которых условия

$$x_n, y_k \in S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty} \|x_n + y_k\| = 2$$

влекут, что x_n, y_k сходятся [имеют предельные точки];

$(\delta R) [(C\delta R)]$ – класс пространств, в которых из условий

$$x_n, y_k \in S, \quad \lim_{k \geq n \rightarrow \infty} \|x_n + y_k\| = 2$$

следует, что x_n, y_k сходятся к одной и той же точке из S [имеют предельные точки];

(τUR) – τ -*равномерно выпуклые* пространства: если $x_n, y_n \in S, \|x_n + y_n\| \rightarrow 2$, то $x_n - y_n \xrightarrow{\tau} 0$;

$(UR) = (nUR), (wUR)$ – частные случаи (τUR) ;

(τLUR) – τ -*локально равномерно выпуклые* пространства: если $x, x_n \in S, \|x + x_n\|/2 \rightarrow 1$, то $x_n \xrightarrow{\tau} x$;

$(\tau CLUR^\circ) [(\tau CLUR)]$ – если из $x, x_n \in S, \|x + x_n\|/2 \rightarrow 1$, вытекает существование τ -сходящейся подпоследовательности x_{n_k} [к элементу из S];

² T_2 -выпуклые пространства, см. С.В. Конягин [85].

³*Сильно выпуклые* пространства (термин С.Б. Стечкина), или E -пространства (в теории некорректных задач), употребляется также выражение “строго выпуклые пространства Ефимова–Стечкина”; впервые рассматривались В.Л. Шмудляном [В59].

⁴Подробнее об этих пространствах см. в [92].

$(CLD) [(LD), (wLD)]$ – класс пространств, в которых из условий $x, x_n \in S, f \in S^*, f(x) = 1, f(x_n) \rightarrow 1$ вытекает, что x_n имеет сходящуюся подпоследовательность [сходится к x , w -сходится к x];

(SA) – класс пространств, в которых условия $x, x_n \in S, f_n \in S^*, w\text{-}\lim x_n = x, f_n(x_n) = 1$ влекут соотношение $f_n(x) \rightarrow 1$;

(UG) – класс пространств с нормой, равномерно дифференцируемой по Гато: предел $\lim_{t \rightarrow 0} (\|x + th\| - \|x\|)/t$ существует при $x, h \in X \setminus \{0\}$ и является равномерным по $x \in S$ (другое название: пространства, *равномерно гладкие по каждому направлению*).

Многие из перечисленных классов пространств описываются единообразно:

(P) – класс пространств, в которых все точки $x \in S$ обладают свойством $P = P(x)$.

В произвольном пространстве точку $x \in S$, обладающую свойством $P(x)$, будем называть *P-точкой*.

Таким образом, мы считаем определенными понятия *F-точки*, *τLUR -точки*, *LUR -* (т.е. *$nLUR$ -*) *точки* и т. д.

Отметим очевидные соотношения между классами:

$$\begin{aligned} (\delta R) &\subset (\gamma R) \subset (R), (C\delta R) \subset (C\gamma R), (D) \subset (LD) \subset (LUR), \\ (CD) \cup (CLUR) &\subset (CLD) \subset (SA), (Rf) \subset (wCLUR^\circ), \\ (D) &= (CD) \cap (R), (\gamma R) = (C\gamma R) \cap (R), (\delta R) = (C\delta R) \cap (R), \\ (LD) &= (CLD) \cap (R), (LUR) = (CLUR) \cap (R), \\ (CLUR^\circ) &= (CLUR), (Rf) \cap (R) \subset (wLD). \end{aligned}$$

Соотношение $(UR) \subset (\delta R)$ доказывается в лемме 1.4, некоторые другие – в предложениях 1.7, 1.8, 1.11. Пример пространства ℓ^2 с новой нормой $|x_1| + (\sum_{i=2}^\infty |x_i|^2)^{1/2}$ показывает, что $(wCLUR^\circ) \not\subset (wCLUR)$, $(CD) \not\subset (CLUR)$.

Нам понадобятся следующие множества точек, обладающих тем или иным аппроксимативным свойством относительно M .

$E = E_M = E(M) = \{x \in {}^cM : Px \neq \emptyset\}$ – множество точек существования элемента наилучшего приближения; M называется *проксимальным* или *множеством существования*, если ${}^cM = E$;

$U = U_M = U(M) = \{x \in {}^cM : |Px| \leq 1\}$ – множество точек единственности; M называется *множеством единственности*, если ${}^cM = U$;

$T = T_M = T(M) = \{x \in {}^cM : |Px| = 1\} = E \cap U$; M называется *чебышёвским множеством*, если ${}^cM = T$;

$$T' = T'_M = T'(M) = \{x \in {}^cM : \text{diam } P^\delta x \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow +0\};$$

$\tau AC = \tau AC(M)$ – множество точек *аппроксимативной τ -компактности*, т.е. тех $x \in {}^cM$, для которых всякая минимизирующая последовательность y_n , (т.е. $y_n \in M, xy_n \rightarrow xM$) содержит подпоследовательность, τ -сходящуюся к элементу из M (зависящему от подпоследовательности); M называется *аппроксимативно компактным*, если ${}^cM = AC$;⁵

⁵Понятие аппроксимативно компактного множества было введено Ефимовым и Стечкиным [ЕС4], оно является непосредственным предшественником понятия *компактного фильтра* [56]. M аппроксимативно компактно тогда и только тогда, когда $\forall x \in {}^cM$ минимизирующий *фильтр*, т.е. фильтр с базисом $\{P^\delta x\}_{\delta > 0}$, является компактным.

$LSC = LSC_M$ – множество точек полунепрерывности снизу метрической проекции P ; $x \in LSC$ означает, что из $Px \cap G \neq \emptyset$, где G открыто, следует, что $Pz \cap G \neq \emptyset$ для всех z из некоторой окрестности Ux ; это равносильно условию: $\forall y \in Px \forall x_n \rightarrow x$ имеем $\rho(y, Px_n) \rightarrow 0$ ($\rho(y, \emptyset) = \infty$);

$G = G_M$ – множество тех $x \in {}^cM$, где d_M имеет производную Гато $d'_M(x) = f \in X^*$, так что $\forall h \in X$

$$(*) \quad f(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_M(x + th) - d_M(x)}{t};$$

$F = F_M$ – множество тех $x \in G$, где предел $(*)$ равномерен по $h \in S$ (в этом случае f называется производной Фреше, а d_M – дифференцируемой по Фреше в точке x);

$$G' = G'_M = \{x \in G : \|d'_M(x)\| = 1\};$$

$$G'' = G''_M = \{x \in G : \exists z \in S, d'_M(x)(z) = 1\};$$

$\Gamma = \Gamma_M$ – множество точек $x \in {}^cM$, в которых $\forall h \in X$ существует предел $(*)$ (не обязательно линейный по h);

$\Gamma' = \Gamma'_M$ – множество таких $x \in {}^cM$, что для некоторого $h \in S$ предел $(*)$ равен 1 при $t \rightarrow +0$;

$\Gamma'' = \Gamma''_M$ – множество таких точек $x \in \Gamma'$, что в качестве h можно взять $(x - y)/xy$ для некоторого $y \in Px$.

(Заметим, что направление от x к $x + h$ в Γ'_M , Γ''_M есть направление наибольшего возрастания функции d_M – “направление градиента”.)

$\delta S = \delta S(M) = \delta S_M$ – множество δ -солнечных точек, т.е. таких $x \in {}^cM$, что существует последовательность $v_n \neq x, v_n \rightarrow x$, для которой

$$(**) \quad (v_n M - xM)/v_n x \rightarrow 1;$$

если $\delta S = {}^cM$, то M называется δ -солнцем;

$\delta' S$ – множество тех $x \in {}^cM$, для которых существуют $h \in S, t_n \rightarrow +0$ такие, что для $v_n = x + t_n h$ имеем $(**)$;

$\delta'' S$ – если среди h , удовлетворяющих предыдущим условиям, найдется такое, что $x - xM \cdot h \in Px$;

$\gamma_r S$ – множество таких $x \in {}^cM$ (для данного $r > 0$), что существуют z_n с $z_n x = r, z_n M - xM \rightarrow r$;

$\gamma S = \bigcap_{r>0} \gamma_r S$; если $\gamma S = {}^cM$, то M называется γ -солнцем;

αS – множество тех $x \in {}^cM$, для которых существует такое $h \in S$, что для всех $z = x + th$ ($t > 0$) имеем $zM = zx + xM$; если $\alpha S = {}^cM$, то M называется α -солнцем;

$mS = \{x \in {}^cM : \exists z \in X, \exists y \in Px, x \in (y, z)\}$; если $mS = {}^cM$, то M называется метасолнцем;

$S = S_M = \{x \in {}^cM : \exists y \in M, y \in Px \forall z \text{ с } x \in [y, z]\}$;

если $S = {}^cM$, то M называется солнцем;⁶ если квантор $\exists$ заменить на $\forall$ и добавить проксиминальность M , то придем к понятию строгого солнца;

⁶ Существуют разные мнения по поводу того, кто является автором этого понятия. Конечно, еще греки знали, что – как мы теперь скажем – “прямая евклидовой плоскости E_2 есть солнце”. Моцкин [B119] в $X = E_2$, Кли [B105] в X с $\dim X < \infty$ доказывали солнечность чебышёвских множеств и выпуклость солнц (если X гладко). Независимо от них Ефимов и Стечкин пришли к сходным результатам, но они, кроме того, дали имя новому свойству – и какое “ослепительное”! Это, конечно, способствовало быстрому распространению новых геометрических идей.

$$W = {}^cM \setminus \delta S;$$

$$W' = {}^cM \setminus (\delta' S \cap E).$$

Нетрудно проверить, что в определении $\gamma_r S$ можно предполагать, что $z_n x \rightarrow r$ вместо $z_n x = r$; ясно также, что $\gamma_r S$ и γS – замкнутые относительно cM множества. Соотношения между различными множествами точек приведены в схеме 3.

§ 2. Теоремы для ссылок

ТЕОРЕМА А (К. Лау [101], С. В. Конягин [86]). Пусть $X \in (CD)$, $M \in \mathcal{F}$. Тогда множества ${}^cM \setminus E$, ${}^cM \setminus AC$, а если $X \in (D)$, то и ${}^cM \setminus T'$ – I категории в X .⁷

ТЕОРЕМА Б [В, теорема 3.3]. В банаховом пространстве класс δ -солнц совпадает с классом γ -солнц.

ТЕОРЕМА В (С. Фитшпатрик [61, теорема 3.1]).

- а) $X \in (G) \iff \forall M \in \mathcal{F} \quad T' \subset G \text{ (или } T' \subset G')$;
- б) $X \in (F) \iff \forall M \in \mathcal{F} \quad T' \subset F$.

Обратные импликации у Фитшпатрика не сформулированы, однако они очевидны при $M = \{0\}$.

ТЕОРЕМА В' (С. Фитшпатрик [61, теорема 2.6]).

- а) $X \in (D) \iff \forall M \in \mathcal{F} \quad F \subset T'$;
- а') $X \in (LD) \iff \forall M \in \mathcal{F} \quad F \cap E \subset T'$;
- б) $X \in (CD) \iff \forall M \in \mathcal{F} \quad F \subset AC$;
- б') $X \in (CLD) \iff \forall M \in \mathcal{F} \quad F \cap E \subset AC$.

Строго говоря, С. Фитшпатрик доказал прямые импликации в а), а'), однако доказательство не меняется и для б), б'); обратные импликации очевидны, если взять в качестве M гиперплоскости (в случаях а'), б') – опорные к В).

ТЕОРЕМА Г (В. Л. Шмульян, см. [57, с. 510]). Пусть $x \in S$, $f \in S^*$, $f(x) = 1$. Следующие условия эквивалентны:

- а) x есть F -точка S ;
- б) всякая последовательность $f_n \in S^*$ с $f_n(x) \rightarrow 1$ сходится к f .

§ 3. Некоторые результаты

В дальнейшем существенную роль будет играть θ -порядок, связанный с данным множеством M и числом $\theta \in (0, 1)$ (см. Р. Фелпс [В126, с. 401]). Будем писать $x \prec_\theta y$ (или $y \succ_\theta x$), если $\theta \cdot yx \leq yM - xM$. В [В126], [33] показано, что все аксиомы порядка выполняются и что в шаре $B_r x$ всегда существует максимальный элемент $v \succ_\theta x$ (см. также [В, с. 26–27], [60], [127]).

ЛЕММА 0.1. а) Если $x \in \delta S$, то $\forall \theta \in (0, 1) \quad \exists y_n \succ_\theta x$, $y_n M > xM$, $y_n \rightarrow x$.

⁷Первая теорема такого рода была доказана С. Б. Стечкиным [С] для равномерно выпуклых пространств.

б) Если $\overset{\circ}{B}_r x \subset \delta S \cup M$, то для элемента $v \succ_\theta x$, максимального в $B_r x$ относительно θ -порядка, имеем $\|v - x\| = r$. Далее, $x \in \gamma_r S$ и, более того, вообще $\text{int } \delta S \subset \bigcup_{r>0} \text{int } \gamma_r S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По определению $\delta S \exists y_n \neq x, y_n \rightarrow x, (y_n M - xM)/y_n x \rightarrow 1$. Значит, $\forall n > n_0 \ y_n M - xM \geq \theta \cdot y_n x$, и а) доказано. б) Допустим, $vx < r$. Тогда $v \in \delta S$, и по а) найдется $y_n \in \overset{\circ}{B}_r x, y_n \succ_\theta v \succ_\theta x, y_n M > vM$, что противоречит максимальнойности v . Если теперь для $\theta_n \in (0, 1), \theta_n \rightarrow 1$, имеем максимальный элемент $v_n \succ_{\theta_n} x$, то $v_n x = r, v_n x \geq v_n M - xM \geq \theta_n v_n x$, откуда $x \in \gamma_r S$. Поэтому, если $y \in B_{r'} x$, где $r' \in (0, r/2)$, то $\overset{\circ}{B}_{r'} y \subset \overset{\circ}{B}_r x \subset \delta S$; отсюда ясно, что $\text{int } \delta S \subset \bigcup_{r>0} \text{int } \gamma_r S$.

ЛЕММА 0.2. $\gamma_r S \subset \delta S$, а если $r' < r$, то $\gamma_r S \subset \gamma_{r'} S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < r_n \leq r, z_n x = r, z_n M - xM \rightarrow r, z'_n \in [x, z_n], z'_n x = r_n$. Имеем

$$\begin{aligned} 1 &\geq (z'_n M - xM)/z'_n x \geq (z_n M - z_n z'_n - xM)/r_n \\ &= (z_n M - xM)/r_n - r/r_n + 1 = r_n^{-1} r [(z_n M - xM)/r - 1] + 1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

как при $r_n \equiv r'$, так и при $r_n = [(z_n M - xM)/r - 1]^{1/2} \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 0.1. Для всякого $M \in \mathcal{F}$ множество δS δ -солнечных точек является G_δ -множеством, плотным в ${}^c M$, а множество $W = {}^c M \setminus \delta S$ — F_σ -множеством I категории.⁸

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \theta_n < 1, \theta_n \rightarrow 1$. Положим $G_n = \{x \in {}^c M : \exists z, zx < 1 - \theta_n, \theta_n \cdot zx < zM - xM\}$. G_n открыто: если для $x \in G_n$ найдено z , то оно же годится для всех x' , достаточно близких к x . Покажем, что ${}^c M \subset \overline{G_n}$. Возьмем произвольные $z \in {}^c M, \varepsilon > 0, \varepsilon < 1 - \theta_n, \varepsilon < zM, y \in M$ с $zy \leq zM + \varepsilon^2$. Возьмем $x \in [z, y]$ с $zx = \varepsilon$. Тогда $\theta_n \cdot zx = \theta_n \cdot \varepsilon < \varepsilon - \varepsilon^2 = zy - xy - \varepsilon^2 \leq zM - xM$ и $x \in G_n$. Так как ε произвольно, то $z \in \overline{G_n}$. Докажем теперь, что $\delta S = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. В силу леммы 0.1 $\delta S \subset G_n, \delta S \subset \bigcap G_n$. Пусть $x \in G_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Найдется z_n с $z_n x < 1 - \theta_n, \theta_n \cdot z_n x < z_n M - xM$. Так как $z_n \rightarrow x, z_n M - xM \leq z_n x, \theta_n \rightarrow 1$, то это означает $x \in \delta S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1. Если $b > 0, M, M_b \in \mathcal{F}$, то

$$\delta S(M_b) = \delta S(M) \setminus M_b.$$

Это следует из соотношения Ефимова–Стечкина [ЕС1], [В, с. 27]:

$$xM = xM_b + b \quad \forall x \notin M_b.$$

⁸В случае $X \in (CD)$ теорема 0.1 дает меньше, чем теорема А (см. предложение 1.4). Однако хотелось бы обратить внимание на то, что теорема 0.1 справедлива для *любого* банахова пространства.

ЛЕММА 0.3. Пусть $X \in (CLUR)$ [$X \in (LUR)$], $x, y, z_n \in X$, $x \neq y$, $\lim z_n x > 0$; если $z_n y - z_n x \rightarrow xy$, то последовательность $(z_n - x)/z_n x$ имеет предельную точку [сходится к точке $(x - y)/xy$].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно ограничиться доказательством частного случая, когда $x = 0$, $xy > 1$, $z_n x > 1$. Пусть $\bar{y} = y/0y$, $\bar{z}_n = z_n/0z_n$. Имеем:

$$z_n \bar{z}_n + 2 + \bar{y}y = z_n 0 + 0y \sim z_n y \leq z_n \bar{z}_n + \bar{z}_n \bar{y} + \bar{y}y,$$

откуда $\bar{z}_n \bar{y} \rightarrow 2$, $\|\bar{z}_n + (-\bar{y})\|/2 \rightarrow 1$, следовательно, $\bar{z}_n ((z_n - x)/z_n x$ в общем случае) имеет предельную точку [сходится к $-\bar{y} ((x - y)/xy$ в общем случае)].

ЛЕММА 0.4. Пусть $X \in (C\gamma R)$ [$X \in (\gamma R)$], $x, y_k, z_n \in X$, $\lim xy_k > 0$, $\lim z_n x > 0$. Если $z_n y_k - z_n x - xy_k \rightarrow 0$ при $k, n \rightarrow \infty$, то последовательности $(z_n - x)/z_n x$, $(y_k - x)/y_k x$ имеют предельные точки [сходятся к точкам $\bar{z}$, $\bar{y}$, где $\bar{z} = -\bar{y}$].

Воспользуемся доказательством леммы 0.3, где y заменим на y_k . В результате получим $\bar{z}_n \bar{y}_k \rightarrow 2$ при $k, n \rightarrow \infty$. Остальное ясно.

ЛЕММА 0.5. Пусть $M \in \mathcal{F}$, $x \in E \cap \gamma_r S$. Если $X \in (CLUR)$, то $\exists z$, $zx = r$, $zM = zx + xM$, $Px \subset Pz$. Если $X \in (LUR)$, то Px одноточечно и $\exists z$, $zx = r$, $x \in [z, Px]$, $Px \in Pz$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in Px$, $z_n x = r$, $z_n M - z_n x \rightarrow xM$. Тогда $xy \geq z_n y - z_n x \geq z_n M - z_n x \rightarrow xM = xy$. Значит, $z_n y - z_n x \rightarrow xy$; по лемме 0.3 $(z_n - x)/z_n x$, и поэтому z_n имеют предельные точки; если $z_{n_i} \rightarrow z$, то, как легко видеть, $zx = r$, $zM = zx + xM$, $Px \subset Pz$. Если $X \in (LUR)$, то $(z_n - x)/z_n x \rightarrow (x - y)/xy$, $z_n \rightarrow x + r(x - y)/xy = z$. Ясно, что $y \in Px$ единственно, $zx = r$, $x \in [z, y]$.

ЛЕММА 0.6. Пусть $x \in \gamma_r S$. Если $X \in (C\gamma R)$, то $\exists z$, $zx = r$, $zM = zx + xM$, $\emptyset \neq Px \subset Pz$. Если $X \in (\gamma R)$, то Px одноточечно и $\exists z$, $zx = r$, $x \in [z, Px]$, $Px \in Pz$.

Воспользуемся доказательством леммы 0.5, где y заменим на $y_k \in M$ с $xy_k \rightarrow xM$ и сошлемся на лемму 0.4 вместо леммы 0.3.

ЛЕММА 0.7. Пусть $X \in (\gamma R)$, $x' \in Px$, $(\overrightarrow{x'x} \setminus (x, x')) \cap \overline{W} = \emptyset$. Тогда $Pz = \{x'\}$ $\forall z \in \overrightarrow{x'x}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если это не так, то, очевидно, найдется пограничная точка $u \in \overrightarrow{x'x}$: $Pz = \{x'\}$ $\forall z \in (x', u)$, $Pz \neq \{x'\}$ $\forall z \in (x', z)$. Так как $u \notin (x, x']$, то $B_r u \cap \overline{W} = \emptyset$ для некоторого $r > 0$. По лемме 0.1 $u \in \gamma_r S$. По лемме 0.6 (заменяя в ней x на u) найдем z_0 , $z_0 u = r$, Pu одноточечно, $u \in [z_0, Pu]$, $Pu \in Pz_0$. Но тогда $Pu = \{x'\}$, $Pz = \{x'\}$ $\forall z \in (x', z_0)$, что противоречит выбору u .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.2. Пусть $M \in \mathcal{F}$, $0 < xM < b$, $xQ^b = b - xM$. Тогда $x \in \gamma_r S$ при $r = b - xM$. Обратно, если $x \in \gamma_r S$, то для любого $r' \in (0, r)$ справедливо равенство $xQ^{b'} = r'$ при $b' = xM + r'$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \gamma_r S &= \{x \in {}^c M : xQ^b = b - xM \ \forall b \in (xM, r + xM)\}, \\ \gamma S &= \{x \in {}^c M : xQ^b = b - xM \ \forall b > xM\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z'_n \in Q^b$, $xz'_n \rightarrow xQ^b = r$; можно считать, что $z'_n M = b$. Возьмем $z_n \in [z'_n, x]$, $z_n x = r$. Имеем

$$r \geq z_n M - xM \geq z'_n M - xM - z'_n z_n \rightarrow b - xM = r,$$

т.е. $x \in \gamma_r S$. Пусть, обратно, $x \in \gamma_r S$, $r' \in (0, r)$, $b' = xM + r'$. Прежде всего, $xQ^{b'} \geq r'$, ибо $xz \geq zM - xM \geq r' \quad \forall z \in Q^{b'}$. Далее, если $\bar{r} \in (r', r)$, то по лемме 0.2 $x \in \gamma_{\bar{r}} S$; тогда $\exists z_n, z_n x = \bar{r}$, $z_n M \rightarrow \bar{r} + xM > r' + xM = b'$. Поэтому $xQ^{b'} \leq xz_n = \bar{r} \leq r'$, и $xQ^{b'} = r'$.

ЛЕММА 0.8. Пусть $X \in (D)$, $M \in \mathcal{F}$, $x \in E \cap LSC \cap \text{int } \gamma_r S$ или $x \in T' \cap \text{int } \gamma_r S$. Тогда Px односточечно и $\exists z, zx = r$, $x \in [z, Px]$, $Px \in Pz$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in \text{int } \gamma_r S$, то для некоторого $\varepsilon \in (0, r/2)$, $B_\varepsilon x \subset \gamma_r S$, $B_\varepsilon x \cap M = \emptyset$. Положим $b = r - \varepsilon + xM$, $r' = b - yM$ для $y \in \overset{\circ}{B}_\varepsilon x$. Тогда $r' < r$, $b > xM + \varepsilon$, $yM < b$, так что $\overset{\circ}{B}_\varepsilon x \cap Q^b = \emptyset$. По предложению 0.2 (где полагаем $b' = b$) $yQ^b = r' = b - yM$. Возьмем $x' \in Px$, $z \in \overrightarrow{x'x}$, $zx' = b$, $y_n \rightarrow x$, $y_n \in \overset{\circ}{B}_\varepsilon x \cap T' \cap T'_{Q^b}$ (это возможно по теореме А). По доказанному $y_n Q^b = b - y_n M$. Пусть $z_n = P_{Q^b} y_n$, $y'_n = Py_n$, тогда имеем:

$$b \leq z_n M \leq z_n y'_n \leq z_n y_n + y_n y'_n = y_n Q^b + y_n M = b.$$

В силу $X \in (D) \subset (R)$ должно быть $y_n \in [z_n, y'_n]$. Ввиду $x \in LSC$ или $x \in T'$ $y'_n \rightarrow x'$. Тогда $z_n = y'_n + b(y_n - y'_n)/y_n y'_n \rightarrow x' + b(x - x')/xx' = z$, $zM = b = zx'$. Поскольку $X \in (R)$, то $\overrightarrow{Px} = \{x'\}$, а так как ε произвольно мало, то заключение леммы верно для $z \in \overrightarrow{x'x}$ с $x'z = r + xM$, $zx = r$.

ГЛАВА I

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОМОЩЬЮ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ АППРОКСИМАТИВНЫМИ СВОЙСТВАМИ МНОЖЕСТВ

В §1 этой главы на простых фактах (см. схемы 1, 2) иллюстрируется известная связь единственности со строгой выпуклостью, существования с рефлексивностью. В §2 рассматриваются достаточные условия “солнечности” — непрерывность метрической проекции, аппроксимативная компактность, дифференцируемость метрической функции. Далее исследуются необходимые, а затем достаточные условия на пространствах, в которых “солнечность” (или дифференцируемость) влечет за собой аппроксимативную компактность (§3). В §4 показывается, что для дифференцируемости метрической функции по Фреше (Гато) в пространствах с нормой, дифференцируемой по Фреше (Гато), необходима и достаточна некоторая “солнечность”: дифференцируемость по направлению градиента. Заключительный §5 посвящен множествам, дополнения которых выпуклы.

Многие результаты главы I ради краткости и удобства объединены в схемы, которые фактически содержат и утверждения, в работе явно не сформулированные.

§ 1. Существование, единственность

ЛЕММА 1.1. Пусть $h_n, y_n \in S$, $(\|y_n - t_n h_n\| - 1)/t_n \rightarrow 1$ при $t_n \rightarrow +0$. Тогда верны утверждения:

- а) $\|h_n - y_n\| \rightarrow 2$;
- б) если $h_n \rightarrow h$, $y_n \rightarrow y$, то $\|h - y\| = 2$;
- в) если $X \in (R)$, $h_n \rightarrow h$, $y_n \rightarrow y$, то $h = -y$;
- г) если $X \in (CLUR)$, $h_n \rightarrow h$ [$y_n \rightarrow y$], то для некоторой $n_k \rightarrow \infty$ имеем $y_{n_k} \rightarrow y$ [$h_{n_k} \rightarrow h$]; $u \|h - y\| = 2$;
- д) если $X \in (\tau LUR)$, $y_n \rightarrow y$, то $h_n \xrightarrow{\tau} -y$;
- е) если $X \in (\tau UR)$, то $h_n + y_n \xrightarrow{\tau} 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} 2 \geq h_n y_n &= \frac{\|t_n h_n - t_n y_n\|}{t_n} \\ &\geq \frac{\|t_n h_n - y_n\| - \|y_n - t_n y_n\|}{t_n} = \frac{\|y_n - t_n h_n\| - 1}{t_n} + 1 \rightarrow 2. \end{aligned}$$

Остальные утверждения легко вытекают из доказанного.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если $X \in (R)$, $M \in \mathcal{F}$, то $\delta'' S = \delta' S \cap E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\subset$ очевидно. Пусть $x \in \delta' S \cap E$, $y \in Px$. Можно считать $x = 0$, $0M = 1$. По условию $0 \in \delta' S$ имеем $(h_n M - 1)/h_n 0 \rightarrow 1$, где $h_n = t_n h$, $h \in S$, $t_n > 0$, $t_n \rightarrow 0$. Так как $h_n M - 1 \leq h_n y - 1 \leq h_n 0 = t_n$, то $(\|y - t_n h\| - 1)/t_n \rightarrow 1$, и по лемме 1.1в) $h = -y$. Это и означает, что $0 \in \delta'' S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Для любого $M \in \mathcal{F}$: $G'' \subset G'$, $F \subset G' \subset \delta S$, $G'' \subset \Gamma'$, $G \cap E = G' \cap E = G'' \cap E \subset \Gamma''$, а если $X \in (Rf)$, то $G' \subset \Gamma'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению G'' , если f — производная Гато в точке $x \in G''$, а $z \in S$ такое, что $f(z) = 1$, то

$$1 \leq |f(z)| \leq \|f\| = \sup_{h \in S} f(h) = \sup_{h \in S} \lim_{t \rightarrow 0} (d_M(x + th) - d_M(x))/t \leq 1,$$

так что $G'' \subset G'$.

Пусть $f \in X^*$ — производная Фреше функции d_M в точке $x \in F$; $y_n \in M$, $xy_n \rightarrow xM$, тогда

$$(1) \quad f(x - y_n)/xy_n \rightarrow 1.$$

Действительно, возьмем $t_n < 0$, $t_n > -xy_n$, $t_n \rightarrow 0$ так, чтобы $(xy_n - xM)/t_n \rightarrow 0$, $h_n = (x - y_n)/xy_n$. Поскольку $x \in F$, то $[d_M(x + t_n h_n) - d_M(x)]/t_n = f(h_n) \rightarrow 0$. Для $u_n = x + t_n h_n$ имеем

$$\begin{aligned} u_n &\in (x, y_n), \quad t_n = -u_n x, \quad \frac{u_n M - xM}{t_n} \sim f(h_n), \\ 1 &\geq \frac{xM - u_n M}{u_n x} \geq \frac{xM - u_n y_n}{u_n x} = \frac{xM - xy_n}{u_n x} + 1 \rightarrow 1, \quad f(h_n) \rightarrow 1, \end{aligned}$$

т.е. верно (1). Тогда $\|f\| \geq 1$. С другой стороны, $\forall h \in S$

$$f(h) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{d_M(x + th) - d_M(x)}{t} \leq 1.$$

Итак, $F \subset G'$.

Пусть $x \in G'$, f – производная Гато, тогда $\|f\| = 1$ по определению G' . Для $\varepsilon > 0$ найдем $h \in S$ с $f(h) > 1 - \varepsilon$ и положим $v_t = x + th$, $t \in \mathbb{R}$. При $t \rightarrow 0$ имеем $(v_t M - xM)/t \rightarrow f(h)$. Существует поэтому $z = v_t \neq x$, $zx = t < \varepsilon$, $(zM - xM)/zx > 1 - \varepsilon$. При $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$ находим $z_n \neq x$, $z_n \rightarrow x$, $(z_n M - xM)/z_n x \rightarrow 1$, так что $x \in \delta S$, $G' \subset \delta S$. Если $x \in G''$, в приведенных рассуждениях можно брать $h \in S$ с $f(h) = 1$, и тогда $(v_t M - xM)/t \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +0$, т.е. $x \in \Gamma'$.

Пусть $x \in G \cap E$. При $x' \in Px$, $h = (x - x')/xx'$, $t \in (-xx', 0)$ имеем, очевидно, $(v_t M - xM)/t \equiv 1$, $f(h) = 1$, т.е. $x \in G''$. Тогда и при $t \rightarrow +0$ $(v_t M - xM)/t \rightarrow f(h) = 1$, значит, $x \in \Gamma''$.

Если $X \in (Rf)$, то по теореме Джеймса $G' = G''$, а по доказанному, $G'' \subset \Gamma'$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 1.2 не ново. Л. П. Власов [138, теоремы 9, 10] доказал, что $G \cap E \subset \delta S$ (а фактически, по доказательству, что $\Gamma \cap E \subset \Gamma''$) и что $F \subset \delta S$. С. Фитцпатрик [61, лемма 2.2, теорема 2.6] установил, что $G \cap E \subset G''$, $F \subset G'$ (в неявном виде соотношение $F \subset G'$ можно обнаружить у Л. П. Власова [138, теорема 10] и К. Лау [101, лемма 2]). По-видимому, Асплунд [7] впервые рассматривал дифференцируемость функции (функции Асплунда) $\varphi_M(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}d_M^2(x)$, а Власов – дифференцируемость метрической функции d_M . О дифференцируемости функции, косвенно, как и у Асплунда, связанной с d_M (см. [121]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Если последовательность v_n из определения $\delta' S$, $\delta'' S$ сходится к x достаточно медленно и регулярно, а именно, если $v_{n+1}x/v_n x \rightarrow 1$, то в этом случае $\delta' S \subset \Gamma'$, $\delta'' S \subset \Gamma''$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in S$, $v_n = x + t_n h$, $0 < t_n \rightarrow 0$, $x_n = x + \lambda_n h$, $0 < \lambda_n \rightarrow 0$. Требуется доказать, что $(x_n M - xM)/x_n x \rightarrow 1$. Найдем $n_k \rightarrow \infty$, $t_{n_k+1} < \lambda_k \leq t_{n_k}$ (можно считать, что $\lambda_k < t_1$). Имеем

$$\frac{x_k M - xM}{x_k x} \geq \frac{v_{n_k} M - xM}{v_{n_k} x} - \frac{x_k v_{n_k}}{v_{n_k} x} \rightarrow 1,$$

ибо

$$\frac{x_k v_{n_k}}{v_{n_k} x} \leq \frac{v_{n_k} v_{n_k+1}}{v_{n_k} x} = \frac{t_{n_k} - t_{n_k+1}}{t_{n_k}} \rightarrow 0.$$

В дальнейшем результаты будут отражаться в схемах. При этом стрелка между соотношениями, свойствами означает импликацию. Рядом со стрелкой указывается условие на пространство и предложение (теорема, лемма), в котором импликация доказывается при этом условии. В схеме 2, например, (R) можно трактовать как свойство пространства X или как соотношение $X \in (R)$. В схеме 1 $\Gamma' \subset E \Rightarrow G' \subset E$ при условии $X \in (Rf)$, что доказывается в предложении 1.2. Если стрелки образуют замкнутый путь, их можно заменить на двусторонние (эквивалентность). Это, однако, делается лишь в самых очевидных случаях: схема, по нашему замыслу, должна воспроизводить ход доказательства, для чего, в частности, утверждение, вытекающее из других, отмечается пунктирной стрелкой (см. схему 5а).

СХЕМА 1 (подразумевается, что к каждому включению добавляются слова “для всех $M \in \mathcal{F}$ ”; для обоснования схемы достаточно рассмотреть в качестве M гиперплоскости или полупространства).

СХЕМА 2 (к каждому включению добавляются слова “для всех $M \in \mathcal{F}$ ”).

Пояснения к СХЕМЕ 2. Поскольку ${}^cM \setminus E \subset U$, имеем $G \cap E \subset U \Rightarrow G \subset U$. Докажем, что $X \in (R) \Rightarrow \delta'S \subset U \ \forall M \in \mathcal{F}$. Пусть x, h, t_n, v_n из определения $\delta'S$, $y \in Px$. Можно считать $x = 0, 0M = 1$. Имеем $1 \geq (\|y - t_n h\| - 1)/t_n \geq (d_M(t_n h) - d_M(0))/t_n = (v_n M - 0M)/v_n \rightarrow 1$, и по лемме 1.1в) $y = -h$. Отсюда $Px = \{y\}$, $x \in U$. Импликация $F \subset U \Rightarrow X \in (R)$ взята из схемы 1, остальные очевидны. Соотношение $(R) \Rightarrow G \subset U$ установлено Живковым [148].

§ 2. Из аппроксимативной компактности – “солнечность”

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть $M \in \mathcal{F}$, $x \notin M$ и выполняется одно из условий:

- (а) $x \in T'$;
- (б) в окрестности x множество Px непусто, выпукло и компактно, P H -полунепрерывна сверху в точке x ;
- (в) P Γ'' -непрерывна в точке x ;
- (г) $X \in (SA)$, $x \in T \cap wAC$;
- (д) $X \in (SA)$, P n - $w\omega$ -полунепрерывна снизу в точке x .

Тогда $x \in \Gamma''$, а, следовательно, $x \in \delta'S$ и x – δ -солнечная точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО представляет собой видоизменение рассуждений из [В, лемма 4.2, теоремы 4.15–4.17]. Пусть точки $x' \in Px$, $v \in X$, $v' \in M$, $f \in S^*$ таковы, что $x \in (v, x')$, $f(v' - x) = v'x$, а в остальном произвольны. Применяя соотношения

$x - v = vx \cdot \frac{x' - x}{xx'}$ и $xx' \leq xv' = f(v' - x)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{vx' - vv'}{vx} &\leq \frac{vx + xx' - f(v' - v)}{vx} = \frac{vx - f(x - v)}{vx} + \frac{xx' - v'x}{vx} \\ &\leq 1 - \frac{f(x' - x)}{xx'} \leq \frac{f(v' - x')}{xx'}. \end{aligned}$$

Пусть x зафиксировано, а x', v, v', f меняются таким образом, что $\frac{vv' - vM}{vx} \rightarrow 0$ при $v \rightarrow x$, в частности, это так, если $vv' = vM$, т.е. $v' \in Pv$. Для величины $I = 1 - \frac{vM - xM}{vx}$ ($I \geq 0$ по аксиоме треугольника) имеем при $v \rightarrow x$:

$$(2) \quad 0 \leq I \sim \frac{vx' - vv'}{vx} \leq 1 - \frac{f(x' - x)}{xx'} \leq \frac{f(v' - x')}{xx'}$$

($A \sim B$ означает $A - B \rightarrow 0$).

В случае (а) $\text{diam } P^\delta x \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$, поэтому $Px = \{x'\}$, $v' \rightarrow x'$, ибо $v' \in P^\delta x$ при $\delta < 1$, $vx < \delta/3$, $vv' - vM < \delta \cdot vx$. В случае (в) можно выбрать $v' \in Pv$ так, что при $v \rightarrow x$ будет $v' \rightarrow x'$. Далее, $f(x' - x) \sim f(v' - x) = v'x \sim xx'$, $I \rightarrow 0$ в силу (2). Это означает, что $x \in \Gamma''$.

В случаях (г) и (д) считаем $x = 0$, $0M = 1$, $x' = y \in P0$, $v = v_n$. Далее, $v' = y_n$ (минимизирующая последовательность), $f = f_n$ (г), $v' = v'_n \in Pv_n$, $v'_n \rightarrow y$ (д). Так как в (г) $0 \in T \cap wAC$, то $y_n \rightarrow y$. Ввиду $X \in (SA)$ легко получить в обоих случаях $f_n(y) \rightarrow 1$, тогда $I \rightarrow 0$ в силу (2) ($xx' = 1$, $x' - x = y$). Поскольку v_n — произвольная последовательность с $v_n 0 \rightarrow 0$, $0 \in (v_n, y)$, имеем $x = 0 \in \Gamma''$.

В случае (б) будем считать $x = 0$, $0M = 1$. Пусть $\delta > 0$. Для $z \in P0$ положим

$$\varepsilon(\delta) = \sup_{z \in P0} \sup_{y \in P(-\delta z)} \rho(y, P0).$$

Как фактически показано в [В, с. 49], найдутся $x' = x'_\delta \in P0$ и $v' \in P(-\delta x')$ с $v'x' \leq \varepsilon(\delta)$. Поскольку P H -полунепрерывна сверху, $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и, полагая $\delta = \delta_n = n^{-1}$, $x' = x'_n$, $v_n = -\delta_n x'_n$, имеем в силу (2) $(v_n M - 0M)/v_n 0 \rightarrow 1$. Так как $P0$ компактно, то можно считать (переходя к подпоследовательностям, если нужно), что $x'_n \rightarrow y \in P0$. Положим $w_n = -\delta_n y$, тогда

$$\frac{w_n M - 0M}{w_n 0} \geq \frac{v_n M - 0M - w_n v_n}{\delta_n} \sim \frac{v_n M - 0M}{v_n 0} \sim 1.$$

Таким образом, $0 \in \delta''S$, но поскольку $w_n 0/w_{n+1} 0 \rightarrow 1$, то $0 \in \Gamma''$ (см. предложение 1.3).

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 4.2 из [В] еще недостаточно используется: из нее, например, немедленно следует, что наличие непрерывной селекции [133], [71] или “почти полунепрерывности снизу” метрической проекции [54], [71] обеспечивает δ -солнечность со всеми вытекающими отсюда последствиями. Вероятно, самое большое, что можно извлечь из леммы 4.2, это следующее. Пусть $x \in {}^cM$ и точки $v_n, v'_n, f_n \in S^*$ таковы, что $f_n(v'_n - x) = v'_n x$, $v_n \rightarrow x$, $(v_n v'_n - v_n M)/v_n x \sim 0$, $f_n(x + xM(x - v_n)/xv_n - v'_n) \sim 0$. Тогда $x \in \delta S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть $M \in \mathcal{F}$ локально компактно, $x \notin M$, $R > 0$. Далее, пусть либо (а) Pz ациклично⁹ для всех $z \in B_R x$, P H -полу непрерывна сверху в точке x , либо (б) Pz непусто и выпукло для всех $z \in B_R x$, P ρ -непрерывна в точке x . Тогда $x \in mS$, т.е. существуют $z \neq x$ и $z' \in Pz$, такие, что $x \in [z, z']$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует технику из [В]. Не уменьшая общности, считаем $x = 0$, $0M = 1$. Ввиду локальной компактности M и компактности $P0$ (известно, что замкнутое выпуклое ограниченное подмножество локально компактного множества компактно) обычным образом находим конечное покрытие $\{U_i\}$ компакта $P0$ открытыми шарами, такое, что $\overline{U}_i \cap M$ компактны. По известному свойству компактов найдется шар U , для которого $Q = P0 + \overline{U} \subset \bigcup_i U_i$. Отметим, что Q замкнуто и ограничено, $Q \cap M$ компактно, а в случае (б) Q выпукло. По условиям непрерывности найдется шар $B_r = B_r 0$ ($0 < r < R$) такой, что (а) $P(B_r) \subset Q$, (б) для всех $z \in B_r$ $Pz \cap Q \neq \emptyset$. Положим $P'z = Pz \cap Q$, тогда для любого $z \in B_r$ (а) $P'z = Pz$ ациклично, (б) $P'z$ непусто, выпукло и компактно. Обозначим $K = -r \cdot \overline{\text{co}} P'(B_r)$, $K = K' \cap B_r$,

$$\varphi(z) = \frac{r}{r+1}(z - P'z), \quad z \in B_r.$$

Нетрудно видеть, что $-rP0 \subset K \neq \emptyset$, $\varphi(B_r) \subset B_r$, $\varphi(K) \subset K$ (см. лемму 4.1 [В]), ибо $\varphi(z) \subset \frac{r}{r+1} \cdot z + \frac{1}{r+1} \cdot K' \subset K'$ для $z \in K'$. Поскольку $P'z \subset Q$ для всех $z \in B_r$, множества $\overline{P'(B_r)}$, K' (как выпуклая замкнутая оболочка компакта в банаховом пространстве) и K — компакты. Мнозначное отображение $\varphi: K \rightarrow 2^K$ имеет замкнутый график. Действительно, пусть $z_n \rightarrow z$, $x_n \rightarrow x$, $x_n \in \varphi(z_n)$. Тогда найдутся $y_n \in P'z_n$ такие, что $x_n = \frac{r}{r+1}(z_n - y_n)$, а так как $y_n \in Q$, то можно считать, что $y_n \rightarrow y \in Q \cap M$. Ввиду $z_n y_n = z_n M$ имеем $zy = zM$, $y \in Pz$, $y \in P'z$ и $x = \frac{r}{r+1}(z - y) \in \varphi(z)$.

Так как выпуклое компактное множество ациклично, по теореме Эйленберга и Монтгомери φ имеет неподвижную точку $z \in \varphi(z)$, т.е. найдется $z' \in Pz$, $z = \frac{r}{r+1}(z - z')$, откуда $0 \in [z, z']$, $z \neq 0$, что и требовалось.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Следующие условия эквивалентны:

- а) $X \in (SA)$;
- б) для любого $M \in \mathcal{F}$

$$(3) \quad T \cap wAC \subset \Gamma'' \quad (\text{вариант: } T \cap wAC \subset \delta'' S);$$

- в) для любого слабо компактного M справедливо (3).

В случае априорного условия $X \in (R)$ вместо $\delta'' S$ можно поставить $\delta' S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\Rightarrow$ б) следует из предложения 1.4(г).

в) $\Rightarrow$ а). Возьмем $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n \rightarrow 1$ (например, $\varepsilon_n = n^{-1}$). Предположим, что $X \notin (SA)$. Тогда найдутся $y_n, y \in S$, $f_n \in S^*$ такие, что $f_n(y_n) = 1$, $y_n \rightarrow y$, $f_n(y) \rightarrow \alpha < 1$. Положим $v_n = -\varepsilon_n y$, $z_n = v_n + [1 + \varepsilon_n f_n(y) + \varepsilon_n^2] y_n$,

⁹Определение ацикличности и цитируемую ниже теорему Эйленберга и Монтгомери см. в [В, с. 43]. Для понимания дальнейшего достаточно знать, что ацикличное множество компактно.

$M = \{y\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z_n\}$. Так как $f_n(z_n) = 1 + \varepsilon_n^2$, то $\|z_n\| > 1$, $0M = 1$. Ясно, что $z_n \rightarrow y$, M – слабо компактное множество, $0 \in T \cap wAC$. По условию в) $0 \in \delta''S$, т.е. $\exists x_n \rightarrow 0 \in (x_n, y)$, $(x_n M - 0M)/x_n 0 \rightarrow 1$. Пусть $x_k \in [v_{n_k}, v_{n_k+1})$ (можно считать, что $x_1 0 < v_1 0$, а n_k возрастают к ∞ , но не строго). Тогда

$$\begin{aligned} 1 \sim \frac{x_k M - 0M}{x_k 0} &\leq \frac{x_k v_{n_k} + v_{n_k} M - 0M}{v_{n_k+1} 0} \leq \frac{v_{n_k} v_{n_k+1}}{v_{n_k+1} 0} + \frac{v_{n_k} z_{n_k} - 1}{v_{n_k+1} 0} \\ &= \frac{\varepsilon_{n_k} - \varepsilon_{n_k+1}}{\varepsilon_{n_k+1}} + \frac{\varepsilon_{n_k} f_{n_k}(y) + \varepsilon_{n_k}^2}{\varepsilon_{n_k+1}} \rightarrow \alpha < 1, \end{aligned}$$

что противоречиво, и, значит, в) $\Rightarrow$ а).

б) $\Rightarrow$ в) очевидно, а случай $X \in (R)$ ясен из предложения 1.1.

В схеме 3 стрелка, например, от G'' к G' означает импликацию $x \in G'' \Rightarrow x \in G'$, т.е. включение $G'' \subset G'$. Заметим, что для указанных в схеме включений $\Gamma' \subset \delta'S$, $\Gamma'' \subset \delta''S$ обратные включения верны, если $X \in (LUR)$, как это следует из теоремы 1.2, устанавливаемой в следующем параграфе.

СХЕМА 3 (импликации (включения) имеют место для любого $M \in \mathcal{F}$).

§ 3. Из "солнечности" – аппроксимативная компактность

Здесь рассматриваются условия на пространство, при которых для всякого $M \in \mathcal{F}$ точки "солнечности" являются точками аппроксимативной компактности. При этом мы относим к "солнечным" и дифференциальные свойства функции расстояния d_M .

ЛЕММА 1.2. Пусть $M = X \setminus \overset{\circ}{B}$, $x \in S$, $v \in (x, 0)$. Следующие условия эквивалентны:

- (а) $v \in \tau AC$ [$v \in T \cap \tau AC$];
- (б) x есть $\tau CLUR$ -точка S [τLUR -точка S].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть $x_n \in S$, $\|x_n + x\| \rightarrow 2$; обозначим $c_n = (x_n + x)/2$, $\bar{c}_n = c_n/\|c_n\|$. Проведем прямую vv_n параллельно $0c_n$ до пересечения с S и прямой xx_n соответственно в точках $\bar{v}_n$ и v_n . Из соображений подобия $vv_n/vx = 0c_n$, $vv_n \rightarrow vx$. Соединив $\bar{v}_n$ с x_n , аналогично получим $v\bar{v}_n \leq 2c_n\bar{c}_n \rightarrow 0$. Поэтому $v\bar{v}_n \rightarrow vx = vM$ и по (а) $\bar{v}_n$ имеет τ -сходящуюся подпоследовательность $\bar{v}_{n_k}$ [τ -сходится к $x = Pv$]. Так как $(x_n + x)/2 = c_n = \lambda_n(\bar{v}_n - v)$ и $\lambda_n = \|c_n\|/\bar{v}_nv \rightarrow 1/vx$, то x_{n_k} τ -сходится [x_n τ -сходится к x].

(б) $\Rightarrow$ (а). Пусть $y_n \in M$, $vy_n \rightarrow vM = vx$, тогда можно считать, что $y_n \in S \setminus \{x\}$. Если z_n — точка пересечения прямой xy_n с прямой $0z_n$, параллельной vy_n , то из подобия треугольников и $vy_n \rightarrow vx$ следует $0z_n \rightarrow 0x = 1$. Далее, $y_n = \lambda_n z_n + (1 - \lambda_n)c_n$, где $\lambda_n = y_n c_n / z_n c_n \leq y_n v_n / z_n 0 \rightarrow vx < 1$. Можно считать, что $\lambda_n \rightarrow \lambda < 1$, тогда

$$1 \geq \|c_n\| \geq \frac{1 - \lambda_n \|z_n\|}{1 - \lambda_n} \rightarrow 1, \quad \|x + y_n\| \rightarrow 2.$$

В силу (б) имеем (а).

Из леммы 1.2 легко вытекает

ЛЕММА 1.3. Для $M = X \setminus \overset{\circ}{B}$ эквивалентны следующие условия:

- (а) $X \in (\tau CLUR)$ [$X \in (\tau LUR)$];
- (б) ${}^c M \setminus \{0\} \subset \tau AC$ [${}^c M \setminus \{0\} \subset T \cap \tau AC$].

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\tau = n$ утверждения, аналогичные леммам 1.2 и 1.3, делались и ранее: С. Б. Стечкин [С], Панда и Капур [117], И. Г. Парьков [130].

В дальнейшем в этом параграфе, в §§ 4, 5, а также в схемах, (G) означает класс пространств с нормой, дифференцируемой по Гато (при $x \neq 0$), который, как известно, совпадает с классом (S) гладких пространств.

ТЕОРЕМА 1.1. Если для $M = X \setminus \overset{\circ}{B}$:

- а) $mS \subset \tau AC$ [$mS \subset T \cap \tau AC$] или
- б) $X \in (G)$ и $G \cap E \subset \tau AC$ [$G \cap E \subset T \cap \tau AC$], или
- в) $X \in (F)$ и $F \cap E \subset \tau AC$ [$F \cap E \subset T \cap \tau AC$],

то $X \in (\tau CLUR)$ [$X \in (\tau LUR)$].

- г) Если $mS \cap T \subset \tau AC \forall M \in \mathcal{F}$, то $X \in (\tau CLUR)$.
- д) Если $\Gamma' \subset E \forall M \in \mathcal{F}$, то $X \in (CLUR)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения а)–в) вытекают из леммы 1.3 ввиду легко доказываемых соотношений: а) $\overset{\circ}{B} \setminus \{0\} \subset mS$, б) $\overset{\circ}{B} \setminus \{0\} \subset G \cap E$, в) $\overset{\circ}{B} \setminus \{0\} \subset F \cap E$. Докажем г), д). Пусть $X \notin (\tau CLUR)$; тогда существует последовательность $x_n \in S$ ($n = 0, 1, \dots$), $\|x_0 + x_n\| \rightarrow 2$, которая либо не содержит τ -сходящихся подпоследовательностей, либо содержит, но τ -пределы их принадлежат $\overset{\circ}{B}$ (в частности, x_n не имеет n -предельных точек). Рассмотрим точки $z = -x_0$, $y_n \in x_n \in [z, y_n]$, $zy_n = 2 + 1/n$. Определим замкнутые множества $M' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y_n\}$, $M'' = M' \cup \{x_0\}$. Легко проверить, что для $M = M' \cup 0 \in \Gamma' \setminus E$ ($\tau = n$); это доказывает д). Допустим, что для $M = M''$ $mS \cap T \subset \tau AC$, тогда $0 \in \tau AC$. Поскольку $zx_n = \|x_0 + x_n\| \rightarrow 2$,

$1 + 1/n = zy_n - 0z \leq 0y_n \leq 1 + x_ny_n$, $x_ny_n = zy_n - zx_n \rightarrow 0$, то $0y_n \rightarrow 1 = 0M$. Ввиду $0 \in \tau AC$ некоторая $y_{n_k} \xrightarrow{\tau} y \in M$, что противоречит свойствам последовательности x_n . Тем самым установлено Γ).

ЛЕММА 1.4 (ср. [137]). Если $X \in (\tau UR)$ и τ -полно, $h_n, y_n \in S$, $\|h_n - y_k\| \rightarrow 2$ при $k \geq n \rightarrow \infty$, то h_n и y_k τ -сходятся. В частности,

$$(UR) \subset (\delta R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой последовательности $k_n \geq n$ имеем $\|h_n + (-y_{k_n})\|/2 \rightarrow 1$, отсюда $h_n + y_{k_n} \xrightarrow{\tau} 0$ в силу $X \in (\tau UR)$, следовательно, $h_n + y_k \xrightarrow{\tau} 0$ при $k \geq n \rightarrow \infty$. Далее, $h_n - h_k = (h_n + y_k) - (h_k + y_k)$. Скобки в правой части стремятся к 0 при $k \geq n \rightarrow \infty$; ввиду τ -полноты h_n (и y_n) τ -сходятся.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7.

$$\begin{aligned} (C\delta R) &\subset (C\gamma R) \subset (Rf) \cap (CLUR) \subset (CD), \\ (UR) &\subset (\delta R) \subset (\gamma R) \subset (Rf) \cap (LUR) \subset (D). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включения $(C\delta R) \subset (C\gamma R)$ и $(\delta R) \subset (\gamma R)$ тривиальны. Так как последовательности x_n, y_k могут быть стационарными, то $(C\gamma R) \subset (CLUR)$. По теореме Джеймса $(C\gamma R) \subset (Rf)$: если $f \in S^*$, $x_n \in S$, $f(x_n) \rightarrow 1$, то для $y_k = x_k$ имеем $2 \geq \|x_n + y_k\| \geq f(x_n) + f(y_k) \rightarrow 2$, и если $x_{n_k} \rightarrow x$, то $f(x) = 1 = \|f\|$. Включение $(Rf) \cap (CLUR) \subset (CD)$ известно (см. [48], [B45], [130]) и вытекает из тех же рассуждений при $y_k \equiv x_0$, где $f(x_0) = 1$. С учетом леммы 1.4, вторая цепочка включений аналогична, а также следует из первой и условия $X \in (R)$.

ЛЕММА 1.5. Пусть в точке $x \in S$ норма дифференцируема по Фреше (т.е. x есть F -точка), $f \in S^*$, $f(x) = 1$, $x_n \in S$, $\|x + x_n\| \rightarrow 2$. Тогда $f(x_n) \rightarrow 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем $f_n \in S^*$ с $f_n(x + x_n) = \|x + x_n\|$. Ясно, что $f_n(x) \rightarrow 1$. По теореме Γ (см. §2 введения) $f_n \rightarrow f$, поэтому $f(x + x_n) \sim f_n(x + x_n)$, откуда $f(x_n) \rightarrow 1$.

Из леммы легко вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. В классе F -точек сферы S CLD -точки совпадают с $CLUR$ -точками, LD -точки — с LUR -точками, wLD -точки — с $wLUR$ -точками. Поэтому

$$\begin{aligned} (CLD) \cap (F) &= (CLUR) \cap (F), (LD) \cap (F) = (LUR) \cap (F), \\ (wLD) \cap (F) &= (wLUR) \cap (F); \\ (CD) \cap (F) &= (Rf) \cap (CLUR) \cap (F), \quad (D) \cap (F) = (Rf) \cap (LUR) \cap (F). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $M \in \mathcal{F}$. Тогда:

- а) если $X \in (C\delta R)$ [$X \in (\delta R)$], то $\delta S \subset AC$ [$\delta S \subset T'$];
- б) если $X \in (\tau UR)$ τ -полно, а M τ -замкнуто, то $\delta S \subset T \cap \tau AC$;
- в) если $X \in (\tau CLUR^\circ)$ [$X \in (R) \cap (\tau CLUR^\circ)$], а M τ -замкнуто, то $\delta' S \subset \tau AC$ [$\delta' S \subset T \cap \tau AC$];
- г) если $X \in (CLUR)$ [$X \in (LUR)$], то
 - г') $\delta' S \subset AC$ [$\delta' S \subset T'$];
 - г'') $\delta S \cap E \subset \delta' S \cap AC$ [$\delta S \cap E \subset T'$];
- д) если $X \in (\tau LUR)$, то $\delta' S \cap E \subset T \cap \tau AC$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а), б). Пусть $x \in \delta S$. Не уменьшая общности, можно положить $x = 0$, $0M = 1$. Пусть $z_n \neq 0$, $z_n \rightarrow 0$, $(z_n M - 0M)/\|z_n\| \rightarrow 1$; $y_n \in M$, $0y_n \rightarrow 0M = 1$. Поскольку требуется обнаружить τ -сходящуюся подпоследовательность, можно сразу считать, что $\|y_{n-1}\| \geq \|y_n\| \rightarrow 1$, $(\|y_n\| - 1)/\|z_n\| \rightarrow 0$. При $k \geq n$ имеем $\|y_k\| \leq \|y_n\|$ и $z_n M - 0M \leq z_n y_k - 1 \leq \|z_n\| + \|y_k\| - 1 \leq \|z_n\| + \|y_n\| - 1$. Поэтому $(z_n y_k - 1)/\|z_n\| \rightarrow 1$ при $k \geq n \rightarrow \infty$. Обозначим $\bar{y}_n = y_n/\|y_n\|$, тогда ввиду $y_k \bar{y}_k/\|z_n\| \leq y_n \bar{y}_n/\|z_n\| \rightarrow 0$ имеем $(z_n \bar{y}_k - 1)/\|z_n\| \rightarrow 1$ ($k \geq n \rightarrow \infty$). Для $\bar{z}_n = z_n/\|z_n\|$ и любой последовательности номеров $k_n \geq n$ по лемме 1.1а) $\bar{z}_n \bar{y}_{k_n} \rightarrow 2$, а тогда $\bar{z}_n \bar{y}_k \rightarrow 2$ при $k \geq n \rightarrow \infty$.

Теперь в случае а) из определений следует то, что требуется.

В случае б) $\bar{y}_k$, а значит, и y_k τ -сходятся к некоторому y по лемме 1.4, при этом $y \in M \cap B$ в силу τ -замкнутости M и B . Поэтому $0 \in \tau AC \subset E$, а так как y_k можно взять из $P0$, то $0 \in T$ (используется единственность τ -предела).

в) В случае $0 \in \delta' S$ приведенные выше рассуждения остаются верными, при этом $\bar{z}_n \equiv h \in S$. Итак, $h \bar{y}_k \rightarrow 2$, поэтому $\bar{y}_k$ и y_k имеют τ -предельную точку $y \in M$, т.е. $0 \in \tau AC$. Если дополнительно $X \in (R)$, то $\delta' S \subset U$ по схеме 2, и поэтому $0 \in T$.

г') следует из в) при $\tau = n$.

г'') Пусть $z_n, \bar{z}_n$ те же, а $y_n \equiv y \in P0$. Тогда $\bar{z}_n y \rightarrow 2$, а в силу $X \in (CLUR)$ можно считать, что $\bar{z}_n \rightarrow h \in S$. Если теперь $y_k \in M$ с $0y_k \rightarrow 0M$ произвольна, то ввиду $\bar{z}_n y_k \rightarrow 2$ также $h y_k \rightarrow 2$, поэтому y_k имеет предельную точку, $0 \in AC$. Положим $h_n = z_n 0 \cdot h$, тогда $h_n z_n/h_n 0 \rightarrow 0$, $(h_n M - 1)/h_n 0 \rightarrow 1$ и $0 \in \delta' S$. В случае $X \in (LUR)$ $\bar{z}_n \rightarrow -y$, $h = -y$, поэтому $y_k \rightarrow -h = y$, $0 \in T \cap AC = T'$.

д) Пусть z_n, y_n те же, но $\bar{z}_n = h$, $y \in P0$. По доказанному выше $\bar{z}_n y \rightarrow 2$, т.е. $h y = 2$, а в силу $(\tau LUR) \subset (R)$ $h = -y$. Из $h y_n \rightarrow 2$ следует $y_n \xrightarrow{\tau} -h = y$, т.е. $0 \in \tau AC$. Так как y_n произвольна, то $0 \in T$.

СХЕМА 4б отличается от схемы 4а тем, что: $(CLUR)$ [(CLD)] заменяется на (LUR) [(LD)]; если $AC[E]$ встречается в правых частях включений, то оно заменяется на $T'[T]$; включение $mS \cap T \subset T'$ исключается из схемы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Б. Панда и О. Капур [117, теорема 1] установили следующий результат: в нормированном пространстве $X \in (CLUR)$ чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией аппроксимативно компактно (для банаховых пространств это было известно раньше [B45, следствие 3]). По окончании настоящей работы мы обнаружили, что из доказательства упомянутой теоремы можно извлечь утверждение $\delta'' S \subset AC$ и даже, если потрудиться, $\delta' S \subset AC$.

СХЕМА 4а (подразумевается, что к каждому включению добавляются слова “для всех $M \in \mathcal{F}$ ”; $(G) = (S)$).

Из предложения 1.4д) и теоремы 1.2в) вытекает следующее утверждение в духе теоремы 1 из [117].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пусть $X \in (SA) \cap (wCLUR^\circ)$, M – $w\omega$ -замкнутое чебышёвское множество. Если в точке x метрическая проекция n - w -непрерывна, то $x \in wAC$ (в случае $X \in (SA) \cap (wLUR)$ требование $w\omega$ -замкнутости можно опустить).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Е.В. Ошман [В45] охарактеризовал пространства, в которых каждое солнце (α -солнце) аппроксимативно компактно, а фактически те, в которых $S \subset AC$ ($\alpha S \subset AC$) $\forall M \in \mathcal{F}$. Этот класс содержит $(CLUR)$. Класс (LD) из схемы 4б фигурирует в книге Дзя [49] под названием (D_L) . Класс (CLD) введен Е.В. Ошманом [В43] под именем (CDL) . Он состоит из пространств, в которых каждое выпуклое проксиминальное множество аппроксимативно компактно [В43, следствие 20]. Добавим, что в $X \in (CLD)$ наблюдается совпадение слабой и сильной топологий на S , но это свойство не характеризует (CLD) .

СЛЕДСТВИЕ. Рассмотрим утверждения:

- (а) $X \in (wLUR)$;
- (б) $G \cap E \subset T \cap wAC \quad \forall M \in \mathcal{F}$ (вариант: $\forall M \in \mathcal{F}_{cc}$).

Тогда (а) $\Rightarrow$ (б), а если $X \in (G)$, то (б) $\Rightarrow$ (а).

Доказательство вытекает из теоремы 1.2д), предложения 1.2 и теоремы 1.1б).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Пусть $\mathcal{F}_{w\omega}$ – семейство всех $w\omega$ -замкнутых $M \in \mathcal{F}$. Тогда эквивалентны условия:

- а) $X \in (wCLUR^\circ) [X \in (R) \cap (wCLUR^\circ)]$;
- б) $\forall M \in \mathcal{F}_{w\omega} \quad \delta'S \subset wAC [\delta'S \subset T \cap wAC]$;
- в) $\forall M \in \mathcal{F}_{w\omega} \quad \delta'S \subset E [\delta'S \subset T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\Rightarrow$ б) по теореме 1.2в).

б) $\Rightarrow$ в) очевидно.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть $X \notin (wCLUR^\circ)$, тогда найдутся $x_n \in S$, $x_0 \in S$, $\|x_0 + x_n\| \rightarrow 2$, но x_n не содержит слабо сходящихся подпоследовательностей. Возьмем множество M' из доказательства теоремы 1.1. Оно $w\omega$ -замкнуто, но $0 \in \Gamma' \setminus E \subset \delta'S \setminus E$. Значит, $\delta'S \subset E \Rightarrow X \in (wCLUR^\circ)$, а по схеме 2 $\delta'S \subset U \Rightarrow X \in (R)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. $X \in (R')$ тогда и только тогда, когда для всякого $M \in \mathcal{F}$ выполняется включение $\delta S \subset U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \in (R')$, $z \in \delta S$, $x, y \in Pz$. Можно считать $z = 0$, $0M = 1$. Так как $0 \in \delta S$, найдутся $v_n \neq 0$, $v_n \rightarrow 0$, такие, что $(v_n M - 0M)/\|v_n\| \rightarrow 1$. Для $h_n = v_n/\|v_n\|$ по лемме 1.1а) имеем $h_n x \rightarrow 2$, $h_n y \rightarrow 2$, а тогда $x = y$ в силу $X \in (R')$. Если же $x, y \in S$, $h_n \in S$ таковы, что $h_n x \rightarrow 2$, $h_n y \rightarrow 2$, то положим $M = \{x, y\}$, $a_n = v_n M = \min\{v_n x, v_n y\}$, $A_n = \min\{h_n x, h_n y\}$, $v_n = \sqrt{2 - A_n} \cdot h_n$. Тогда, как легко видеть, $a_n \geq A_n - h_n v_n = A_n - 1 + \|v_n\|$,

$$1 \geq \frac{v_n M - 0M}{\|v_n\|} = \frac{a_n - 1}{\sqrt{2 - A_n}} \geq 1 - \sqrt{2 - A_n} \rightarrow 1,$$

$0 \in \delta S \subset U$, $x = y$, т.е. $X \in (R')$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.12. Пусть X удовлетворяет условию:

$$(*) \quad \begin{cases} \text{из соотношений } h_n, x_k \in S, \|h_n + x_k\| \rightarrow 2 \text{ при } k \geq n \rightarrow \infty \\ \text{вытекает } \rho(0, \overline{\text{co}}\{h_n, h_{n+1}, \dots; x_k, x_{k+1}, \dots\}) \rightarrow 1 \text{ (} k \geq n \rightarrow \infty \text{)}. \end{cases}$$

Тогда следующие утверждения а)–г) (соответственно, а')–г')) эквивалентны:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \forall M \in \mathcal{F} \delta S \subset AC; & \text{а')} \forall M \in \mathcal{F} \delta S \subset T'; \\ \text{б)} X \in (CD); & \text{б')} X \in (D); \\ \text{в)} X \in (C\delta R); & \text{в')} X \in (\delta R); \\ \text{г)} X \in (Rf) \cap (CLUR); & \text{г')} X \in (Rf) \cap (LUR). \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что а) $\Rightarrow$ г). Так как $mS \subset \delta'S \subset \delta S$, по теореме 1.1а) имеем $X \in (CLUR)$. Далее, выпуклые замкнутые множества суть γ -солнца (см. [В], а также предложение 0.2), $\gamma S \subset \delta S$, и в случае, когда M – гиперплоскость, по критерию Джеймса $X \in (Rf)$.

г) $\Rightarrow$ б) по предложению 1.7.

б) $\Rightarrow$ в). Так как $X \in (Rf)$, в условии (*) $h_{n_k} \rightarrow h$, $x_{n_k} \rightarrow x$, а тогда $h, x \in S$, ибо $h, x \in \overline{\text{co}}\{\dots\}$. Ввиду $X \in (CD)$ $h_{n_k} \rightarrow h$, $x_{n_k} \rightarrow x$ и $X \in (C\delta R)$.

в) $\Rightarrow$ а) по теореме 1.2а).

Для завершения доказательства достаточно напомнить, что $(LUR) \subset (R') \subset (R)$ и сослаться на предложение 1.11.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 1.12 остается верным (доказательство меняется незначительно), если условие $k \geq n \rightarrow \infty$ заменить на $k, n \rightarrow \infty$; δS заменить на γS или $\bigcup_{r>0} \gamma_r S$; $(C\delta R)$ $[(\delta R)]$ заменить на $(C\gamma R)$ $[(\gamma R)]$.

Следующая теорема не отмечалась в литературе, хотя легко следует из известных результатов.

ТЕОРЕМА 1.3. Следующие условия эквивалентны:

- а) $X \in (CD) [X \in (D)]$;
- б) $F \subset AC \quad \forall M \in \mathcal{F} [F \subset T' \quad \forall M \in \mathcal{F}]$;
- в) $F \subset wAC \quad \forall M \in \mathcal{F} [F \subset T \cap wAC \quad \forall M \in \mathcal{F}]$;
- г) $F \subset E \quad \forall M \in \mathcal{F} [F \subset T \quad \forall M \in \mathcal{F}]$;
- д) $F \subset \overline{E} \quad \forall M \in \mathcal{F} [F \subset \overline{E} \cap \overline{U} \quad \forall M \in \mathcal{F}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\Rightarrow$ б) по теореме В' (см. §2 введения).

б) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ г) $\Rightarrow$ д) очевидны.

д) $\Rightarrow$ а). С.В. Конягин [86, теорема 2] в произвольном $X \notin (CD)$ указал множество $M \in \mathcal{F}$, для которого $z\dot{M} = 1 - f(z)$, где $z \in B_r = B(0, r)$, $0 < r < 1$, $f \in S^*$, $B_r \cap E = \emptyset$. Ясно, что $\dot{B}_r \subset F$, $0 \in F \cap \overline{E}$, т.е. не выполняется д). Остается заметить, что если $X \notin (R)$, то $F \not\subset \overline{U}$ для некоторого $M \in \mathcal{F}$ (см. схему 1).

СХЕМА 5а (подразумевается, что к каждому включению добавляются слова “для всех $M \in \mathcal{F}$ ”; знак & показывает, что условие вытекает из конъюнкции условий; пунктиром обозначено утверждение, вытекающее из других; $(G) = (S)$).

СХЕМА 5б отличается от схемы 5а тем, что: $(CLUR) [(CD), (wCLUR)]$ заменяется на $(LUR) [(D), (wLUR)]$; $AC [wAC, E, \overline{E}]$ заменяется на $T' [T \cap wAC, T, \overline{E} \cap \overline{U}]$.

СХЕМА 6а (к каждому включению добавляются слова “для всех $M \in \mathcal{F}$ ”).

В схемах 7а и 7б можно T' заменить на $T \cap wAC$, так как эти два множества равны в тех и только тех пространствах, в которых слабая сходимость на единичной сфере совпадает с сильной.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & \text{T. B}' & & \\
 & \downarrow & & \uparrow & \\
 (LD) & \longleftarrow & (LUR) & \xleftarrow{(F), \text{ T. 1.1B}} & F \cap E \subset T' \\
 & & \downarrow & & \uparrow \\
 & & \text{Pr. 1.2, T. 1.2r}' & &
 \end{array} \\
 (F) \cap (LD) \xleftarrow{\text{Pr. 1.8}} (F) \cap (LUR) \dashrightarrow F \cap E = T' \\
 (F) \xleftarrow{\text{ T. B}} F \cap E \supset T'
 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccc}
 & & (G), \text{Cx. 46} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 (LUR) & \xrightarrow{\text{Cx. 46}} & \Gamma' \subset T' & \xrightarrow{\text{Cx. 3}} & G' \subset T' \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 (Rf) & & & &
 \end{array}$$

Cx. 1

$$(G) \xleftarrow{\text{T. B}} T' \subset G'$$
$$\begin{array}{ccccc}
& & \downarrow & \xrightarrow{(F), \text{Cx. 46}} & \\
(LUR) & \xrightarrow{\text{Cx. 46}} & \Gamma' \subset T' & \xrightarrow{\text{Cx. 3}} & F \subset T' \\
(Rf) & & & \xleftarrow{\text{Cx. 1}} & \\
(F) \cap (Rf) \cap (LUR) & \dashleftarrow & & & \dashrightarrow F = T' \\
(F) & & \xleftarrow{\text{T. B}} & & \xrightarrow{\quad} T' \subset F
\end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in G' \cap E, y \in P_0$. Как обычно, считаем $x = 0, 0M = 1$, так что $\vec{y} \in S$. Пусть $v_0 \in S$ таково, что $(vM - 0M)/v_0 \rightarrow 1$ при $v \in (0, v_0), v \rightarrow 0$ (вектор $\vec{0v_0}$ — направление градиента метрической функции d_M). Существует единственное $f \in S^*$ с $f(y) = 1$ (градиент нормы в точке y). Покажем, что $-f$ есть градиент Фреше (а) или Гато (б) метрической функции $z \rightarrow zM$ в точке $z = 0$, т.е. если $h_n \in S$ ($h_n \equiv h$ в случае (б)), $x_n/\|x_n\| = h_n, x_n \rightarrow 0$, то $[x_nM - 0M - f(x_n)]/x_n \rightarrow 0$.

Заметим прежде всего, что $f(v_0) = -1$. Действительно, имеем при $v \rightarrow 0$, $t = v0$:

$$\begin{aligned} 0 \sim \frac{vM-1}{v0} - 1 &\leq \frac{vM-1}{v0} + f(v_0) \\ &\leq \frac{vy-1+f(v)}{v0} = \frac{\|y-tv_0\| - \|y\| - f(-tv_0)}{t} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(ибо f — градиент нормы в y). Положим $y = -v_0$, $\varepsilon(v) = \sqrt{(vy' - vM)/v0} + v0$. Имеем $(vy' - vM)/v0 = 1 - (vM-1)/v0 \rightarrow 0$, $\varepsilon(v) \rightarrow 0$ при $v \rightarrow 0$, $v \in (0, v_0)$ и $\varepsilon(v_0)\|v_0\| \geq 1$. Можно считать $x_n0 < 1$. Тогда существуют $v_n \in (0, v_0)$ с $\varepsilon(v_n)v_n0 = x_n0$. Далее, находим:

$$\begin{aligned} 0 \leq I_n &= \left(1 - \frac{v_nM-1}{v_n0}\right) \cdot \frac{v_n0}{x_n0} = \frac{v_ny' - v_nM}{v_n0} \cdot \frac{v_n0}{x_n0} < \varepsilon^2(v_n) \cdot \frac{1}{\varepsilon(v_n)} \rightarrow 0, \\ \frac{x_nM-1+f(x_n)}{x_n0} &\geq \frac{v_nM - v_nx_n - 1 + f(x_n)}{x_n0} \\ &= \left(\frac{v_nM-1}{v_n0} - 1\right) \cdot \frac{v_n0}{x_n0} + \frac{v_n0 - v_nx_n + f(x_n)}{x_n0} = -I_n + J_n. \end{aligned}$$

При $t_n = \varepsilon(v_n) = x_n0/v_n0$ имеем $x_n - v_n = x_n0 \cdot h_n + v_n0 \cdot y' = v_n0 \cdot (y' + t_n h_n)$, и так как f — градиент нормы в y' , то

$$J_n = -\frac{\|y' + t_n h_n\| - \|y'\| - f(t_n h_n)}{t_n} \rightarrow 0.$$

Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_nM - 1 + f(x_n))/x_n0 \geq 0$. С другой стороны,

$$\frac{x_nM - 1 + f(x_n)}{x_n0} \leq \frac{\|y - t'_n h_n\| - \|y\| - f(-t'_n h_n)}{t'_n} \rightarrow 0,$$

где $t'_n = \|x_n\|$. Обратные импликации в (а), (б) получаются при $M = \{0\}$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Теорему 1.4 можно рассматривать как обобщение теоремы Фитцпатрика (теорема В): у него вместо Γ' берется T' .

2. После того как эта работа ([БВ]) была закончена, мы узнали, что в [62], [34] были получены близкие результаты в этом направлении, при этом вместо Γ' рассматриваются более жесткие условия.

В качестве следствия получим результат В.С. Балаганского, доказанный им ранее по-другому и опубликованный в [11]. Это аналог теоремы В применительно к слабой топологии.

ТЕОРЕМА 1.5. *Следующие условия на банахово пространство X эквивалентны:*

- а) $X \in (SA) \cap (F)$ [$X \in (SA) \cap (G)$];
- б) $\forall M \in \mathcal{F} \quad T \cap wAC \subset F$ [$T \cap wAC \subset G$];
- в) для любого слабо компактного $M \quad T \subset F$ [$T \subset G$].

В пунктах б) и в) вместо G можно поставить G' .

СХЕМА 8а (подразумевается, что к каждому включению добавляются слова “для всех $M \in \mathcal{F}$ ”).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\Rightarrow$ б) по теореме 1.4 и предложению 1.4г).

б) $\Rightarrow$ в) очевидно.

в) $\Rightarrow$ а). То, что $X \in (SA)$, вытекает из предложений 1.6 и 1.2. Остальное получим, взяв $M = \{0\}$. По предложению 1.2 $G \cap E = G' \cap E$.

Из теорем 1.1, 1.2, 1.5 и предложения 1.2 можно получить следующие утверждения:

$$(G) \cap (wLUR) \cap (SA) \iff G \cap E = T \cap wAC \quad \forall M \in \mathcal{F},$$

$$\begin{aligned}
 (F) \cap (wLUR) \cap (SA) &\iff F \cap E = T \cap wAC \quad \forall M \in \mathcal{F} \\
 &\iff G \cap E = F \cap E = T \cap wAC \quad \forall M \in \mathcal{F}.
 \end{aligned}$$

§ 5. Множества с выпуклым дополнением

Этот класс множеств изучается в теории аппроксимаций (см., например, [13], [14], [16] и цитируемые там работы).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. Пусть $M \in \mathcal{F}_{cc}$. Тогда

- а) $\delta'S \subset E$, точнее: если $x \in \delta'S$ и $h \in S$ – точка, фигурирующая в определении $\delta'S$, то $y_0 = x - xM \cdot h \in Px$;
- б) $\alpha S \subset S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_n = x + t_n h$, $t_n > 0$, $t_n \rightarrow 0$, $(v_n M - xM)/v_n x \rightarrow 1$. Допустим, $y_0 \notin Px$, тогда для некоторого $y \notin M$ $y_0 \in (x, y)$, $xy > xM$. Найдутся $y_n \in \partial M$ такие, что $\varepsilon_n = (xy_n - xM)/v_n x \rightarrow 0$. Можно считать, что y_n не принадлежит прямой xy , в противном случае $y_n \rightarrow y_0$ и $y_0 \in Px$. Проведем прямую $v_n y'_n$ параллельно xy_n , до пересечения с прямой yy_n в точке y'_n . В силу выпуклости ${}^c M$ $y'_n \in M$. Из подобия треугольников $v_n y'_n / xy_n = v_n y / xy$, и мы получим:

$$1 \sim \frac{v_n M - xM}{v_n x} = \frac{v_n M - xy_n}{v_n x} + \varepsilon_n \leq \left(\frac{v_n y'_n}{xy_n} - 1 \right) \frac{xy_n}{v_n x} + \varepsilon_n = \frac{xy_n}{xy} + \varepsilon_n \sim \frac{xM}{xy},$$

что противоречит условию $xy > xM$. Поэтому $y_0 \in M$ и $y_0 \in Px$, т.е. доказано а). Так как $\alpha S \subset \delta'S$ и по а) $x - xM \cdot h \in Px$, то $x \in S$, $\alpha S \subset S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.14. Если $M \in \mathcal{F}_{cc}$, то $G' = G \cap \delta S$, а если еще X сепарабельно, то G' – плотное в ${}^c M$ G_δ -множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1.2 $G' \subset \delta S$ и $G' \subset G \cap \delta S$. Пусть $x \in G \cap \delta S$, f – производная Гато функции d_M в точке x . Так как d_M вогнута на ${}^c M$, то f – суперградиент, т.е. $f(y) - f(x) \geq d_M(y) - d_M(x) \quad \forall y \in {}^c M$. Ввиду $f(x - y) \leq d_M(x) - d_M(y) \leq xy \quad \forall y \in {}^c M$ легко получить, что $\|f\| \leq 1$. С другой стороны,

$$\|f\| \cdot \|y - x\| \geq f(y) - f(x) \geq yM - xM, \quad \|f\| \geq \frac{yM - xM}{yx}.$$

Правая часть может быть сделана сколь угодно близкой к 1, ибо $x \in \delta S$. Итак, $\|f\| = 1$, и $f \in G'$. Остается напомнить, что по известной теореме Мазура G , а по теореме 0.1 δS являются плотными в cM G_δ -множествами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.15. Пусть даны условия:

- а) $X \in (LUR) \cap (G)$; а') $X \in (Rf) \cap (LUR) \cap (G)$;
 б) $\forall M \in \mathcal{F}_{cc} \quad G' \cap E = T'$; б') $\forall M \in \mathcal{F}_{cc} \quad G' = T'$.

Тогда а) $\Leftrightarrow$ б), а') $\Leftrightarrow$ б').

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямые импликации выполняются по схемам 6, 7. Докажем обратные. Если $f \in S^*$ достигает максимума на B и $N = \{z : f(z) \geq 1\}$, то $X \setminus N \subset G' \cap E \subset T'$ и $X \in (R)$. Предположим, что $X \notin (G)$, тогда найдутся $x \in S$, $f_1, f_2 \in S^*$, $f_1 \neq f_2$, такие, что $f_1(x) = f_2(x) = 1$. Для $N_i = \{z : f_i(z) \geq 1\}$, $i = 1, 2$, $M = N_1 \cup N_2$ имеем $M \in \mathcal{F}_{cc}$, $0M = 0N_1 = 0N_2 = \|x\| = 1$, $0 \in T'_{N_1} \cap T'_{N_2}$. Следовательно, $0 \in T'_M$ и $0 \in G'$. Нетрудно видеть, что $zM = \min\{1 - f_1(z), 1 - f_2(z)\} \forall z \in {}^cM$. Но вогнутая функция d_M имеет в точке 0 два различных суперградиента $-f_1$ и $-f_2$: $zM - 0M \leq -f_i(z)$, $z \in {}^cM$, $i = 1, 2$, что противоречит соотношению $0 \in G'$. Итак, $X \in (G)$. Тогда для $M = X \setminus \overset{\circ}{B}$ имеем $\overset{\circ}{B} \setminus \{0\} \subset G' \cap E \subset T'$, а поэтому $X \in (LUR)$ (теорема 1.16)). Заметим еще, что б') влечет $X \in (Rf)$ (схема 1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.16. Если $X \in (Rf)$, $M \in \mathcal{F}_{cc}$, то $\gamma S \subset S$.

При доказательстве теоремы 3.4 [В] фактически установлено, что $\gamma S \subset \alpha S$ (см. там же утверждения (3.3) и (3.4)). По предложению 1.13 $\alpha S \subset S$.

Следующие две теоремы принадлежат В. С. Балаганскому. Первоначальные доказательства изменены с целью использования предыдущего изложения.

ТЕОРЕМА 1.6 [16]. Следующие условия эквивалентны:

- а) $X \in (Rf) \quad [X \in (Rf) \cap (R)]$;
 б) $\forall M \in \mathcal{F}_{cc} \quad F \subset wAC \quad [F \subset T \cap wAC]$;
 в) $\forall M \in \mathcal{F}_{cc} \quad F \subset E \quad [F \subset T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация б) $\Rightarrow$ в) очевидна, в) $\Rightarrow$ а) вытекает из схемы 1.

а) $\Rightarrow$ б). В доказательстве предложения 1.2, (формула (1)), показано, что если $x \in F$, $f = d'_M(x)$, $y_n \in M$, $xy_n \rightarrow xM$, то $f(x - y_n)/xy_n \rightarrow 1$. Будем считать $x = 0$, $0M = 1$; не уменьшая общности, предполагаем, что $y_n \rightarrow y$. Тогда $\|y\| \leq \varliminf \|y_n\| = 1$, $f(y) = \lim f(y_n) = -1$. Поэтому $y \in S$. Точка $h = -y$ удовлетворяет требованию, предъявляемому к точке $x = 0 \in G''$. Но $G'' \subset \delta'S$ и в силу предложения 1.13 $y \in P0$, значит, $0 \in wAC$. В случае $X \in (R)$ точка $y \in P0$ — единственная ввиду условия $f(y) = -1$.

Теорема 1.6 — аналог теоремы 1.3 применительно к множествам с выпуклым дополнением. То же можно сказать о следующей теореме и теореме А.

ТЕОРЕМА 1.7 [16]. Пусть $X \in (Rf) \quad [X \in (Rf) \cap (R)]$, $M \in \mathcal{F}_{cc}$. Тогда множество ${}^cM \setminus wAC \quad [{}^cM \setminus (T \cap wAC)]$ — множество первой категории.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $X \in (Rf)$ есть пространство Асплунда [107], т.е. множество точек дифференцируемости по Фреше любой непрерывной выпуклой функции, определенной на открытом выпуклом подмножестве $U \subset X$, есть G_δ -множество, плотное в U . Функция $-d_M$ выпукла на cM , поэтому F есть G_δ -множество, плотное в cM . Следовательно, по теореме 1.6 множество $wAC [T \cap wAC]$ содержит плотное в cM G_δ -множество, и поэтому его дополнение до cM является множеством первой категории.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для множеств с выпуклым дополнением справедливы многие соотношения из приведенных ранее схем. Так, в схемах 1, 2, 3, 6 условие $\forall M \in \mathcal{F}$ можно заменить условием $\forall M \in \mathcal{F}_{cc}$. Кроме того, в силу включения $\delta'S \subset E$ (предложение 1.13) соотношение $\delta'S \subset U$ в схеме 2 можно заменить на $\delta'S \subset T$, а в схеме 3 вывести утверждение $X \in (Rf) \Rightarrow F \subset G' \subset \delta'S \subset E$ (ср. теорему 1.6). Соотношение $\delta'S = \delta''S \ \forall M \in \mathcal{F}_{cc}$ фактически доказано в предложении 1.13.

В схемах 4а, 4б условие $\forall M \in \mathcal{F}$ можно заменить на $\forall M \in \mathcal{F}_{cc}$, если предварительно исключить импликации, опирающиеся на теорему 1.1г) или 1.1д).

ГЛАВА II СТРУКТУРА ЧЕБЫШЁВСКИХ И БЛИЗКИХ К НИМ МНОЖЕСТВ

В этой главе рассматриваются “солнечность”, выпуклость и другие свойства чебышёвских и близких к ним множеств при различных ограничениях на множество “плохих точек”, например, на множество W точек из cM , не являющихся δ -солнечными. W меньше рассматривавшихся ранее множеств “плохих” точек, таких как точки разрыва метрической проекции или негладкости метрической функции (однако совпадает с ними в гильбертовом пространстве и других, см. теорему 1.2), поэтому соответствующие ограничения слабее. В §1 множество W фактически представляется как множество изолированных точек, в частности, к этому приводит ограничение $|\overline{W}| < 2^{\aleph_0}$. В §2 рассматриваются ограничения типа $|\overline{W}| < |X|$. В §3 исследуется случай локально компактного M , а в §4 – случай, когда W лежит в гиперплоскости. Еще несколько вариантов ограничений рассмотрено в §5.

Вначале о соотношении “солнечности” и выпуклости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (см. [В]). *Выпуклое множество $M \in \mathcal{F}$ является γ -солнцем, а выпуклое множество существования – солнцем. Солнце и α -солнце выпуклы в гладких пространствах. γ -солнце (δ -солнце) выпукло в пространстве X с $X^* \in (R)$, в частности, в $X \in (Rf) \cap (S)$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $M \in \mathcal{F}$.

- а) Если $X \in (CLUR)$, то $\gamma S \cap E \subset \alpha S$, если $X \in (R)$, то $\alpha S \cap E \subset S$, а если $X \in (LUR)$, то $\gamma S \cap E \subset S$.
- б) Если $X \in (D)$, то $LSC \cap E \cap \gamma S^\circ \subset S$, $T' \cap \gamma S^\circ \subset S$.
- в) Если $X \in (\gamma R)$, то $\gamma S \subset T \cap S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай а) фактически содержится в [В, теоремы 3.6, 3.8], б) легко вытекает из леммы 0.8, в) – из леммы 0.6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $X \in (S)$, $M \in \mathcal{F}$, $x \in {}^cM$. Тогда если (а) $x \in \overline{\alpha S}$ или (б) $X \in (CLUR)$, $x \in \overline{E} \cap \gamma S$ (вариант: $x \in E \cap \gamma S$), или (в) $X \in (\gamma R)$, $x \in \gamma S$, то M отделяется гиперплоскостью от шара $B(x, xM)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу $\overline{E} \cap \gamma S \subset \overline{E \cap \gamma S}$ и предложения 2.2 случаи (б), (в) сводятся к (а). В известных доказательствах выпуклости солнца и α -солнца фактически показано, что если $z \in \alpha S$ ($z \in S$), то M отделяется гиперплоскостью от шара $B(z, zM)$. Поэтому если $x_n \rightarrow x$, $x_n \in \alpha S$, то $\exists f_n \in S^*$, $\sup f_n(B(x_n, x_nM)) \leq \inf f_n(M)$. Пусть f – w^* -предельная точка последовательности f_n , z – любая точка $\overset{\circ}{B}(x, xM)$, y – любая точка M . Тогда $f_n(z) \leq f_n(y) \quad \forall n > n_0$ и $f(z) \leq f(y)$. Поскольку $x_nM \leq f_n(y - x_n)$, то $xM \leq f(y - x)$ и $f \neq 0$. Если $f(z) \leq c \leq f(y) \quad \forall z \in \overset{\circ}{B}(x, xM)$, $\forall y \in M$, то $f^{-1}(c)$ – искомая гиперплоскость.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $X \in (S)$, $M \in \mathcal{F}$. Если S или αS плотно в cM , то M выпукло.

Доказательство вытекает из предложения 2.3.

§ 1. Метод изолированной точки

ЛЕММА 2.1. Пусть $M \in \mathcal{F}$, x_0 – изолированная точка множества $W = {}^cM \setminus \delta S$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что:

- (1) $x_0M = x_0x + xM \quad \forall x \in B_\varepsilon x_0$;
- (2) $P^\delta x \subset P^\delta x_0 \quad \forall x \in B_\varepsilon x_0, \quad \forall \delta \geq 0$;
- (3) $Px \subset Px_0 \quad \forall x \in B_\varepsilon x_0$;
- (4) $x_0 \in \overline{E} \implies x_0 \in E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $R = \rho(x_0, W \setminus \{x_0\})$, $r = R/2$. По лемме 0.2 $x_0 \notin \gamma_r S$, а так как $\gamma_r S$ замкнуто, то для некоторого $\varepsilon \in (0, r)$ $B_\varepsilon x_0 \cap \gamma_r S = \emptyset$. Пусть $x \in B_\varepsilon x_0 \setminus \{x_0\}$, $0 < \theta_n < 1$, $\theta_n \rightarrow 1$; $z_n \succ_{\theta_n} x$ – максимальный в смысле θ_n -порядка элемент в $B_r x \ni x_0$. Тогда $\theta_n \cdot z_n x \leq z_n M - xM \leq z_n x$. При $n > n_0$ $z_n x < r$, в противном случае мы имели бы $x \in \gamma_r S$. По лемме 0.1а) $z_n \in W$, значит, $z_n = x_0$, ибо $B_r x \subset \overset{\circ}{B}_R x_0$. Поэтому справедливо (1). Из (1) легко выводится (2), а (3) есть (2) при $\delta = 0$. (4) следует из (3).

Для дальнейшего необходимо сделать некоторые пояснения. Известно [99, с. 455], что совершенное множество в полном метрическом пространстве имеет мощность $\geq 2^{\aleph_0}$. Следовательно, если D – замкнутое множество, I – множество изолированных точек D и $|D| < 2^{\aleph_0}$, то $I \neq \emptyset$ и, более того, $D = \overline{I}$ (в противном случае точка $t \in D \setminus \overline{I}$ имеет в $D \setminus \overline{I}$ замкнутую окрестность мощности $\geq 2^{\aleph_0}$). Напомним, что мы называли точку $x \in S$ LUR -точкой, если выполняется условие локальной равномерной

выпуклости: $x_n \in S$, $\|x_n + x\| \rightarrow 2 \Rightarrow x_n \rightarrow x$. Это эквивалентно тому, что фиксированная точка $z \in (x, 0)$ является точкой из T'_M для $M = X \setminus \overset{\circ}{B}$ (лемма 1.2), а также тому, что $\delta(x, \varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$, где $\delta(x, \varepsilon) = \inf\{1 - \|x + y\|/2 : y \in S, xy \geq \varepsilon\}$ – модуль выпуклости в точке x . Если $X \in (D)$, то по теореме А $X \setminus T'_M$ – первой категории для любого $M \in \mathcal{F}$. Применяя это к $M = X \setminus \overset{\circ}{B}$, получим в частности, что множество LUR -точек плотно в S , если $X \in (D)$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $M \in \mathcal{F}$, w – изолированная точка W . Тогда существует b такое, что $0 \leq b < wM$ и $P_{M_b}w = S(w, wM - b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $wM = wx + xM \quad \forall x \in B_\varepsilon w$. По соотношению Ефимова–Стечкина $wM = wM_b + b$, где $b = wM - \varepsilon$. Если $x \in S(w, wM - b)$, то $wx = wM - b = wM_b$, $xM = b$ и $x \in M_b$, поэтому $x \in P_{M_b}w$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Если $X \in (R)$, а M – чебышёвское, то W не имеет изолированных точек и $|\overline{W}| \geq 2^{\aleph_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем следующий результат Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина [ЕС]: $X \in (R) \iff$ для любого $b > 0$ и любого чебышёвского множества M множество M_b является чебышёвским. См. также [136], [9]. Если w – изолированная точка W , то возьмем b из леммы 2.2, что приводит к противоречию. Поскольку $\overline{W}$ тоже не имеет изолированных точек, $|\overline{W}| \geq 2^{\aleph_0}$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $M \in \mathcal{F}$. Предположим, что W содержится в замыкании множества I своих изолированных точек (в частности, если $|\overline{W}| < 2^{\aleph_0}$). Тогда если а) $X \in (R)$, а ${}^cM \subset \overline{E}$ или б) множество LUR -точек плотно в S (в частности, если $X \in (LUR)$ или $X \in (D)$), то

$$(*) \quad Pw = S(w, wM) \quad \text{для всех } w \in I,$$

$$(5) \quad M = K \setminus \bigcup_{w \in W} \overset{\circ}{B}_w,$$

где K – γ -солнце, а шары $\overset{\circ}{B}_w = \overset{\circ}{B}(w, wM) \subset K$ попарно не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w \in I$, докажем, что $S(w, wM) \subset M$. Не теряя общности, считаем, что $w = 0$, $0M = 1$. По лемме 2.1 для некоторого $\delta \in (0, 1)$ и всех $x \in B_\delta = B_\delta 0$ имеем $0M = 0x + xM$, а если $x \in E$, то $Px \subset P0 \neq \emptyset$. Если $y \in Px$, то $0y = 0M = 0x + xy$. В случае а) поэтому $y = \overline{x} = x/\|x\|$, $\overline{x} \in M$, а так как x пробегает плотное в B_δ множество, то $S \subset M$. В случае б) если $\overline{x}$ – LUR -точка S , то из $y_n \in M$, $xy_n \rightarrow xM$ следует, что $y_n \in N$, $xy_n \rightarrow xN$, где $N = X \setminus \overset{\circ}{B}$. Поскольку $x \in (\overline{x}, 0)$, то, как указано выше, $x \in T'_N$, $y_n \rightarrow \overline{x}$, $\overline{x} \in M$, $S \subset M$. Итак, в обоих случаях для точки $w \in I$ имеем $S_w = S(w, wM) \subset M$. Значит, $\forall w, w' \in I \quad S_w \cap \overset{\circ}{B}_{w'} = \emptyset$, а тогда и $\overset{\circ}{B}_w \cap \overset{\circ}{B}_{w'} = \emptyset$ при $w \neq w'$. Если теперь $w \in W \setminus I$, то $w_n \rightarrow w$, где $w_n \in I$. Далее, $w_n M \leq w_n S_{w_k} = w_n B_{w_k} \leq w_n w_k \rightarrow 0$ при $n, k \rightarrow \infty$, а тогда $w \in M$. Следовательно, $W = I$, и при $K = M \cup \bigcup_{w \in W} B_w$ имеем (5), при этом $K = \overline{K}$, $xK = xM$ для

$x \notin K$, поэтому $\delta S_M \setminus K \subset \delta S_K$. Ввиду $W \subset \overset{\circ}{K} \setminus X \setminus K \subset \delta S_M$. Отсюда K — δ -солнце, а по теореме Б — γ -солнце.

Заметим, что предложение 2.5 содержится в теореме 2.1. Утверждение (*) для случая гильбертова пространства установили также Вестфаль и Фреркинг [144].

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть в условиях теоремы 2.1 либо

- а) $X \in (R)$, $X^* \in (R)$, ${}^cM \subset \overline{E}$ (эти условия выполняются, если, например, $X \in (D) \cap (S)$), либо
- б) $X \in (LUR) \cap (S)$, ${}^cM \subset \overline{E}$.

Тогда

$$M = \overline{{}^cM} \setminus \bigcup_{w \in W} \overset{\circ}{B}_w,$$

где шары $\overset{\circ}{B}_w = \overset{\circ}{B}(w, wM) \subset \overline{{}^cM}$ попарно не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество K в (5) выпукло: а) в силу предложения 2.1, б) в силу предложений 2.2, 2.4. Так как $S(w, wM) \subset M$, то $K = \text{co } M = \overline{{}^cM}$.

В следующей теореме под звездным множеством понимается такое $A \subset X$, что для некоторой точки $a \in A$ и всех $\lambda \in [0, 1]$ $(1 - \lambda)a + \lambda A \subset A$. Говорят также, что A звездно относительно a . Например, выпуклое множество звездно относительно любой своей точки.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $M \in \mathcal{F}$, ${}^cM \subset \overline{E}$, $W \subset \overline{I}$ (в частности, $|\overline{W}| < 2^{\aleph_0}$) и для каждого $x \in E$ либо Px звездно, либо $\text{diam } Px < 2 \cdot xM$, либо — в случае $\dim X = \infty$ — Px компактно. Тогда M — γ -солнце (${}^cM = \gamma S$), а если $X \in (CLUR)$, то ${}^cM \subset \overline{\alpha S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $W = \emptyset$: тогда по теореме Б M — γ -солнце, а если $X \in (CLUR)$, то (предложение 2.2) $E = \gamma S \cap E \subset \alpha S$, откуда ${}^cM \subset \overline{\alpha S}$. Допустим противное: $W \neq \emptyset$ и $x_0 \in I$. Считаем, как обычно, $x_0 = 0$, $0M = 1$. По лемме 2.1 $P0 \neq \emptyset$ и $Pz \subset P0$ для всех $z \in B_\delta 0 \cap E$. Покажем, что это противоречит условиям на $P0$. Допустим вначале, что $P0$ звездно относительно точки $y \in P0$, и пусть $x = -\delta y$. Для всех $z \in B_\delta 0 \cap E$, если $z' \in Pz$, то $zz' = zM$, $z' \in P0$. Тогда $zM = zP0$, причем по непрерывности это верно для всех $z \in B_\delta 0$. Из звездности $P0$ нетрудно вывести, что $xP0 = xy$, а из предыдущего при $z = x$ имеем $xM = xP0$. Но тогда $xM = xy$, $0M = 0x + xM$, $1 = 0x + xy = 2\delta + 1$, что невозможно. Теперь обнаружим противоречие с компактностью $P0$ (в случае $\dim X = \infty$). Прежде всего, соотношение $Px \subset P0$ выполняется уже для всех $x \in B_\delta 0$ и $B_\delta 0 \subset E$ (это легко проверить). Возьмем $\varepsilon \in (0, \delta)$ и рассмотрим ε -сеть $x_1, x_2, \dots, x_n \in P0$ для множества $P0$, функционалы $f_i \in S^*$, $x \in X$ с $\|x\| = \delta$, $f_i(x) = 0$, $f_i(x_i) = 1$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Имеем: $xM = 1 - \delta$ и если $x' \in Px$, то $x' \in P0$, $x'x_i \leq \varepsilon$ для некоторого i , $1 = f_i(x_i - x) \leq xx_i \leq xx' + x'x_i \leq 1 - \delta + \varepsilon < 1$, что противоречиво.

Установим противоречие с условием $\text{diam } P0 < 2$. Возьмем произвольно $y \in P0$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$; выберем $x \neq 0$, $x \in B_\delta 0 \cap E$ так, чтобы для $\overline{x} = x/\|x\|$ и $u = -\overline{x}$ иметь оценку $uy < \varepsilon$. Пусть $x' \in Px$, тогда по лемме 2.1 $1 = \|x\| + xx'$, $x' \in P0$. Нетрудно видеть, что $x' = (1 - \lambda)\overline{x} + \lambda z$, $\lambda = xx' = x\overline{x}$, $z = (x' - x)/x'x \in S$. Отсюда $[\overline{x}, z] \subset S$, а поэтому $ux' = 2$, $yx' \geq 2 - \varepsilon$. Значит, $\text{diam } P0 = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства видно, что условие $\text{diam } Px < 2 \cdot xM$ можно заменить более слабым: $r(Px) < 2 \cdot xM$, где $r(A) = \inf_{y \in A} \sup_{z \in A} yz$ — относительный чебышёвский радиус A .

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Теорема 2.2 остается верной, если условие ${}^cM \subset \overline{E}$ заменить условием $X \in (CD)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. теорему А (§2 введения).

СЛЕДСТВИЕ 2.3. В условиях теоремы 2.2, если $X^* \in (R)$ или $X \in (CLUR) \cap (S)$, то M выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. предложение 2.1 и 2.4.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть $X^* \in (R)$ или $X \in (CLUR) \cap (S)$; $M \in \mathcal{F}$ — либо множество единственности с $|{}^cM \setminus T'| < 2^{\aleph_0}$, либо чебышёвское множество, у которого замыкание множества точек разрыва метрической проекции имеет мощность $< 2^{\aleph_0}$. Тогда M выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1.4а), в), $W \subset Z = {}^cM \setminus T'$ и состоит из точек разрыва, поэтому $|\overline{W}| < 2^{\aleph_0}$; из $|\overline{Z}| < 2^{\aleph_0}$ следует ${}^cM \subset \overline{E}$; выполняются и другие условия теоремы 2.2. Далее применяем следствие 2.3.

Следствие 2.4 и приводимая ниже теорема 2.3 непосредственно обобщают некоторые результаты В. С. Балаганского, относящиеся к гильбертову пространству [9] и к $X \in (D) \cap (F)$ [11].

ЛЕММА 2.3. Пусть $X \in (R)$, $M \in \mathcal{F}$, $x \in \delta'S$ (или $x \in \delta S$, но $X \in (LUR)$); $b > 0$, $x \in P_{Q^b}y$, $x' \in Px$. Тогда $y \in [x, x']$ или $x' \in [x, y]$, а если $yQ^b < b$, то $y \in [x, x']$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай, указанный в скобках, сводится к основному по теореме 1.2г). Не теряя общности, считаем $x = 0$, $0y = 1$. В силу условия $x \in \delta'S$ найдется последовательность $v_n = t_n h$, где $h \in S$, $t_n \rightarrow +0$, $(v_n M - 0M)/t_n \rightarrow 1$. Ввиду $zM = zM_b + b$ для $z \notin M_b$ имеем $v_n M_b/t_n \rightarrow 1$. Так как $B = B(y, 1) \subset M_b$, то $v_n M_b \leq v_n B = v_n y - 1 \leq t_n$, тогда $(v_n y - 1)/t_n \rightarrow 1$. По лемме 1.1в) $h = -y$ и, возвращаясь к прежним обозначениям, $x \in (v_n, y)$. Поскольку $x' \in Px$ влечет $x \in P_{Q^b}x'$, то в приведенном рассуждении можно вместо y подставить x' . Получим $x \in (v_n, x')$, а значит, либо $y \in [x, x']$, либо $x' \in [x, y]$ (последнее, очевидно, исключается, если $yQ^b < b$).

В дальнейшем $W' = {}^cM \setminus (\delta'S \cap E)$; ясно, что $W \subset W'$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $X \in (D)$, $M \in \mathcal{F}$. Если $|W'| < 2^{\aleph_0}$, то

$$(6) \quad M = K \setminus \bigcup_{w \in W} \overset{\circ}{B}_w,$$

где K — γ -солнце, W дискретно, а шары $\overset{\circ}{B}_w = \overset{\circ}{B}(w, wM) \subset K$ попарно не пересекаются.

Кроме того, S плотно в cK ; если дополнительно $X \in (S)$, то $K = \text{co } M$, $W = W'$; последнее из равенств верно и в случае $X \in (\gamma R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вначале, что cM связно и докажем, что

$${}^cM \setminus Q^{b_0} \subset \delta S \quad (b_0 = \sup\{xM : x \in X\}).$$

Пусть $x \in {}^cM \setminus Q^{b_0}$ произвольно. Найдется b с $xM < b < b_0$, $\Gamma^b \subset \delta'S \cap E$, в противном случае $\forall b \in (xM, b_0) \exists x_b \in \Gamma^b \setminus (\delta'S \cap E) \subset W'$, а это противоречит условию $|W'| < 2^{\aleph_0}$. Положим $Z = \{y \in {}^cM : yQ^b < b\}$ и рассмотрим случай $x \in \overline{Z}$. Тогда найдутся $y_n \rightarrow x$, $y_nQ^b < b$, $y_n \in T'_{Q^b}$ (теорема А). Если $z_n = P_{Q^b}y_n$, то $z_n \in \Gamma^b$, поэтому найдется $z'_n \in Pz_n$ и по лемме 2.3 $y_n \in [z_n, z'_n]$. Ввиду соотношений

$$xQ^b \sim y_nQ^b = y_nz_n = z_nz'_n - y_nz'_n = b - y_nM \sim b - xM$$

получаем $x \in Z$. Это означает, что Z открыто-замкнуто в cM , а в силу связности cM имеем $Z = {}^cM$. Случай $x \notin \overline{Z}$, таким образом, невозможен, так что приведенные выше рассуждения верны $\forall x \in {}^cM$. Так как $xQ^b = b - xM$ (см. выше), то $x \in \gamma_r S$, где $r = xQ^b$. По лемме 0.2 $x \in \delta S$ и требуемое доказано. Следовательно, $W = {}^cM \setminus \delta S \subset Q^{b_0}$, а по лемме 0.1 $Q^{b_0} \subset W$. Итак, $W = Q^{b_0} = \overline{W}$, поэтому $|\overline{W}| \leq |W'| < 2^{\aleph_0}$. По теореме 2.1 (используется связность cM и то, что ${}^cM \subset \overline{E}$ в силу $|W'| < 2^{\aleph_0}$ или теоремы А) M есть либо γ -солнце (когда $b_0 = \infty$, $Q^{b_0} = \emptyset$), либо дополнение шара ($b_0 < \infty$). Если же cM несвязно и D — произвольная связная компонента cM , то по доказанному либо D — шар, либо cD — γ -солнце. Здесь следует пояснить, что $\forall x \in D \ xM = x({}^cD)$ и что $W(M)$ складывается из $W({}^cD)$ для различных D . Обозначив через K дополнение объединения неограниченных компонент, получим (6). Используя теорему А и предложение 2.2, имеем:

$${}^cK \subset \gamma S \cap \overline{T'} \subset \overline{\gamma S \cap T'} \subset \overline{S}.$$

Далее, если $X \in (S)$, то K выпукло по предложению 2.1 или 2.4. При этом из $S(w, wM) \subset M$ следует $K = \text{co } M$. По предложению 2.1 ${}^cK \subset S \subset \delta'S \cap E$, поэтому $W = W'$. То же в случае $X \in (\gamma R)$, так как по предложению 2.2в) ${}^cK \subset \gamma S \subset S \subset \delta'S \cap E$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу теоремы 1.2а), г) можно заменить (D) на (δR) , а W' на W ; или (D) на $(Rf) \cap (LUR)$, а W' на ${}^cM \setminus (\delta S \cap E)$.

§ 2. Ограничения типа $|\overline{W}| < |X|$

Идея рассмотреть ограничения этого вида и большинство доказательств этого параграфа принадлежат В. С. Балаганскому.

Дадим необходимое в дальнейшем обобщение леммы 2.1.

ЛЕММА 2.4. Пусть $M \in \mathcal{F}$, $x \notin M \cup \gamma S$. Тогда найдутся $z_n \in W$ и $r \geq xW$ такие, что $z_n x \rightarrow r$, $z_n M - xM \rightarrow r$ ($x \in \gamma_r S$). Если дополнительно либо а) $\overline{W}$ ограничено компактно, либо б) $X \in (C\gamma R)$, либо в) $X \in (CLUR)$, $x \in E$, то найдется $z \in \overline{W}$, $zM = zx + xM$, $Px \subset Pz$. Если $x \notin \overline{W}$ и в а) $x \in (CLUR)$, а в б), в) $X \in (R)$, то найдутся $z \in \overline{W}$, $z' \in Pz$, $x \in [z, z']$, $Px = \{z'\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию существует $r' > 0$ такое, что $x \notin \gamma_{r'}S$. Как и при доказательстве леммы 2.1, в шаре $B_{r'}x$ находим элементы $z_n \succ_{\theta_n} x$, максимальные относительно θ_n -порядка ($0 < \theta_n < 1$, $\theta_n \rightarrow 1$), и тоже заключаем, что $z_nM - xM \sim z_nx$, $z_nx < r'$ и поэтому $z_n \in W$. Можно считать, что z_nx сходится к некоторому r и тогда, очевидно, $r \geq xW$, $z_nM - xM \rightarrow r$. Пусть $y_k \in M$, $xy_k \rightarrow xM$. Выполняются условия леммы 0.4 (если отбросить тривиальное $r = 0$, когда можно взять $z = x$), поэтому в случае б), а также в) (где $y_k \equiv y \in Px$), и, конечно, в случае а) можно считать, что z_n сходится к некоторому $z \in \overline{W}$. Тогда $zM = zx + xM$ и легко показать, как и в лемме 2.1, что $Px \subset Pz$. Если дополнительно $X \in (R)$, $z' \in Px$ (в случае $X \in (\gamma R)$ такое z' есть предел y_k), то ввиду $zz' \leq zx + xz' = zx + xM = zM \leq zz'$ имеем $x \in [z, z']$, а также $Px = \{z'\}$.

В следующей теореме можно вместо $W' = {}^cM \setminus (\delta'S \cap E)$ поставить $W \cup (\delta S \setminus E) = {}^cM \setminus (\delta S \cap E)$, так как в $X \in (CLUR)$ по теореме 1.2г) $\delta'S \cap E = \delta S \cap E$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $X \in (CLUR)$, $M \in \mathcal{F}$, Px выпукло (или пусто) для каждого $x \in X$. Если $|\overline{W'}| < |X|$, то $M - \gamma$ -солнце, $\alpha S \supset E$ плотно в cM , а если дополнительно X гладко, то M выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что ${}^cM \subset \overline{E}$; если $|X| = 2^{\aleph_0}$, то $|\overline{W}| \leq |\overline{W'}| < 2^{\aleph_0}$, тогда по теореме 2.2 $M - \gamma$ -солнце, по предложению 2.2 $E = \gamma S \cap E \subset \alpha S$ и $\overline{\alpha S} \supset {}^cM$. Пусть $|X| > 2^{\aleph_0}$. Положим $A = \text{int}(\delta'S \cap E)$. A открыто и плотно в cM : если шар $B \subset {}^cM \setminus A$, то $B \subset \overline{W}$, что противоречиво из-за $|\overset{\circ}{B}| = |X|$. Если теперь γS плотно в A , то, поскольку γS замкнуто в cM , как и выше, $M - \gamma$ -солнце, $E \subset \alpha S$ и $\overline{\alpha S} \supset {}^cM$. Покажем, что оставшийся случай, когда некоторый шар $B \subset A \setminus \gamma S$, невозможен. Можно считать, что $B = B_{rc}$, где $c \in E$. Пусть $c' \in Pc$, $0 < \delta < r/4$, $b = cM - 2\delta$. Тогда Γ^b пересекает все отрезки $[c', z]$, $z \in B_{\delta c}$, внутри B . Поэтому $|Q| = |X|$, где $Q = B \cap \Gamma^b$. По лемме 2.4 каждому $x \in Q$ соответствует $z = \psi(x) \in \overline{W} \subset \overline{W'}$ с $zM = zx + xM$, $Px \subset Pz$. Допустим, что $z = \psi(y)$, $y \neq x$, $y \in Q$. Возьмем $x' \in Px$, $y' \in Py$ ($Q \subset B \subset A \subset E$). Имеем для $\lambda \in [0, 1]$, $z' = (1 - \lambda)x' + \lambda y' \in Pz$:

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y - z'\| = \|(1 - \lambda)(x - x') + \lambda(y - y')\| \leq b,$$

откуда $[x, y] \subset Pz + B_b \subset M_b$. Ввиду $zM_b + b = zM = zx + xM$ находим: $zx = zM_b = zy$, $[x, y] \subset S(z, zM_b)$. Отсюда следует, что $\psi^{-1}(z)$ содержится в выпуклом замкнутом подмножестве сферы, компактном в силу $X \in (CLUR)$, следовательно, мощности $\leq 2^{\aleph_0}$. Поэтому

$$|X| = |Q| = \left| \bigcup_{z \in \overline{W'}} \psi^{-1}(z) \right| \leq \sum_{z \in \overline{W'}} |\psi^{-1}(z)| \leq |\overline{W'}| \cdot 2^{\aleph_0} = \max\{|\overline{W'}|, 2^{\aleph_0}\} < |X|,$$

что противоречиво. Итак, $M - \gamma$ -солнце, $\alpha S \supset E$ плотно в cM . Выпуклость M в случае $X \in (S)$ следует из предложения 2.4.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть $X \in (CLUR)$, M — чебышёвское множество, $|\overline{W}| < |X|$. Тогда M — α -солнце, выпуклое при дополнительном условии $X \in (S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при условии следствия $W = W'$ по теореме 1.2г), то, применяя теорему 2.4, получим $\alpha S \supset E = X$.

Следующее предложение относится, вероятно, к “фольклору”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Если множество D – I категории в банаховом пространстве X , то $|B \cap {}^c D| = |X|$ для любого шара B в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если B – единичный шар, то $\overset{\circ}{B}$ гомеоморфно X относительно отображения $x \rightarrow x/(1 - \|x\|)$. Поэтому достаточно установить, что $|{}^c D| = |X|$. Так как замыкание нигде не плотного множества нигде не плотно, то можно считать, что ${}^c D = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, где G_n – открытые всюду плотные множества и $G_n \supset G_{n+1}$. Пусть $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – максимальная система замкнутых непересекающихся шаров радиуса < 1 , содержащихся в G_1 , $|A| = \lambda$. Можно предположить, что λ – наименьшая мощность систем такого вида, содержащихся в открытых множествах. Покажем, что $\lambda^{\aleph_0} \geq |X|$. Пусть Z – множество центров шаров B_α , так что $|Z| = \lambda$, а L – совокупность линейных комбинаций точек из Z с рациональными коэффициентами. Тогда $|L| = \lambda$, а так как каждому $x \in \overline{L}$ соответствует последовательность $x_n \in L$, $x_n \rightarrow x$, то $|\overline{L}| \leq \lambda^{\aleph_0}$. Если допустить, что $|\overline{L}| < |X|$, то $\overline{L}$ нигде не плотно и $G_1 \setminus \overline{L}$ содержит некоторый шар, в противоречии с максимальнойностью системы $\{B_\alpha\}$. Поэтому $|X| \leq \lambda^{\aleph_0}$. Пусть для каждого $\alpha \in A$ $\{B_{\alpha\beta}\}_{\beta \in B}$ – максимальная система замкнутых непересекающихся шаров радиуса $< 1/2$, содержащихся в $\overset{\circ}{B}_\alpha \cap G_2$, причем $|B| \geq \lambda$. Если отступить от максимальнойности, то можно считать $|B| = \lambda$, $B = A$. Продолжая таким образом, найдем шары

$$B_{\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}} \subset \overset{\circ}{B}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \cap G_{n+1},$$

причем для фиксированного n шары $B_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ не пересекаются, каковы бы ни были $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$, но $B_{\alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}} \subset B_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, радиус шара $B_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ меньше $1/n$. Рассмотрим множество

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A} B_{\alpha_1 \dots \alpha_n}.$$

Очевидно, что $F \subset {}^c D$ и остается показать, что $|F| = \lambda^{\aleph_0}$. Если взять шары $B_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, содержащие заданную точку $t \in F$, то окажется, что кортежи $\alpha_1 \dots \alpha_n$ являются начальными отрезками одного бесконечного кортежа $\alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, т.е. элемента множества $A^{\aleph}$. Обратно, элементу $\alpha_1 \alpha_2 \dots \in A^{\aleph}$ соответствует точка t , к которой сводится пересечение шаров $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \{t\}$, $t \in F$. Таким образом, F равномощно с $A^{\aleph}$, $|{}^c D| \geq |F| = |A^{\aleph}| = |A|^{\aleph} = \lambda^{\aleph_0} \geq |X|$.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $M \in \mathcal{F}$ – множество единственности, $|\overline{W}| < |X|$. Тогда

- если $X \in (Rf) \cap (LUR)$, то ${}^c M \subset \overline{T \cap S}$;
- если $X \in (\gamma R)$, то ${}^c M \subset T \cap S$, т.е. M – чебышёвское солнце.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если $|X| = 2^{\aleph_0}$, то по теореме 2.1 ${}^c M = \gamma S$, по предложению 2.2б) $T' \subset S$ (напомним, что $(Rf) \cap (LUR) \subset (D)$), следовательно, по теореме А ${}^c M \subset \overline{T'} \subset \overline{T \cap S}$. В дальнейшем $|X| > 2^{\aleph_0}$.

Пусть $x \in T'$, $x' = Px$. Тогда либо $x \in S$, либо среди точек $z \in \overrightarrow{x'x}$ с $x' = Pz$ найдется $z = x''$, наиболее удаленная от x' . Допустим, что $x'' \notin \overline{W}$. Возьмем $u \in (x'', x')$ с $ux'' < r = \min\{uW/2, uM\}$. Так как $X \in (LUR)$, то $u \in T'$ (это легко получить, применяя лемму 1.2). Далее, $\overset{\circ}{B}_r u \subset \delta S$, по лемме 0.1 $\overset{\circ}{B}_r u \subset \gamma_r \overset{\circ}{S}$, а по лемме 0.8 $\exists z, zu = r, u \in [z, x']$, $x' \in Pz$. Поскольку $ux'' < r$, то $x'' \in (z, x')$. Это противоречие с выбором x'' показывает, что $x'' \in \overline{W}$. Чтобы теперь доказать, что ${}^cM \subset \overline{T \cap S}$, возьмем любой шар $B \subset {}^cM$ и допустим, что $S \cap B = \emptyset$. Тогда, как показано выше, $\forall x \in T' \cap B \exists x'' \in \overline{W}, x \in [x'', x'], x' = Px \in Px''$. При этом разным x, y соответствует одна и та же точка $x'' = y''$ лишь в том случае, когда $y \in \overrightarrow{x'x}$. Поскольку $|T' \cap B| = |X|$ (см. предложение 2.6 и теорему А), то

$$|X| = |T' \cap B| \leq 2^{\aleph_0} |\overline{W}| = \max\{2^{\aleph_0}, |\overline{W}|\} < |X|,$$

что противоречиво. Для любого шара B $S \cap B \neq \emptyset$, откуда ${}^cM \subset \overline{S}$. Далее, в $X \in (R)$: $S \subset T, S = T \cap S, {}^cM \subset \overline{T \cap S}$.

б) По предложению 1.7 $(\gamma R) \subset (Rf) \cap (LUR)$. В силу а) ${}^cM \subset \overline{T \cap S}$. Поскольку $S \subset \gamma S$ и γS замкнуто, то ${}^cM \subset \overline{S} \subset \gamma S$, а по предложению 2.2 ${}^cM \subset T \cap S$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме 2.5 вместо T можно поставить T' , так как по лемме 1.2 $S \subset T'$, если $X \in (LUR)$.

Рассмотрим одно свойство типа непрерывности метрической проекции. Обозначим через C^* множество точек из T , в которых сужение $P|_T$ непрерывно. Ясно, что $T' \subset C^*$. С помощью теоремы А легко показать, что если $X \in (D)$, то $LSC \cap E \subset C^*$. В доказательстве леммы 0.8 условия $x \in T', x \in LSC \cap E$ можно заменить на C^* , тогда с учетом леммы 0.1 получим для $X \in (D)$:

$$(7) \quad C^* \cap \delta \overset{\circ}{S} \subset mS, \quad C^* \cap \gamma \overset{\circ}{S} \subset S.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Если $X \in (D)$, $M \in \mathcal{F}$, то $C^* \subset \delta' S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in C^*$. В доказательстве предложения 1.4 установлено соотношение

$$(8) \quad I = 1 - (v_n M - xM)/v_n x \sim v'_n x'/xx',$$

где v_n, v'_n таковы, что $v_n \rightarrow x \in (v_n, x')$, $v'_n \in M$, $(v_n v'_n - v_n M)/v_n x \rightarrow 0$. По теореме А найдется x_n с $Px_n = \{x'_n\}$, $x_n v_n/v_n x \rightarrow 0$. Положим в (8) $v'_n = x'_n$. Тогда, поскольку $x'_n \rightarrow x'$ из-за $x \in C^*$, имеем $x \in \delta' S$.

Обозначим $W^* = {}^cM \setminus C^*$. По предложению 2.7 $W \subset W^*$, а $W^* \cup \overline{W} \subset \overline{W^*}$.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $X \in (D)$, $M \in \mathcal{F}$ – множество единственности. Если $|W^* \cup \overline{W}| < |X|$ (или $|\overline{W^*}| < |X|$ – более сильное условие), то ${}^cM \subset \overline{T \cap S}$. Если, дополнительно, X гладко, то M выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2.5: случай $|X| = 2^{\aleph_0}$ без изменений; далее, найденная точка $x'' \in W^* \cup \overline{W}$, ибо в противном случае в силу (7) $x'' \in C^* \cap \delta \overset{\circ}{S} \subset mS$, что противоречит выбору x'' ; наконец, рассуждения с шаром $B \subset {}^cM$ проходят с заменой $\overline{W}$ на $W^* \cup \overline{W}$.

ТЕОРЕМА 2.7. *В пространстве $X \in (D)$ всякое множество существования с полунепрерывной снизу метрической проекцией является чебышёвским солнцем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1.4 ${}^cM \subset \delta S$, по лемме 0.1 ${}^cM \subset \gamma_r S$ для любого $r > 0$, т.е. ${}^cM \subset \gamma S$. В силу предложения 2.2б) M – солнце, а ввиду $X \in (R)$ – чебышёвское солнце.

ЗАМЕЧАНИЕ. Царьков [133] доказал, что в X с $\dim X < \infty$ всякое множество существования с полунепрерывной сверху метрической проекцией является солнцем.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Пусть $X \in (CLUR) \cap (S)$ или $X \in (D) \cap (S)$, $M \in \mathcal{F}$ – невыпуклое множество единственности. Тогда $|{}^cM \setminus T'| = |X|$, а если M – чебышёвское множество, то замыкание множества точек разрыва метрической проекции тоже имеет мощность $|X|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1.4 точки T' и точки непрерывности P содержатся в $\delta' S \cap E$, поэтому случай $X \in (CLUR)$ вытекает из теоремы 2.4. В случае $X \in (D)$ упомянутые точки содержатся в $C^* = {}^cM \setminus W^*$ и остается применить теорему 2.6.

ЗАМЕЧАНИЕ. Панда и Капур [117] показали, что в $X \in (CLUR)$ для чебышёвского множества точки непрерывности совпадают с точками аппроксимативной компактности (этот факт выше не использовался).

ТЕОРЕМА 2.8. *Пусть $M \in \mathcal{F}$, $\overline{Q} \supset W$. Тогда*

$$\text{а) } {}^cM = \gamma S \cup \bigcup_{w \in W} \overset{\circ}{B}_w = \gamma S \cup \bigcup_{w \in Q} \overset{\circ}{B}_w, \text{ где } \overset{\circ}{B}_w = \overset{\circ}{B}(w, wM);$$

$$\text{б) если } X \in (CLUR), \gamma S \subset \overline{E}, \text{ то } {}^cM = \overline{\alpha S} \cup \bigcup_{w \in Q} \overset{\circ}{B}_w, \text{ при дополнительном условии } \gamma S \subset E \text{ имеем}$$

$${}^cM = \alpha S \cup \bigcup_{w \in Q} \overset{\circ}{B}_w,$$

а если, к тому же, $X \in (LUR)$, то

$$(9) \quad {}^cM = S \cup \bigcup_{w \in Q} \overset{\circ}{B}_w,$$

в) если $X \in (D)$, $\overline{Q} \supset W^*$, то имеем (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\supset$ в а) и других подобных равенствах очевидно. Пусть $x \in {}^cM \setminus \gamma S$, тогда найдутся $x_k \rightarrow x$, $x_k \notin \gamma S \cup M$. По лемме 2.4 существуют $z_{nk} \in W$, $r_k \geq x_k W$ такие, что $z_{nk} x_k \rightarrow r_k$, $z_{nk} M - xM \rightarrow r_k$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $r = \min(xW/2, xM/2)$. Можно считать, что $r > 0$, т.е. $x \notin \overline{W}$: в противном случае $\exists w_n \in W$, $w_n \rightarrow x$, $x \in \overset{\circ}{B}(w_n, w_n M) \forall n > n_0$ и а) доказано. Попутно становится очевидным, что $\bigcup_{w \in W} \overset{\circ}{B}_w$ не меняется от замены W на Q . Имеем $xz_{nk} \leq xx_k +$

$x_k z_{nk} \sim z_{nk} M - xM$ при $k, n \rightarrow \infty$, поэтому $x \in \overset{\circ}{B}(z_{nk}, z_{nk} M) \quad \forall k > k_0, \forall n > n_0$, и а) установлено.

б) Если $\overset{\circ}{\gamma S} \subset \overline{E}$, то с помощью предложения 2.2а) получим: $\overset{\circ}{\gamma S} \subset \overline{\gamma S \cap E} \subset \overline{\alpha S}$, а если $\gamma S \subset E$, то, аналогично, $\gamma S = \gamma S \cap E \subset \alpha S$. Далее применяем а). Так как в $X \in (R)$ $\alpha S \cap E \subset S$ (предложение 2.2а)), то в случае $X \in (LUR)$, $\gamma S \subset E$, имеем (9). в) получается из а) так: ввиду $W \subset W^*$

$${}^c M = \overset{\circ}{\gamma S} \cup \bigcup_{w \in W^*} \overset{\circ}{B}_w = (C^* \cap \overset{\circ}{\gamma S}) \cup \bigcup_{w \in W^*} \overset{\circ}{B}_w,$$

и в силу (7) имеем (9).

ЛЕММА 2.5. Пусть $M \in \mathcal{F}$, $x \in {}^c M$, $\varepsilon \in (0, xM)$, $r > 0$. Тогда

(а) если $x \in \gamma_r S$, то для некоторого z с $zx = r$

$$(*) \quad B(x, xM - \varepsilon) \subset B(z, zM - \varepsilon/2);$$

б) если $x \notin \gamma S$, то существует $z \in W$, для которого справедливо (*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае (а) по определению $\gamma_r S$, а в случае (б) по лемме 2.4 существуют z_n (в случае (а) $z_n x = r$, в случае (б) $z_n \in W$) такие, что $z_n x \sim z_n M - xM$. Поэтому для достаточно большого n имеем $z_n x < z_n M - xM + \varepsilon/2$, что влечет (*) при $z = z_n$.

ТЕОРЕМА 2.9. а) Если $X^* \in (R)$, $M \in \mathcal{F}$, то

$$(10) \quad M = \overline{{}^c M} \setminus \bigcup_{w \in W} \overset{\circ}{B}_w;$$

б) если $X \in (CLUR) \cap (S)$, то (10) справедливо при условии $\overset{\circ}{\gamma S} \subset \overline{E}$; без этого условия выполняется соотношение, получаемое из (10) заменой W на W' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неочевидное включение $\supset$ в (10). Обозначим $Z = \bigcup_{w \in W} \overset{\circ}{B}_w$ и допустим, что $x \in \overline{{}^c M} \setminus Z$, но $x \notin M$. По теореме 2.8а) $x \in \overset{\circ}{\gamma S}$. Пусть $\varepsilon \in (0, xM)$; по лемме 2.5а) $\exists x_1, x_1 x = 1$, $B(x, xM - \varepsilon) \subset B(x_1, x_1 M - \varepsilon/2)$. $x_1 \in \gamma S$: в противном случае по лемме 2.5б) $\exists z \in W$, $B(x_1, x_1 M - \varepsilon/2) \subset B(z, zM - \varepsilon/4)$, откуда $x \in \overset{\circ}{B}_z \subset Z$, что невозможно. Продолжая таким образом, найдем последовательность x_n такую, что $B(x, xM - \varepsilon) \subset B(x_n, x_n M - \varepsilon/2^n) = B_n \subset B(x_{n+1}, x_{n+1} M - \varepsilon/2^{n+1})$, $x_n x_{n+1} = n + 1$. В силу $X^* \in (R)$ множество $\Pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{B}_n$ есть либо X , либо открытое полупространство в X [В, предложение 3.5]. Так как $M \neq \emptyset$, то $\Pi \neq X$, более того, $\Pi \cap M = \emptyset$. Но тогда и $\Pi \cap \overline{{}^c M} = \emptyset$, что противоречит соотношению $x \in \Pi$. Это доказывает (10). В случае б), как и выше, находим $x \in \overset{\circ}{\gamma S}$, тогда при условии $\overset{\circ}{\gamma S} \subset \overline{E}$ или просто $x \in E$ и по предложению 2.3б) получим противоречие; если же $x \notin E$, то $x \in W'$ и все ясно.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. В б) можно заменить W' на ${}^cM \setminus (\delta S \cap E)$, так как в случае $X \in (CLUR)$ в силу теоремы 1.2г) $\delta S \cap E = \delta' S \cap E$.

2. В отличие от следствия 2.1, здесь мы не можем утверждать, что шары $\overset{\circ}{B}_w$ не пересекаются, и что $\overset{\circ}{B}_w \subset \overline{\text{co}} M$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть $X \in (CLUR) \cap (S)$ или $X \in (D) \cap (S)$. Тогда для $M \in \mathcal{F}$

$$(11) \quad M = \overline{\text{co}} M \setminus \bigcup_{w \in Q} \overset{\circ}{B}_w,$$

где $Q = {}^cM \setminus T'$, а если M – чебышёвское множество, то в качестве Q можно взять множество точек разрыва метрической проекции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $X \in (CLUR)$ вытекает из теоремы 2.9, так как $W' \subset Q$ по предложению 1.4а), в). В случае $X \in (D)$ в силу предложения 2.3 $\overline{\text{co}} M \cap S = \emptyset$, тогда по теореме 2.8в) $\overline{\text{co}} M \cap {}^cM \subset \bigcup_{w \in W^*} \overset{\circ}{B}_w \subset \bigcup_{w \in Q} \overset{\circ}{B}_w$. Отсюда следует (11).

Рассмотрим случай, когда дополнение M выпукло. При этом можно считать в силу предложения 1.13, что $W' = {}^cM \setminus \delta' S$.

ТЕОРЕМА 2.10 (ср. Балаганский [10]). Пусть $X \in (Rf)$, $M \in \mathcal{F}_{cc}$. Тогда

а) M или солнце (если $W = \emptyset$), или ($W \neq \emptyset$) имеет вид:

$$(12) \quad M = X \setminus \bigcup_{w \in W} \overset{\circ}{B}(w, wM);$$

б) если дополнительно $X \in (R)$, а $|W'| < 2^{\aleph_0}$, то либо cM – шар, либо M – чебышёвское солнце.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если $W = \emptyset$, то M – δ -солнце и по теореме Б – γ -солнце, т.е. ${}^cM = \gamma S$. По предложению 1.16 $\gamma S \subset S$, откуда M – солнце. Пусть $W \neq \emptyset$. Если $\gamma S = \emptyset$, то по теореме 2.8а) ${}^cM = \bigcup_{w \in W} \overset{\circ}{B}_w$, что равносильно (12). Следовательно, остается показать, что $\gamma S = S \neq \emptyset \Rightarrow W = \emptyset$. Пусть $x \in S$, $x' \in Px$. Можно считать, что $x' = 0$. Положим $K = \bigcup \overset{\circ}{B}(z, \|z\|)$, где z пробегает луч $\overrightarrow{0x}$. Тогда K – открытый выпуклый конус и $K \subset {}^cM$ [В, с. 24–25]. Пусть u – любая точка cM . Проведем луч $\overrightarrow{uu'}$ коллинеарно лучу $\overrightarrow{x0}$, где $u' \in \partial M$. Это возможно, так как если $\overrightarrow{uu'} \subset {}^cM$, то по свойству выпуклого множества и $\overrightarrow{x0} \subset {}^cM$, что противоречиво. По той же причине $u' + K \subset {}^cM$, следовательно, $u \in S$, ${}^cM \subset S$, $W = \emptyset$.

б) Доказательство такое же, как в теореме 2.3. Разница лишь в том, что y_n и z_n определяются не с помощью теоремы А, а просто: $\forall y_n \rightarrow x, y_n Q^b < b, z_n = P_{Q^b} y_n$ в силу выпуклости Q^b и $X \in (R) \cap (Rf)$. Как и в теореме 2.3, получим, что если $W \neq \emptyset$, то cM – шар. Если же $W = \emptyset$, то по а) M – солнце, а так как $X \in (R)$, то чебышёвское солнце.

§3. Случай, когда M локально компактно

ТЕОРЕМА 2.11. Пусть $X \in (CLUR) \cap (S)$, M – локально компактное δ -солнце (γ -солнце). Тогда M выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое $x \in {}^cM$. Существует $y \in M$ с $(x, y) \cap M = \emptyset$. Найдется $\delta > 0$ такое, что $Q = B_\delta y \cap M$ компактно. Пусть $z \in (x, y)$, $zy < \delta/2$, $0 < \varepsilon < \delta - 2 \cdot zy$. Если $v \in P^\varepsilon z$, то $vy \leq vz + zy \leq zM + \varepsilon + zy \leq 2 \cdot zy + \varepsilon < \delta$, так что $P^\varepsilon z \subset Q$ и $\exists z' \in Pz$. Таким образом, $z \in \gamma S \cap E \subset \alpha S$ (предложение 2.2). По предложению 2.3, M отделяется гиперплоскостью от шара $B(z, zM)$, а значит, и от точки x . Так как $x \in {}^cM$ произвольно, то M выпукло.

ТЕОРЕМА 2.12. Пусть M – локально компактное чебышёвское множество с метрической проекцией, имеющей менее $|X|$ точек разрыва. Тогда M – солнце.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – множество точек непрерывности метрической проекции. Покажем, что ${}^cM \subset \overline{S}$. Допустим противное, тогда найдется шар B , $B \cap S = \emptyset$. Как и в теореме 2.4, для некоторого $b > 0$ $|Q| = |X|$, где $Q = B \cap \Gamma^b$. По допущению, для всякого $x \in Q$ на луче $\overrightarrow{x'x}$ (где $x' = Px$) найдется наиболее удаленная от x' точка x'' , для которой еще сохраняется равенство $Px'' = x'$. Тогда $x'' \notin C$: в противном случае в силу предложения 1.5 найдутся $z \neq x''$, $z' \in Pz$, $x'' \in [z, z']$; отсюда $z' = x'$, $x' = Pz$, $z \in \overrightarrow{x'x}$, что противоречит определению x'' . Итак, каждому $x \in Q$ соответствует $x'' \in {}^cM \setminus C$ и понятно, что разным x соответствуют разные x'' . Значит, $|{}^cM \setminus C| \geq |Q| = |X|$, что невозможно. Это доказывает, что ${}^cM \subset \overline{S}$. Возьмем теперь произвольную точку $x \in {}^cM$. Если $x' = Px$, то в силу локальной компактности M легко найдем точку $z \in (x, x') \cap C$ (см. доказательство теоремы 2.11). Пусть $z_n \rightarrow z$, $z_n \in S$. Так как $z'_n = Pz_n \rightarrow Pz = x'$, то ясно, что лучи $\overrightarrow{z'_n z_n}$ приближаются к лучу $\overrightarrow{x'x}$, поэтому $x \in S$, M – солнце.

Обозначим через C_ρ множество точек из cM , где метрическая проекция ρ -непрерывна, $W_\rho = {}^cM \setminus C_\rho$.

Для $x \in E$ положим: $A_x = \{z : \exists y \in Pz, x \in [z, y)\}$.

ТЕОРЕМА 2.13. Пусть $M \in \mathcal{F}$ локально компактно, для каждого $x \in {}^cM$ Px выпукло, а $|W_\rho| < |X| < 2^{\aleph_0}$. Тогда M – γ -солнце, ${}^cM \subset \overline{S}$, а если дополнительно $X \in (S)$, то M выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что для некоторого шара $B \subset {}^cM \setminus W_\rho$ $A_x \cap W_\rho \neq \emptyset \forall x \in B$. Каждому $x \in B$ поставим в соответствие точку $\psi(x) = z \in A_x \cap W_\rho$. Нетрудно видеть, что $\psi^{-1}(z) \subset \text{co}\{z \cup Pz\}$, поэтому $|\psi^{-1}(z)| \leq 2^{\aleph_0}$ (мощность компакта всегда $\leq 2^{\aleph_0}$). Имеем

$$|X| = |B| = \left| \bigcup_{z \in W_\rho} \psi^{-1}(z) \right| \leq |\psi^{-1}(z)| \cdot |W_\rho| = \max\{2^{\aleph_0}, |W_\rho|\} < |X|,$$

что невозможно. Это показывает, что $\{x \in {}^cM : A_x \cap W_\rho = \emptyset\}$ плотно в cM . Далее, если $A_x \cap W_\rho = \emptyset$, то A_x неограниченно. В противном случае возьмем $z \in A_x$,

максимально удаленную от x (A_x компактно вместе с Px). Если $z \in C_\rho$, то по предложению 1.5 получим противоречие. Итак, A_x неограниченно, а тогда A_x содержит луч, и $x \in S$ (см. [В, с. 30]). Мы доказали, что ${}^cM \subset \overline{S}$. Так как $\gamma S = \overline{\gamma S}$, то ${}^cM \subset \gamma S$, $M - \gamma$ -солнце. В случае $X \in (S)$ M выпукло по предложению 2.4.

Царьков [132] доказал, что в $(X) \in (CD) \cap (S)$ всякое локально компактное множество единственности выпукло.

§ 4. Случай, когда W лежит в гиперплоскости

С. В. Конягин и И. Г. Царьков (частное сообщение) доказали, что чебышёвское множество в гильбертовом пространстве выпукло, если множество точек разрыва метрической проекции лежит в конечномерном подпространстве. Наши методы позволяют обобщить это утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть $X \in (LUR)$, $M \in \mathcal{F}$ – множество единственности. Тогда для любого $b > 0$, M_b – множество единственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \notin M_b$, $v \in P_{M_b}x$, $y_n \in M$, $vy_n \rightarrow vM$. Не теряя в общности, считаем, что $x = 0$, $xM = 1$, $0 < b < 1$. Пусть $v \in (0, y)$, $\|y\| = 1$. Пользуясь соотношением Ефимова–Стечкина $xM_b + b = xM$ ($x \notin M_b$), имеем: $0M \leq 0v + vM \leq 0M_b + b = 0M$, $vM = 1 - v0 = b = vy$. Пусть $\overline{y}_n \in [v, y_n] \cap S$, тогда $y_n \overline{y}_n \rightarrow 0$. По лемме 1.2 $\overline{y}_n \rightarrow y$, поэтому $y_n \rightarrow y \in M$, $y \in P0$. Таким образом, для любого $v \in P_{M_b}x$ найдется $y \in Px$, $v \in [x, y]$. Отсюда легко вывести нужное утверждение.

ТЕОРЕМА 2.14 [БВ]. Пусть X – гильбертово пространство, $M \in \mathcal{F}$ – множество единственности (т.е. $E = T$). Если множество W лежит в некоторой гиперплоскости, то M выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W \subset H$, где H – гиперплоскость. Допустим противное: M невыпукло. Тогда для некоторого $b > 0$ M_b невыпукло, а по предложению 2.8 $E(M_b) = T(M_b)$. По предложению 0.2 $W(M_b) \subset W(M) = W \subset H$. Далее, в [В, теорема 4.2] доказано, что M связно, если ${}^cM = T$, однако доказательство не меняется и в случае $E = T$ (см. также [84], [130]). Поэтому $N = \bigcup_{x \in M} \overset{\circ}{B}_b x$ связно, а так как $N \subset \overset{\circ}{M}_b \subset M_b \subset \overline{N}$, то и $\overset{\circ}{M}_b$ связно [100, с. 141]. Все это показывает, что можно с самого начала считать, что M невыпукло, $E = T$, $W \subset H$, $\overset{\circ}{M}$ непусто и связно, $M = \overset{\circ}{M}$.

Заметим, что $U = \overset{\circ}{M} \setminus M \neq \emptyset$. Рассмотрим два случая.

1. $H \cap U \neq \emptyset$. Возьмем $z \in H \cap U$, тогда $z \in \overset{\circ}{M} = \overset{\circ}{co} M$ и ввиду связности $\overset{\circ}{M}$ $H \cap \overset{\circ}{M} \neq \emptyset$. На отрезке $[z, y]$, где $y \in H \cap \overset{\circ}{M}$, найдется точка $v \in M$, ближайшая к z . Поскольку $v \in \overset{\circ}{co} M$, для некоторого $\varepsilon > 0$ $B_{2\varepsilon}v \subset \overset{\circ}{co} M$. В силу $X \in (\gamma R) \cap (S)$ и предположений 2.2в), 2.3а) имеем $\overset{\circ}{co} M \cap \gamma S = \emptyset$, $B_{2\varepsilon}v \cap \gamma S = \emptyset$. Пусть $u \notin H \cup M$, $uv < \varepsilon$ (заметим, что $\overset{\circ}{B}_\varepsilon v \cap {}^cM \neq \emptyset$, так как $(z, v) \subset {}^cM$). Так как $u \notin \gamma S \cup H$, то по лемме 2.4 $\exists w \in \overline{W} \subset H$ с $u \in (w', w)$, где $w' = Pw \in B_{2\varepsilon}v$. Рассмотрим точку $x \in B_{2\varepsilon}v$, симметричную с w' относительно H (прямая xw' перпендикулярна

H и $xH = w'H$). Ясно, что $x \notin M \cup \gamma S$. Как и выше, найдется $q \in \overline{W}$ с $x \in (q, q')$, где $q' = Pq$. Но $qx < qq' = qM \leq qw' = qx$, что невозможно.

2. $H \cap U = \emptyset$. Возьмем $u \in U$, и пусть Π – открытое полупространство при H с $u \notin \Pi$. Как и выше, найдем $w \in H$, $u \in (w, w')$, где $w' = Pw$. Пусть $x \in \Pi$ настолько близка к w , что $ux < xM$. Допустим, что $x' = Px \in \Pi$. Тогда $[u, x') \subset \overset{\circ}{B}(x, xM)$, $[u, x') \subset \overset{\circ}{\text{co}} M \setminus M = U$, что противоречит условию $H \cap U = \emptyset$. Если же $x' \notin \Pi$, то по лемме 0.7 $x \in S$, по предложению 2.3а) шар $B(x, xM)$ отделяется гиперплоскостью от M и $\overset{\circ}{\text{co}} M$, что невозможно из-за $u \in \overset{\circ}{\text{co}} M \cap \overset{\circ}{B}(x, xM)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.8 [БВ]. Пусть M – чебышёвское множество в гильбертовом пространстве. Если метрическая проекция P непрерывна во всех точках, за исключением, быть может, множества, лежащего в гиперплоскости, то M выпукло.

ЗАМЕЧАНИЕ. С. В. Конягин [87] получил результат более сильный, чем следствие 2.8 (см. главу III).

ТЕОРЕМА 2.15. Пусть $X \in (Rf)$, а $M \in \mathcal{F}$ таково, что метрическая функция d_M достигает своего максимума, и для всякого $x \in {}^c M$ Px не содержит антиподов, т.е. диаметрально противоположных точек шара $B(x, xM)$. Тогда W не содержится ни в какой гиперплоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда можно считать, что $W \subset f^{-1}(0)$, где $f \in S^*$. Пусть $b = \sup\{xM : x \in X\}$. В силу леммы 0.1а) $Q^b \subset W$. Не теряя общности, считаем, что $0 \in Q^b$. По теореме 2.8 ${}^c M \subset \bigcup_{w \in W} \overset{\circ}{B}(w, wM)$, ибо $\gamma S = \emptyset$, а так как $wM \leq b$, то ${}^c M \subset W + \overset{\circ}{B}(0, b)$. Поэтому $\pm f^{-1}(b) \subset M$ и существует $y \in f^{-1}(b) \cap B(0, b)$, так что $y \in P0$. Ясно, что $-y \in P0$, но это – противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ. В нерефлексивном пространстве при тех же условиях верно, что для любого $f \in S^*$, достигающего нормы, имеем: $\inf f(W) < \sup f(W)$, т.е. W не содержится ни в какой гиперплоскости, опорной к некоторому шару.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Пусть X рефлексивно, $M \in \mathcal{F}$ – чебышёвское множество, дополнение которого ограничено и выпукло. Тогда W не содержится в гиперплоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < b_n < b = \sup\{xM : x \in X\}$, $b_n \rightarrow b$. Множества Q^{b_n} , как нетрудно видеть, непусты, выпуклы и замкнуты. Поэтому $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^{b_n} \neq \emptyset$, и, следовательно, в точках Q метрическая функция достигает максимума.

§ 5. Другие случаи

ТЕОРЕМА 2.16. Пусть $X^* \in (R)$, $M \in \mathcal{F}$, $W = \{0\}$, $0M = 1$. Тогда $M = K \setminus \overset{\circ}{B}$, где K выпукло и замкнуто. Если при этом а) $X \in (F)$ или б) множество $wLUR$ -точек плотно в S , то $B \subset K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.9а) $M = K \setminus \overset{\circ}{B}$, где $K = \overline{\text{co}} M$.

Допустим, что $B \not\subset \overline{\text{co}} M$. В случае а) найдем $g \in S^*$ с $1 = \sup g(B) > \sup g(M)$ и положим $\widetilde{M} = M \cap B(0, 2)$. В силу ограниченности $\widetilde{M}$ для всех $f \in S^*$, достаточно близких к g , $\sup f(\widetilde{M}) < 1$. По теореме Бишопа–Фелпса [33] среди таких f найдется достигающий нормы, т.е. $\exists x \in S$ с $f(x) = 1$. В случае б) в качестве x возьмем $wLUR$ -точку S , не принадлежащую $\overline{\text{co}} M$. Далее, по лемме 2.1 найдется $v \in (x, 0)$ с $0M = 0v + vM$. Пусть $y_n \in M$, $vy_n \rightarrow vM$, тогда $vy_n \rightarrow vx$, ибо $vx = 1 - 0v = vM$. Кроме того, если $\overline{y}_n = y_n/0y_n$, то $1 \leq 0y_n \leq 0v + vy_n \rightarrow 1$, $v\overline{y}_n \rightarrow vx$. Как показано в лемме 1.2, см. доказательство импликации (б) $\Rightarrow$ (а), тогда $\|x + \overline{y}_n\| \rightarrow 2$ (в лемме y_n вместо $\overline{y}_n$). Теперь в случае а) $f(\overline{y}_n) \rightarrow f(x) = 1$ по лемме 1.5, что противоречит неравенству $\sup f(\widetilde{M}) < 1$, ибо $y_n\overline{y}_n \rightarrow 0$, $y_n \in \widetilde{M} \ \forall n > n_0$. В случае б) $\overline{y}_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow x$, что невозможно из-за $y_n \in \overline{\text{co}} M$, $x \notin \overline{\text{co}} M$.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Пусть $X \in (Rf) \cap (S) \cap (R)$, $M \in \mathcal{F}$, $W = \{0\}$, $0M = 1$. Тогда $M = K \setminus \overset{\circ}{B}$, где K выпукло и замкнуто, $B \subset K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $X \in (Rf) \cap (S)$ следует, что $X^* \in (R)$. Известно (см., например, [107]), что рефлексивное пространство является пространством Асплунда, тогда множество F -точек является плотным в S G_δ -множеством. С другой стороны, $(Rf) \cap (R) \subset (wLD)$ и по предложению 1.8 F -точки являются $wLUR$ -точками. Итак, в S множество $wLUR$ -точек плотно, и по теореме 2.16 справедливо утверждение следствия.

ТЕОРЕМА 2.17. Пусть $X \in (R')$, $M \in \mathcal{F}$, $\gamma S = \emptyset$, а $\overline{W}$ ограниченно компактно и является замыканием множества I изолированных точек W . Тогда

$$M = X \setminus \bigcup_{w \in I} \overset{\circ}{B}_w,$$

где шары $\overset{\circ}{B}_w = \overset{\circ}{B}(w, wM)$ попарно не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\forall w \in I \ S_w = S(w, wM) \subset M$ или $\dim X < \infty$, то все завершается так же, как в теореме 2.1. Приведем к противоречию допущение $\dim X = \infty$, $w \in I$, $S_w \not\subset M$. Поскольку $\overline{W} \cap B_w$ компактно, нетрудно показать, что найдется $x \in S_w \setminus M$, $[x, w) \cap \overline{W} = \emptyset$. По лемме 2.1 для некоторого $\delta > 0$ $wM = wu + uM \ \forall u \in B_\delta w$. Найдется точка $v \in [x, w)$, ближайшая к x со свойством $wM = wv + vM$. В силу $x \notin M$ имеем $v \neq x$. Не уменьшая общности, будем считать $v = 0$, $0M = 1$. Тогда $\|x\| = 1$, ибо $\|w\| + \|x\| = wx = wM = w0 + 0M$. По выбору точки v найдутся $v_n \rightarrow 0$, $v_n \in (0, x)$ с $wM \neq wv_n + v_nM$. Но по лемме 2.4 $\exists z_n \in \overline{W}$ с $z_nM = z_nv_n + v_nM$. Если бы z_n была неограниченной, то, как легко показать, $0 \in \gamma S$, в противоречии с условием $\gamma S = \emptyset$. Используя ограниченную компактность $\overline{W}$, можно считать, что $z_n \rightarrow z$. Ясно, что $z \neq w$, а так как $[x, w) \cap \overline{W} = \emptyset$, то $z \neq 0$. Пусть $y_n \in M$, $0y_n \rightarrow 1$, $y = -z/\|z\|$, $p_n = (x + y_n)/2$, $q_n = \frac{\|w\|}{\|w\| + 1} \cdot x + \frac{1}{\|w\| + 1} \cdot y_n$. Ввиду $0 = \frac{\|w\|}{\|w\| + 1} \cdot x + \frac{1}{\|w\| + 1} \cdot w$ прямые $0q_n$ и wy_n параллельны. Из подобия треугольников и из $wy_n \geq wM = wx$ имеем $\|q_n\| \geq 1$, а так как $\|y_n\| \rightarrow 1$, то и $\|q_n\| \rightarrow 1$. В зависимости от расположения точек u_n, v_n на

отрезке $[x, y_n]$ имеем для некоторого $\lambda_n \in [0, 1]$ либо $\|q_n\| \leq (1 - \lambda_n)\|x\| + \lambda_n\|p_n\|$, либо $\|q_n\| \leq (1 - \lambda_n)\|y_n\| + \lambda_n\|p_n\|$, откуда $\|x + y_n\| \rightarrow 2$ ввиду $\|q_n\| \rightarrow 1$, $\lim \lambda_n > 0$ (нетрудно проверить, что $\lambda_n \geq \min\{1/(\|w\| + 1), \|w\|/(\|w\| + 1)\}$). Заменяя в проведенных рассуждениях w на z , x на y , аналогично получим $\|y + y_n\| \rightarrow 2$, откуда $x = y$ в силу $X \in (R')$. Но тогда $w \in (z, x]$, а это ввиду $zx = zM$ противоречит тому, что $w \notin \delta S$.

Как и раньше, $b_0 = \sup\{xM : x \in X\}$, так что для $M \in \mathcal{F}$ $0 < b_0 \leq +\infty$.

ТЕОРЕМА 2.18. Пусть $M \in \mathcal{F}$ — чебышёвское множество с выпуклым дополнением и $W = Q^{b_0}$. Тогда M — γ -солнце, а если X рефлексивно, то M — солнце.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $W = \emptyset$, то M — δ -солнце, т.е. γ -солнце, а в случае $X \in (Rf)$ — солнце, по предложению 1.16. Поэтому остается свести к противоречию случай $b_0 < \infty$, $W \neq \emptyset$. Из выпуклости cM легко следует, что Q^b выпукло при $0 < b \leq b_0$. Можно считать, что $0 \in W$, $b_0 = 1$. Пусть $0' = P0$, $v = -0'$. Допустим, что $\overset{\circ}{B}(v, 1) \cap W = \emptyset$. По теореме 2.8а) имеем

$${}^cM = \bigcup_{w \in W} \overset{\circ}{B}(w, wM),$$

поскольку $\gamma S = \emptyset$ из-за $b_0 < \infty$. Если теперь $v \in {}^cM$, то найдется $w \in W$ с $vw < wM \leq b_0$, что противоречит допущению. Но $v \in M$ влечет $v \in P0$, т.е. неединственность. Итак, пусть $w \in \overset{\circ}{B}(v, 1) \cap W$, $u = w/2$, $u' = Pu$. Так как $vw < 1$, то и $vu < 1$. Имеем $y = u' - u \in P0$, так как W отделяется от $B(u', uu')$ гиперплоскостью, $y \notin W + \overset{\circ}{B}$. Если бы оказалось $0' = y$, то $1 > vu = \|u + 0'\| = \|u + y\| = \|u'\| \geq 0M = 1$, что противоречиво. Тогда $P0 \supset \{0', y\}$, что невозможно по условию единственности.

Следующая теорема обобщает один результат А. Боснаи [35] для гильбертова пространства.

ТЕОРЕМА 2.19. Пусть X — гладкое пространство Ефимова–Стечкина, $M \in \mathcal{F}$ — такое чебышёвское множество, что $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$, $\partial M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, где H_n — некоторая последовательность гиперплоскостей. Тогда M выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\partial M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (H_n \cap \partial M)$, то по теореме Бэра найдутся $H = H_n$, $y \in \partial M$, $\varepsilon > 0$ такие, что $H \cap \partial M \supset B_\varepsilon y \cap \partial M$. Так как $y \in \partial M$, хотя бы одно (П) из двух открытых полупространств при H таково, что $\Pi \cap B_\varepsilon y \not\subset M$. Тогда $\Pi \cap B_\varepsilon y \cap M = \emptyset$. Действительно, допустим, что $u \in \Pi \cap B_\varepsilon y \cap {}^cM$, а $v \in \Pi \cap B_\varepsilon y \cap M$. Тогда $[u, v] \cap \partial M \neq \emptyset$, что противоречит условию $B_\varepsilon y \cap \partial M \subset H$. Ясно, что для некоторой точки $x \in B_\varepsilon y \setminus y$ мы имеем $Px = P_H x = y$. Допустим, что на луче $\overrightarrow{yx}$ имеется последняя точка z , для которой $zM = zy$. Покажем, что для некоторого $\delta > 0$ $\rho(A_\delta, H) > 0$, где $A_\delta = (B(z, zy + \delta) \cap M) \setminus B_\varepsilon y$. По выбору z $A_\delta \neq \emptyset$ (иначе для $z' \in \overrightarrow{yz}$, $z'z = \delta/2$ будем иметь $z'M = z'y$). Если $\forall \delta > 0$ $\rho(A_\delta, H) = 0$, то $\exists y_n \in M \setminus B_\varepsilon y$, $zy_n \rightarrow zy$, $y_n H \rightarrow 0$. Так как $X \in (CD)$, найдется $y_{n_k} \rightarrow \bar{y} \in M \setminus \overset{\circ}{B}_\varepsilon y$, $\bar{y} \in H$. Тогда $z\bar{y} \sim zy_{n_k} \sim zy = zM$, что невозможно, так как M — чебышёвское. Таким образом, $B_\varepsilon y \cap M \subset {}^c\Pi$, $\rho(A_\delta, {}^c\Pi) > 0$. Но тогда

$$\overset{\circ}{B}(z, zy + \delta) \cap M = [\overset{\circ}{B}(z, zy + \delta) \cap M \cap B_\varepsilon y] \cup A_\delta \subset {}^c\Pi \cup A_\delta$$

несвязно, что противоречит следующему следующему результату И. Г. Царькова [130]: если $X \in (CD)$, $M \in \mathcal{F}$, и для любого $x \in X$ множество Rx связно (или пусто), то для любого шара B множество $\overset{\circ}{B} \cap M$ связно (или пусто).¹⁰ Таким образом, $x \in S$, и по предложению 2.2 шар $B(x, xu)$ отделяется от M гиперплоскостью. Следовательно, в каждой точке ∂M , внутренней для $H_n \cap \partial M$ для некоторого H_n , имеется опорная гиперплоскость к M . Но такие точки плотны в ∂M , ибо множество граничных точек $H_n \cap \partial M$ в $\overset{\circ}{\partial M}$ нигде не плотно в ∂M для каждого n . Пусть теперь $z \in {}^c M$ произвольно, а $u \in \overset{\circ}{M}$. Возьмем $y \in [z, u] \cap \partial M$. Ясно, что в шаре $B_\varepsilon y$ найдется точка с опорным полупространством $\Pi \supset M$, и если ε достаточно мало, то $z \notin \Pi$. Отсюда следует выпуклость M .

ГЛАВА III ИЗБРАННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Эта глава написана Л.П. Власовым. Во время подготовки статьи С.В. Конягин предложил для нее свой неопубликованный результат, анонсированный впоследствии в [87]. Работа над изложением теоремы Конягина привела в конечном счете к написанию §1 в его настоящем виде. Автор этих строк выражает свою признательность С.В. Конягину и считает его фактическим соавтором, например, теоремы 3.1.

§1. О некоторых приложениях теории монотонных операторов

В 80-х гг. появились работы, в которых к задаче приближения в гильбертовом пространстве применяются методы теории монотонных операторов, развиваемой с 50–60-х гг. для решения операторных уравнений. В качестве иллюстрации такого применения заметим, например, что выпуклость чебышёвских множеств – аппроксимативно компактных или с непрерывной метрической проекцией (Ефимов–Стечкин, 1961; Власов, 1967; Асплунд, 1969) – является следствием того, что замыкание множества значений максимального монотонного оператора выпукло.

Оператор $A: X \rightarrow X$ (X – гильбертово пространство) с областью определения $D_A \subset X$ и областью значений $R_A \subset X$ не предполагается заранее линейным, непрерывным и даже однозначным. A называется *монотонным*, если $\langle x' - y', x - y \rangle \geq 0 \forall x, y, x', y' \in X, x' \in Ax, y' \in Ay$. Монотонный оператор A называется *максимальным монотонным оператором*, если всякий монотонный оператор, чей график в $X \times X$ содержит график A , совпадает с A . Если A – максимальный монотонный оператор и $\lambda > 0$, тогда $\overline{D_A}$ и $\overline{R_A}$ выпуклы и любой элемент $z \in X$ имеет единственное представление вида $z = x + \lambda y$, где $y \in Ax$. Если $x = J_\lambda z$, $y = T_\lambda z$, то J_λ и T_λ – липшицевы с константой 1 и λ^{-1} , соответственно. Эти и другие сведения о монотонных операторах можно найти в [8], [37].

¹⁰ Менее общие теоремы были доказаны ранее Л.П. Власовым [138] и С.В. Конягиным [84].

Для любого $M \in \mathcal{F}$ метрическая проекция P_M монотонна [7], [81], [30]. Беренс [29], [30], Франчетти и Папини [63] рассматривали следующее расширение оператора метрической проекции:

$$\Phi x = \Phi_M x = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}} P^\delta x \quad (x \in X).$$

$\Phi x \neq \emptyset \forall x \in X$, $R_\Phi \subset \overline{\text{co}} M$ и Φ, Φ^{-1} — максимальные монотонные операторы. Φ есть субдифференциал (субдифференциальное отображение) функции Асплунда $\varphi_M(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}d_M^2(x)$ [7], [30].

1. При $A = \Phi$, $\lambda = 1$ обозначим $J_\lambda = J$, $T_\lambda = \varphi$, тогда имеем $\forall z \in X \ z = Jz + \varphi z$, где $\varphi z \in \Phi(Jz)$. В частности, $y \in \Phi x$ равносильно $J(x+y) = x$, $\varphi(x+y) = y$. Заметим (см. [31]), что $W = \{x \in X : \Phi x \neq Px\}$ (минимизирующая последовательность, слабо сходящаяся к точке из $S(x, xM)$, сходится, далее учитываем предложение 1.4 и теорему 1.2).

Нам понадобится следующий простой факт (см., например, [134]).

ЛЕММА 3.1. $\forall x \in X \ \Phi x \cap S(x, xM) = Px$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $y \in \Phi x$ и $z \neq y$. Тогда

$$J(x+z) \in B\left(x + \frac{z-y}{2}, \frac{\|z-y\|}{2}\right), \quad \varphi(x+z) \in B\left(\frac{z+y}{2}, \frac{\|z-y\|}{2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем доказывать и применять лемму только в случае $x = 0$, чтобы избежать громоздких обозначений. Обозначая $u = (z-y)/2$, и учитывая, что $Jy = 0$, в силу монотонности Φ будем иметь:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \varphi z - y, Jz - Jy \rangle = \langle 2u - Jz, Jz \rangle = \langle (u - Jz) + u, (Jz - u) + u \rangle \\ &= \langle u - Jz, Jz - u \rangle + \langle u, u \rangle = -\|Jz - u\|^2 + \|u\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда $Jz \in B(u, \|u\|)$, а

$$\varphi z = z - Jz \in z - B(u, \|u\|) = z - u + B(0, \|u\|) = B\left(\frac{z+y}{2}, \|u\|\right).$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $x \in W$, $y \in \Phi x$, E_y — эллипсоид, полученный “вращением” внутренности эллипса с фокусами y , $2x - y$ “вокруг” большой полуоси $a = xM$ (малая полуось $b = \sqrt{xM^2 - \|y - x\|^2}$). Тогда $J(E_y) \subset W$, а если M не допускает двух опорных шаров одного радиуса ни в какой своей точке, то $J(\overline{E_y}) \subset W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать $x = 0$, $xM = 1$. Ясно, что $E_y = \{z \in \overset{\circ}{B} : \|z - y\| + \|z + y\| < 2\}$. Тогда по лемме 3.2

$$\|\varphi z\| \leq \left\| \varphi z - \frac{z+y}{2} \right\| + \left\| \frac{z+y}{2} \right\| \leq \frac{\|z-y\| + \|z+y\|}{2} < 1 \ [\leq 1],$$

если $z \in E_y$ [$\overline{E_y}$]. Если $\varphi z \notin M$, то $\Phi(Jz) \neq P(Jz)$, $Jz \in W$ (см. выше). Поэтому остается рассмотреть случай $\varphi z \in M$, $\Phi(Jz) = P(Jz)$, $z \in \overline{E_y}$. Тогда $\varphi z \in P0$ и $\varphi z \in P(Jz)$, и в точке $\varphi z \in M$ имеются опорные шары B и $B(Jz, \|Jz - \varphi z\|)$. По условию тогда должно быть $Jz = \alpha \varphi z$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Имеем $z = (\alpha + 1)\varphi z$, $\alpha \leq 0$, $0 \in [Jz, \varphi z]$. Так как $\alpha < 0$ означало бы $0 \in T'$, остается лишь возможность $Jz = 0 \in W$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $x \in W$. Тогда

- а) если x – неизолированная точка W , то она лежит на липшицевой кривой в W , не сводящейся к x ;
- б) x – изолированная точка W тогда и только тогда, когда $Px = S(x, xM)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем $x = 0$, $xM = 1$. Если $\exists z \in \overset{\circ}{B}$ с $Jz \neq 0$, тогда $\Phi 0 \neq B$ и найдется $y \in \overset{\circ}{B} \cap \partial\Phi 0$. Существует $z \in E_y \setminus \Phi 0$ такое, что $[y, z] \subset E_y \setminus \Phi 0$. Тогда $J([y, z])$ является искомой кривой (J – липшицево отображение с константой 1) по лемме 3.3. Если же $Jz = 0 \ \forall z \in \overset{\circ}{B}$, то $\Phi 0 = B$ и по лемме 3.1 $P0 = S$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенную формулировку следствия 3.1 дали Вестфаль и Фреклинг [144]. С помощью леммы 4 из более ранней работы Балаганского [14] нетрудно вывести, что для некоторой окрестности U любой точки $x \in W$ пересечение $W \cap U$ линейно связно (липшицевость соответствующих кривых не доказывалась и случай изолированной точки не выделялся). Балаганский и Власов [БВ] фактически установили б) в более общем случае (см. доказательство теоремы 2.1 в [БВ], а в данной работе формулировка теоремы 2.1 изменена (см. там утверждение (*)).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $M \in \mathcal{F}$ и W имеет в точке x опорный шар $B(u, \|u - x\|)$. Тогда для любого $y \in \Phi x \setminus Px$ точка y' пересечения сферы $S(x, xM)$ с лучом $\{y + \lambda(u - x) : \lambda \geq 0\}$ принадлежит M и, следовательно, Px .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $x = 0$, $xM = 1$. Допустим, что $y' \notin M$, тогда по лемме 3.1 $y' \notin \Phi 0$. Следовательно, на отрезке $[y, y']$ найдется точка $\bar{y} \in \Phi 0$ такая, что $\forall \lambda > 0 \ \bar{y} + \lambda u \notin \Phi 0$. Возьмем $\lambda < 1/2$ столь малым, что $z = \bar{y} + 2\lambda u \in E_{\bar{y}}$. Тогда по леммам 3.2 и 3.3 $Jz \in W \cap B(\lambda u, \|\lambda u\|)$ и $Jz \neq 0$ из-за $z \notin \Phi 0$. Но это – противоречие с условием.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если в каждой точке W имеется опорный шар, то M есть множество существования.

Действительно, для $x \in W$ ближайшая точка существует по теореме 3.1, а для $x \in \delta S$ – по теореме 1.2.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть M – множество единственности (в частности, чебышёвское). Тогда ни в какой точке W не существует двух опорных шаров одного радиуса, а если $B(u, ux)$ – опорный шар в точке $x \in W$, то Φx является отрезком, т.е. существует $\lambda > 0$ такое, что

$$\Phi x = [Px - \lambda(u - x), Px].$$

Действительно, в противном случае по теореме 3.1 мы имели бы для $y \in \Phi x$, опорных шаров $B(u_i, u_i x)$ и точек $y'_i = y + \lambda_i(u_i - x)$ ($i = 1, 2$): $y'_1 \neq y'_2$ и $y'_i \in Px$. Для одного шара $y'_1 = y'_2 = Px$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $u_1 = u_2 = u$ и $y = Px - \lambda(u - x)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть M – множество единственности (в частности, чебышёвское), а W выпуклое. Тогда W – гладкое множество и для $x \in W$ с опорным полупространством Π в точке x ($\overset{\circ}{\Pi} \cap W = \emptyset$) имеем $Px \in \Pi$. При этом W непременно содержит неопорные точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В негладкой точке существует два опорных шара, что противоречит следствию 3.3. По теореме 3.1, если Π определяется вектором $u - x$, то геометрически ясно, что $Px \in \Pi$. Допустим, что все точки W опорные. Возьмем $x, y \in W$ такие, что $y \notin \Pi$, где Π опорно в x ($\Pi \cap W = \emptyset$; если такого y нет, то W лежит в гиперплоскости и в x два опорных шара). По предположению, точка $(x + y)/2$ опорная. Соответствующая опорная гиперплоскость содержит x и отличается от уже имеющейся в x опорной гиперплоскости.

Пусть гиперплоскость $H \ni 0, e \perp H, F$ — определенная на H вещественная функция, F' — ее производная Фреше, удовлетворяющая условию Липшица $\|F'(x) - F'(y)\| \leq C\|x - y\| \forall x, y \in H, F(0) = 0$. Множество $\{F(z)e + z : z \in H\}$ можно рассматривать как “график” F .

ТЕОРЕМА (С. В. Конягин [87]). Пусть M — чебышёвское множество. Если пересечение A множества точек разрыва отображения P_M с открытым множеством U непусто, то A не может быть покрыто конечным числом графиков функций с липшицевыми производными.

(В [87] при формулировке теоремы допущена ошибка.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $D_1, \dots, D_n$ — поверхности (“графики”), такие что $A = W \cap U \neq \emptyset$ и $A \subset \bigcup_1^n D_i$, то можно считать, что $W \cap U \cap D_1 \not\subset \bigcup_2^n D_i$, в противном случае D_1 можно было бы исключить из рассмотрения. Но тогда для точки $x \in W \cap U \cap D_1$ имеется окрестность U' с $W \cap U' \subset D_1$, в которой поверхность представлена в виде (полагая $x = 0$): $U \cap D_1 = \{F(z)e + z : z \in H \cap U''\}$, H — касательная гиперплоскость в точке x , e — единичный вектор нормали в x , $U'' \subset U'$ — окрестность x , $F(0) = 0, F'(0)(h) = 0 \forall h \in U''$. Применяя теорему о среднем значении (Иоффе–Тихомиров [73, с. 39]), будем иметь

$$\begin{aligned} |F(h)| &= |F(0 + h) - F(0) - F'(0)(h)| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|F'(0 + th) - F'(0)\| \cdot \|h\| \leq C\|h\|^2 \quad \forall h \in U''. \end{aligned}$$

Так как

$$C\|h\|^2 \leq \frac{1}{2C} - \sqrt{\frac{1}{4C^2} - \|h\|^2},$$

это означает, что в точке 0 имеются два опорных шара радиуса $1/(2C)$ с центрами $\pm e/(2C)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. С. В. Конягин доказывает свою теорему по-другому, с помощью ряда приемов выпуклого анализа, хотя в некоторых моментах имеется определенное сходство. (В [87] теорема сформулирована не совсем точно.)

2. Далее мы рассмотрим другие свойства множества W . В. С. Балаганский [14] доказал линейную связность W (если $\overline{\text{co}} M \setminus M$ связно) в гильбертовом пространстве. Л. Веселы [134] воспроизвел результаты Балаганского, используя теорию монотонных операторов. Мы дадим здесь упрощенное изложение.

Если мы построим операторы J_λ и T_λ для оператора $A = \Phi^{-1}$, то всякое $z \in X$ имеет единственное представление вида $z = x + \lambda y$, где $y \in \Phi^{-1}x$, а именно: $x = J_\lambda z$,

$y = T_\lambda z$. Таким образом, $J_\lambda z \in \Phi(T_\lambda z) \forall z \in X$. Далее, $M \subset R_\Phi = D_{\Phi^{-1}} \subset \overline{\text{co}} M$. Так как $\overline{R_\Phi}$ выпукло, то $\overline{D_{\Phi^{-1}}} = \overline{\text{co}} M$. Предполагая, что $\overline{\text{co}} M \setminus M$ связно, рассмотрим любые две точки $u, v \in W$. Можно считать, что $u = 0$ (свойство монотонности не меняется от переноса нулевого элемента). Найдутся $x \in \Phi 0 \setminus P 0$ и $y \in \Phi v \setminus P v$. Так как $\Phi 0 \cap M = P 0$, то $xM, yM > 0$. Можно провести в $\overline{\text{co}} M \setminus M$ кривую (даже ломаную) Γ через x, y так, чтобы $\rho(\Gamma, M) \geq d > 0$. Возьмем $\lambda \in (0, d/2)$ и положим $y' = y + \lambda v$. Пусть $\Gamma' = \Gamma \cup [y, y']$. T_λ непрерывно отображает Γ' в некоторый путь Λ с концами 0 и v . Действительно,

$$x + \lambda 0 = x = J_\lambda x + \lambda T_\lambda x, \quad y + \lambda v = y' = J_\lambda y' + \lambda T_\lambda y'$$

и, в силу единственности разложения, $J_\lambda x = x, T_\lambda x = 0, J_\lambda y' = y, T_\lambda y' = v$. Известно [37, теорема 2.2], что $\forall z \in \overline{D(A)} \quad J_\lambda z \rightarrow z$ при $\lambda \rightarrow 0$; отсюда, если $K \subset \overline{D(A)}$ компактно, то $\sup_{z \in K} \|z - J_\lambda z\| \rightarrow 0$. Поэтому можно считать λ настолько малым, что $\lambda \|v\| \leq d, \|z - J_\lambda z\| < d \quad \forall z \in \Gamma$.

Для $z \in [y, y']$ имеем

$$\|z - J_\lambda z\| = \|z - y + J_\lambda y' - J_\lambda z\| \leq zy + y'z < d.$$

Таким образом, $J_\lambda z \notin M \quad \forall z \in \Gamma'$, а поэтому $T_\lambda z \in W \quad \forall z \in \Gamma'$, так что $\Lambda \subset W$. Таким образом, любые две точки в W могут быть соединены липшицевой кривой: $\|T_\lambda z - T_\lambda z'\| \leq \lambda^{-1} \|z - z'\|$ (напомним, при условии, что $\overline{\text{co}} M \setminus M$ связно).

3. Теперь предположим, что W замкнуто. По лемме 2.3 точке $x \notin W \cup \gamma S \cup M$ соответствует точка $\psi(x) = z \in W$ такая, что $x \in (\psi(x), Px)$ ($Px = x'$ одноточечно). $\psi(x)$ определяется однозначно по x . Как нетрудно видеть (В. С. Балаганский [17]), ψ — непрерывное отображение. Если M — чебышёвское множество и $b > 0$, то отображение $\psi: \Gamma^b \setminus (W \cup \gamma S) \rightarrow W$ взаимно однозначно и является гомеоморфизмом на каждом компактном множестве. Рассмотрим случай, когда M выпукло. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n \in W$ произвольны, а $0 < b < \min_i z_i M$. Так как Γ^b гомеоморфно сфере, для любого k существует множество в Γ^b , содержащее точки $y_i = [z_i, z'_i] \cap \Gamma^b$ ($z'_i = Pz_i, z_i = \psi(y_i)$) и гомеоморфное k -мерной сфере. Таким образом, если M — чебышёвское множество, M выпукло, а W замкнуто, то в W существует множество, гомеоморфное k -мерной сфере, содержащее заранее заданные точки $z_i \in W, i = 1, 2, \dots, n$.

§ 2. Невыпуклое чебышёвское множество в предгильбертовом пространстве

Кли выдвинул гипотезу о существовании в гильбертовом пространстве (возможно, несепарабельном) чебышёвского множества с ограниченным выпуклым дополнением. Асплунд [7] показал, что если невыпуклое чебышёвское множество вообще существует, то существует и множество, предсказываемое Кли. В 1987 г. Г. Джонсон [75] опубликовал пример чебышёвского множества с ограниченным выпуклым дополнением в (неполном) пространстве последовательностей из ℓ^2 , оканчивающихся нулями. Мы дадим здесь изложение внешне очень схожей конструкции, но основанное на геометрических соображениях, а не на вычислениях. (Построение Джонсона весьма сложно, обнаружены, хотя и исправлены, некоторые ошибки [74].)

Мы предполагаем, что евклидово пространство E_n содержится в ℓ^2 , т.е. отождествляется с подпространством

$$E_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in \ell^2 : x_i = 0 \forall i > n\}.$$

При этом E_{n+1} удобно представлять как $E_n \times \mathbb{R}$, а некоторые множества в E_{n+1} как подграфики вогнутых функций, заданных на E_n . При переходе от n к $n+1$ в процессе индуктивного построения мы будем опускать индексы n и положим:

$$\begin{aligned} E &= E_n, & E' &= E_{n+1} = E_n \times \mathbb{R} = \{(x, r) : x \in E, r \in \mathbb{R}\}; \\ L &= L_n = E_{n-1}, & L' &= \{(x, r) : x \in L, r \in \mathbb{R}\}; \\ \Pi &= \Pi_n = E_n^+ = \{x \in E_n : x_n \geq 0\}, & \Pi' &= \{(x, r) : x \in \Pi, r \in \mathbb{R}\}; \\ \Pi^0 &= \Pi_{n+1} = \{x \in E_{n+1} : x_{n+1} \geq 0\} = \{(x, r) : x \in E, r \geq 0\}. \end{aligned}$$

Мы также отождествляем $(x, 0)$ с x . Заметим, что $L [L']$ — граница $\Pi [\Pi']$ в $E [E']$. Напомним, что $e_n = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$, где 1 стоит на n -м месте.

Предположим, что множество $M \subset E$ и число $b > 0$ такие, что:

- (а) $E \setminus M$ ограничено, выпукло и открыто в E , $e_1 \in P_M 0$;
- (б) для любого $x \in \Pi$ $P_M x$ одноточечно и содержится в Π , а P_M отображает $L \setminus M$ на $\Pi \cap \partial M$;
- (в) для любого $y \in \partial M$ существует $x \in E$ с $xy = xM = b$.

(Под ∂M всегда понимается граница M относительно E , даже если рассуждения относятся к E' .)

Построим для произвольного $\theta > 1$ множество $M' \subset E'$, $M \subset M'$, обладающее свойствами (а)–(в), если заменить всюду E на E' , M на M' , Π на Π^0 , L на E , а b на $b' = b/8$. Кроме того,

$$P_{M'}|_{\Pi} = P_M|_{\Pi}, \quad \sup\{\|z\| : z \in E' \setminus M'\} \leq \theta \cdot \sup\{\|z\| : z \in E \setminus M\}.$$

Условимся относительно дальнейших обозначений. Под $B(w, R)$ понимается шар в E' , для шара в E используется выражение $B(w, R) \cap E$ (если $w \in E$). Положим

$$C = \{(x, r) \in E' : x \in \overline{E \setminus M}, |r| \leq xM\}, \quad A = \{(x, r) \in C : r \geq 0\};$$

K_x — конус с вершиной (x, xM) и основанием $B(x, xM) \cap E$;

$$R_w = (xM - r)/\sqrt{2}, \quad \text{где } w = (x, r) \in C;$$

$\xi = \sqrt{8} d/b$, где $d = \text{diam}(E \setminus M)$;

$$Q = \{w \in C : w\Pi' \leq \xi R_w\}, \quad D = \Pi^0 \cap \bigcup_{w \in Q} \overset{\circ}{B}(w, R_w).$$

Следующие утверждения очевидны или легко доказываются.

$\Pi' \cap C \subset Q$, $\Pi' \cap \overset{\circ}{A} \subset D$. Если $v = (x, xM)$, $v' = (x, -xM)$, то

$$K_x = \Pi^0 \cap \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} [(1 - \lambda)v + \lambda B(v', R_{v'})].$$

Поэтому $\forall w = (x, r) \in C \quad B(w, R_w) \cap \Pi^0 \subset K_x \subset A, D \subset A$. A и C — выпуклые замкнутые множества в E' .

ЛЕММА 3.4. Для любого $w' \in \partial D$ существует $w \in Q$ такое, что $w' \in B(w, R_w)$ (возможен случай $w = w', R_w = 0$), и поэтому

$$(*) \quad \overline{D} = \Pi^0 \cap \bigcup_{w \in Q} B(w, R_w).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется последовательность $w_n \in Q$ такая, что

$$w' w_n - R_{w_n} \rightarrow 0, \quad w' \in \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{B}(w_n, R_{w_n})}.$$

Можно считать, что $w_n = (x_n, r_n) \rightarrow (x, r) = w$. Поскольку $w_n \Pi' \leq \xi R_{w_n}$, а $R_{w_n} \rightarrow R_w$, то $w \Pi' \leq \xi R_w, w' \in B(w, R_w), w \in Q$. Ясно также, что выполняется (*).

ЛЕММА 3.5. $E \setminus M \subset D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $xM \geq b/2$. Тогда для $w = (x, 0)$ имеем $R_w = xM/\sqrt{2} \geq b/\sqrt{8}$, так что

$$w \Pi' \leq d = \frac{\sqrt{8}d}{b} \cdot \frac{b}{\sqrt{8}} \leq \xi R_w.$$

Поэтому $w \in Q \cap \Pi^0, w \in \overset{\circ}{B}(w, R_w) \cap \Pi^0 \subset D$. Пусть теперь $xM \leq b/2$, и $x' \in P_M x$. Тогда по условию (в) найдется $z, zM = zx' = b$. Поскольку нормаль к ∂M в точке x' единственна, имеем $x \in [z, x']$. Положим $w = (z, -zM)$. Имеем $w \in C, R_w = b\sqrt{2}$, так что

$$w \Pi' \leq d \leq \frac{\sqrt{8}d}{b} \cdot b\sqrt{2} = \xi R_w, \quad w \in Q.$$

Так как $\|(x, 0) - (z, -zM)\|^2 = xz^2 + zM^2 < R_w^2$, то $(x, 0) \in D$.

ЛЕММА 3.6. Q и D — выпуклые множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha, \alpha' \geq 0, \alpha + \alpha' = 1, w = (x, r) \in Q, w' = (x', r') \in Q$. Так как функция $w \rightarrow w \Pi'$ выпукла, а $d_M: x \rightarrow xM$ вогнута, то

$$\begin{aligned} (\alpha w + \alpha' w') \Pi' &\leq \alpha w \Pi' + \alpha' w' \Pi' \leq \xi(\alpha R_w + \alpha' R_{w'}) \\ &= \xi[\alpha(xM - r) + \alpha'(x'M - r')]/\sqrt{2} \\ &\leq \xi[(\alpha x + \alpha' x')M - (\alpha r + \alpha' r')]/\sqrt{2} = \xi R_{\alpha w + \alpha' w'} \end{aligned}$$

и Q выпукло. Если теперь $v, v' \in D$, то имеем $v \in \overset{\circ}{B}(w, R_w), v' \in \overset{\circ}{B}(w', R_{w'})$, где $w, w' \in Q$. Далее,

$$\begin{aligned} \alpha v + \alpha' v' &\in \alpha \overset{\circ}{B}(w, R_w) + \alpha' \overset{\circ}{B}(w', R_{w'}) \\ &= \overset{\circ}{B}(\alpha w + \alpha' w', \alpha R_w + \alpha' R_{w'}) \\ &\subset \overset{\circ}{B}(\alpha w + \alpha' w', R_{\alpha w + \alpha' w'}) \subset D \end{aligned}$$

(выше установлено, что $\alpha w + \alpha' w' \in Q$ и $\alpha R_w + \alpha' R_{w'} \leq R_{\alpha w + \alpha' w'}$).

ЛЕММА 3.7. $\overline{D}$ гладко в каждой точке $w = (x, r) \in \partial D$ с $r > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.4 найдем $w_0 \in Q$, $w \in B(w_0, R_{w_0}) \subset \overline{D}$. Если $R_{w_0} > 0$, то гладкость очевидна. Пусть $R_{w_0} = 0$, тогда $w = w_0 \in Q$, $w\Pi' = 0$, $R_w = 0$, $xM = r > 0$, т.е. $w \in \partial A$, $x \notin M$. Рассмотрим возможность $w \in \Pi' \setminus L'$. Тогда $x \in \Pi \setminus L$, а по (б) найдутся $x' \in \Pi$, $x' = P_M x$, $z \in L \setminus M$, $z' = P_M x = x'$. Как и в лемме 3.5, $x \in (z, x')$, значит $w \in ((z, zM), (x', 0))$ — точка конуса K_z , гладкая для K_z и для $\overline{D} \supset K_z$ (ввиду $(z, zM) \in A \cap \Pi' \subset \overline{D}$ (см. (*)) и леммы 3.5, 3.6). Остается возможность $w \in L'$. Как и выше, $x' = P_M x \in \Pi$. Так как $x \in T'_M$, по теореме В $x \in F_M$, т.е. w — гладкая точка для A . Пусть H — единственная опорная гиперплоскость к A в точке w , а Z — двумерная плоскость точек x, x', w . Допустим, что $\overline{D}$ негладко в точке w , и H_1 — опорная гиперплоскость к $\overline{D}$ в w , $H_1 \neq H$. Фактически $H_1 \cap Z \neq H \cap Z$: в противном случае $[x', w] \subset H_1$, тогда H_1 опорна к конусу $K_x \subset A$ в точке $(x' + w)/2$ и поэтому $H_1 = H$. Рассмотрим в плоскости Z точки $w_n = (x_n, r_n)$, где $x \in [x', x_n]$, $x_n \rightarrow x$, $r_n = xx' - xx_n$. Пусть α — угол ($\leq 90^\circ$) между прямыми $H_1 \cap Z$ и $H \cap Z$, u_n — точка из $H_1 \cap Z$, ближайшая к w_n , $w'_n = (x, r_n)$. $\angle ww'_n w_n = \pi/2$, $w'_n w_n = xx_n = xx' - r_n = wx - r_n = ww'_n$, $\angle w'_n w w_n = \pi/4$, $\angle xwx' = \pi/4$, поэтому $\angle x'w w_n = \pi/2$. Отсюда $u_n w_n / w w_n = \cos \alpha < 1$. Имеем, далее:

$$\sqrt{2}xx_n = ww_n, \quad r_n = xM - xx_n, \quad R_{w_n} = \frac{x_n M - r_n}{\sqrt{2}} = \frac{x_n M - xM + x_n x}{\sqrt{2}}.$$

Так как по предложению 1.4 $x \in \delta' S$, то $\frac{x_n M - xM}{x_n x} \rightarrow 1$. Поэтому

$$\frac{R_{w_n}}{ww_n} = \frac{x_n M - xM}{x_n x} \cdot \frac{x_n x}{\sqrt{2}ww_n} + \frac{1}{2} \rightarrow 1.$$

С другой стороны, по (в) $b \leq d/2$ и

$$\frac{w_n \Pi'}{R_{w_n}} \leq \frac{x_n x}{R_{w_n}} = \frac{ww_n}{R_{w_n} \sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{d}{b} \cdot \sqrt{8} = \xi,$$

$w_n \in Q$, $B(w_n, R_{w_n}) \subset \overline{D}$, следовательно,

$$\frac{R_{w_n}}{ww_n} \leq \frac{u_n w_n}{ww_n} = \cos \alpha < 1,$$

что противоречиво.

Итак, $\overline{D}$ — ограниченное выпуклое множество в E' , гладкое в точках $w = (x, r) \in \partial D$ с $r > 0$. Кроме того, $\overline{D} \cap \Pi' = A \cap \Pi'$ и если $w \in D$, то $\overline{\text{co}}(w \cup [B(x, xM) \cap E]) \subset D$. Следовательно, всякая опорная гиперплоскость к D в точке w с $r > 0$ образует с E угол $\leq 45^\circ$ и определена вогнутая функция $x \rightarrow \rho_x$ на $\overline{E \setminus M}$ (с подграфиком $\overline{D}$):

$$\rho_x = \max\{r : (x, r) \in \overline{D}\}.$$

Приступим непосредственно к построению M' . Положим

$$\psi_\theta(x, r) = (x, -\theta \cdot r), \quad \theta \geq 1.$$

(ψ_θ отображает Π^0 на $\overline{E' \setminus \Pi^0}$.)

$$D' = \Pi^0 \cap \bigcup_{x \in E \setminus M} \overset{\circ}{B}(x, \rho_x), \quad D'' = \psi_\theta(D'),$$

$$M' = E' \setminus (D' \cup D'').$$

$M \subset M'$: если $x \in M$ и $x \in D' \cup D''$, то $x \in D'$ ($E \cap D' = E \cap D''$), $x \in \overset{\circ}{B}(y, \rho_y)$ для некоторого $y \in E$, $yx < \rho_y \leq yM$, что невозможно. Проверим условия (а)–(в) для M' при $\theta > 1$.

(а) Поскольку $\rho_0 = 0M = 1$, то $\overset{\circ}{B} \cap \Pi^0 \subset D'$, $\overset{\circ}{B} = (\overset{\circ}{B} \cap \Pi^0) \cup \psi_1(\overset{\circ}{B} \cap \Pi^0) \subset D' \cup D''$, следовательно, $e_1 \in P_{M'}0$. То же включение верно не только для $\overset{\circ}{B}$, но и для любого $\overset{\circ}{B}(y, \rho_y)$, $y \in E \setminus M$. Поэтому $E' \setminus M' = D' \cup D''$ открыто, а ограниченность его очевидна. Выпуклость D' доказывается так же, как выпуклость D в лемме 3.6, при использовании вогнутости ρ_x . После этого нетрудно доказать и выпуклость $D' \cup D''$.

(б) Пусть $x \in E \setminus M$ произвольно. Сопоставим точке x точку $w'' \in \partial D'$ следующим образом. Проведем через точку (x, ρ_x) опорную (касательную!) гиперплоскость H к $\overline{D}$ до пересечения с E по многообразию N ; если $H \parallel E$, полагаем $w'' = (x, \rho_x)$. Проведем через N гиперплоскость H_1 в E' , касательную к $B(x, \rho_x)$, так чтобы точка касания $w'' = (x'', r'')$ оказалась в Π^0 (т.е. $r'' \geq 0$). Заметим, что возможен случай $H_1 \perp E$, если N касается $B(x, \rho_x)$ в точке $(x'', 0)$. Если $H [H_1]$ образует угол $\alpha [\alpha_1]$ с E , то $\sin \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha$. Отсюда следует, что расстояние от любой точки $w = (x, r)$ гиперплоскости H до E (равное r) совпадает с расстоянием от x до H_1 . Поскольку H опорна к $\overline{D}$ в точке $w = (x, \rho_x)$, то H_1 опорна к D' в точке w'' , и таким образом, $w'' \in P_{M^0}x$, где $M^0 = M' \cap \Pi^0$. Как и в лемме 3.4, нетрудно видеть, что

$$(*) \quad \overline{D'} = \Pi^0 \cap \bigcup_{x \in E \setminus M} B(x, \rho_x)$$

(нужно использовать непрерывность вогнутой функции ρ_x). Предположим теперь, что некоторая гиперплоскость H' опорна к $\overline{D'}$ в точке w' . В силу (*) найдется $x \in E \setminus M$ с $w' \in B(x, \rho_x)$, $w'x = \rho_x$. Проведем гиперплоскость H_2 через (x, ρ_x) и многообразие $H' \cap E$ (если $H' \cap E = \emptyset$, то $H_2 = H'$). Из таких же соображений, что и выше, теперь следует, что H_2 опорна к $\overline{D}$ в точке (x, ρ_x) . Для $H' = H_1$ из приведенного ранее рассуждения теперь следует, что $H_2 = H$ в силу единственности опорной гиперплоскости к $\overline{D}$. Таким образом, $P_{M^0}x = w''$. Допустим, что существует $w_2 \in \overline{D''} \cap P_{M'}x$, тогда $\|x - \psi_\theta^{-1}(w_2)\| < xw'' = xM^0$ ввиду $\theta > 1$, что невозможно. Итак, $w'' = P_{M'}x$ и, следовательно, для $x \in E \setminus P_{M'}x$ одноточечно и содержится в Π^0 (Π^0 играет роль Π при переходе от E к E'). Докажем теперь, что $P_{M'}$ отображает $E \setminus M = E \setminus M'$ на $\Pi^0 \cap \partial M'$ (роль L в (б) теперь играет E). Возьмем любое $w' \in \Pi^0 \cap \partial M'$. Проведем, как выше, опорную гиперплоскость H' , найдем $x \in E \setminus M$ с $w' \in B(x, \rho_x)$, и гиперплоскость H_2 , проходящая через (x, ρ_x) и $H' \cap E$ – опорная к $\overline{D}$. Поэтому $w' = P_{M'}x$. Остается заметить, что если $v \in \Pi^0 \setminus M'$, то для $w' \in P_{M^0}v$ найдется $x \in E \setminus M$ с $w' = P_{M'}x$, как только что доказано. Но в точке w' нормаль к $\partial M'$ единственна ($w' -$ гладкая точка D'), поэтому $v \in [w', x]$ и $w' = P_{M'}v$. (б) доказано.

(в) Покажем вначале, что $\rho_x \geq xM/2 \quad \forall x \in E \setminus M$. Если $xM \leq b/2$, то как и в лемме 3.5, найдем z с $zM = zx' = b$, где $x' \in P_M x$, $x \in [z, x']$. Для $w = (z, zM - 2zx)$ имеем $R_w = \sqrt{2}zx$, и так как $zx \geq b/2$, то $w\P' \leq d \leq \xi R_w$, $w \in Q$. Отсюда $(x, xM) \in B(w, R_w) \cap \Pi^0 \subset \bar{D}$ и поэтому $\rho_x = xM \geq xM/2$. Пусть теперь $xM > b/2$. Возьмем $w = (x, 2\rho_x - xM)$. Тогда $R_w = \sqrt{2}(xM - \rho_x)$, $(x, \rho_x) \in \overset{\circ}{B}(w, R_w)$ (случай $\rho_x = xM$ можно исключить). Отсюда $w \notin Q$, ибо $(x, \rho_x) \notin D$. Это означает, что $d \geq w\P' > \xi R_w$, и значит, $b > 4(xM - \rho_x)$. Имеем $2xM + 4\rho_x > b + 4\rho_x > 4xM$ и $\rho_x > xM/2$.

Возьмем любое $w \in \partial M' \cap \Pi^0$, тогда по уже доказанному (б) найдется $y \in E \setminus M$ с $w \in P_{M'}y$. Если $yw \geq b/4$, то имеется $z \in [y, w]$ с $zM' = zw = b/8 = b'$. Пусть $yw < b/4$. Так как $\rho_y = yw$, то по предыдущему $yM \leq 2\rho_y < b/2$. Тогда, как показано выше, $\rho_y = yM$, следовательно, $w \in P_M y$, а для таких w (в) выполняется по индуктивному предположению (даже для $b' = b$). Остается рассмотреть случай $w' \in \partial M' \setminus \Pi^0$. Для $w = \psi_\theta^{-1}(w')$ найдем $y \in E \setminus M$ с $w = P_{M'}y$. Шар $B(y, \rho_y)$ преобразуется при помощи ψ_θ в эллипсоид, образуемый "вращением" соответствующего эллипса вокруг оси, перпендикулярной E в E' . Большая полуось эллипса $-\theta\rho_y$, малая $-\rho_y$, наименьший радиус кривизны, как известно, равен $\rho_y^2/(\theta\rho_y) = \rho_y/\theta$. Круги такого и меньшего радиуса могут катиться изнутри по эллипсу. Другими словами, в каждой точке эллипса существует круг радиуса ρ_y/θ , опорный изнутри к эллипсу. Ясно, что в w' , как и в каждой точке эллипсоида, существует шар радиуса ρ_y/θ , опорный изнутри к эллипсоиду в w' . Остается заметить, что ввиду $\theta < 2$ $\rho_y/\theta = yw/\theta \geq b/8$ и что часть эллипсоида, лежащая в $\psi_\theta(\Pi^0)$, содержится в $\bar{D}''$.

Итак, свойства (а)–(в) установлены для M' . Проверим, что $\forall x \in \Pi \quad P_{M'}x = P_M x$. Действительно, если $x' = P_M x$ и $x \in \Pi$, то $\rho_x = xM$ (для $w = (x, xM)$ $R_w = 0$, $w \in \bar{D}$). Тогда $\overset{\circ}{B}(x, \rho_x) \subset D' \cup D''$, H (см. выше доказательство (б)) проходит через точку x' , $H_1 \perp E$, следовательно, $x' \in P_{M'}x$.

Наконец, пусть $K = \overline{E \setminus M}$, $K' = \overline{E' \setminus M'}$, $K'^+ = K' \cap \Pi^0$. Примем обозначение $Y0 = \sup\{\|y\| : y \in Y\}$ для ограниченного множества $Y \subset \ell^2$. Допустим, что $K'^+0 > K0$, и $w \in K'^+$ таково, что $\|w\| = K'^+0$. Отрезок $[0, w]$ является нормалью к $\partial M'$ в точке w , поэтому, как установлено выше, $P_{M'}0 = w$, но это невозможно по уже доказанным (а) и (б). Итак, $K'^+0 = K0$. Так как $K' \setminus \Pi^0 \subset \psi_\theta(K'^+)$, то $K'0 \leq \theta \cdot K0$.

Таким образом, если в E_n построено множество M_n и указано число $b_n > 0$ такие, что: $E_n \setminus M_n$ ограничено, выпукло, открыто в E_n и содержит $\overset{\circ}{B} \cap E_n$; для любого $x \in E_n^+ \supset E_{n-1}$ $P_{M_n}x$ единственно и содержится в E_n^+ , а метрическая проекция P_{M_n} отображает $E_{n-1} \setminus M_n$ на $E_n^+ \cap \partial M_n$; для любого y из границы ∂M_n множества M_n в E_n существует $x \in E_n$ с $xy = xM_n = b_n$, то для произвольного $\theta_n \in (1, 2)$ и $b_{n+1} = b_n/8$ можно построить в E_{n+1} множество $M_{n+1} \supset M_n$, обладающее перечисленными свойствами при $n := n + 1$ (в процессе построения константы $\xi = \xi_n$, $d = d_n = \text{diam}(E_n \setminus M_n)$, возможно, изменяются вместе с n), и такое, что $P_{M_{n+1}}$ совпадает с P_{M_n} на E_n^+ (и тем самым, на E_{n-1}).

Положим $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где $M_1 = E_1 \setminus \{\alpha e_1 : -2 < \alpha < 1\}$, $b_1 = 1$, $d_1 = 3$, $\xi_1 = 1$, $\theta_1 = 3/2$.

ТЕОРЕМА 3.2. *В неполном (предгильбертовом) пространстве X множество M имеет ограниченное выпуклое дополнение и является аппроксимативно компактным чебышёвским множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X \setminus M$. Существует наименьшее n , при котором $x \in E_n^+ = \Pi_n$. По доказанному существует $x' = P_{M_n} x$, причем $P_{M_{n+1}} x = x'$, так как $E_n^+ \subset E_n \subset E_{n+1}^+$. Тогда ясно, что и $P_{M_k} x = x' \forall k \geq n$. $\overset{\circ}{B}(x, xx') \cap M_k = \emptyset \forall k \geq n$, поэтому $\overset{\circ}{B}(x, xx') \cap M = \emptyset$, значит $x' \in P_M x$. Допустим, что $y \neq x', y \in P_M x$. Так как $x, y \in E_i^+$ для некоторого $i \geq n$, то $y \in M \cap E_i = M_i$, $xy = xM \leq xM_i$. Тогда $\{x', y\} \subset P_{M_i} x$, что невозможно по построению M_i . Покажем, что $X \setminus M$ ограничено, если $\prod_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty$. Пусть $C_n = E_n \setminus M_n, C_n^+ = C_n \cap E_n^+$. Так как $C_{n+1}0 \leq \theta_n \cdot C_n 0, C_1 0 = 2, C_{n+1} 0 \leq 2 \cdot \prod_{i=1}^n \theta_i, X \setminus M \subset \cup C_n$, то все доказано.

Докажем, что M аппроксимативно компактно.¹¹

Пусть $x \in X \setminus M, y_k \in M, xy_k \rightarrow xM, x' = P_M x$. Найдется n такое, что $x \in E_{n-1}$, тогда $x' \in E_n^+$. Пусть $\bar{y}_k = \text{pr}_{E_n}(y_k)$ — ортогональная проекция y_k на E_n . Имеется единственное $\tilde{y}_k \in E_{n+1}^+$, такое что $\text{pr}_{E_n}(\tilde{y}_k) = \bar{y}_k, \bar{y}_k \tilde{y}_k = \bar{y}_k y_k$. Допустим, что $\tilde{y}_k \notin M_{n+1}^+ = E_{n+1}^+ \cap M$. Возьмем $w_k = P_{M_{n+1}^+}(\tilde{y}_k)$ и найдем $z_k \in E_n$ с $w_k = P_{M_{n+1}^+}(z_k), \tilde{y}_k \in [z_k, w_k]$ (см. выше). Тогда, как нетрудно видеть, $y_k z_k = \tilde{y}_k z_k < z_k M$, а $y_k \notin M$, что невозможно. Таким образом, $\tilde{y}_k \in M_{n+1}$, кроме того, ясно, что $x\tilde{y}_k = xy_k \rightarrow xM = xM_{n+1}$. Так как $P_M x = x'$ и M_{n+1} конечномерно, то $\tilde{y}_k \rightarrow x'$. Так как $x' \in E_n$, то $\bar{y}_k \rightarrow x', x'y_k = x'\tilde{y}_k \rightarrow 0$. Это и требовалось доказать.

§ 3. Пример В. Кли (дискретное чебышёвское множество)

В свое время многих поразили пример Ч. Данхема [59] чебышёвского множества с изолированной точкой в $C[0, 1]$. Даже на этом фоне пример Кли выглядит фантастическим. Мы дадим упрощенное изложение, по сравнению с [82], [83].

Пусть мощность τ такова, что $\tau^{\aleph_0} = \tau$ (например, $\tau = 2^{\aleph_0}$). В последующем $l = l(S)$ — банахово пространство всех вещественных функций x на S , таких что $\sum_{s \in S} |x(s)| = \|x\|_l < \infty$; $S_x = \{s \in S : x(s) \neq 0\}$; $B_c = B(c, 1), c \in l$; $\delta_s(t) = 1$ при $t = s$ и 0 при $t \neq s$.

Заметим, что $|S_x| \leq \aleph_0$; x — крайняя точка B_c ($x \in \text{ext } B_c$) $\Leftrightarrow x = c \pm \delta_s$; если $|S| = \tau$, то $|l| = |l(S)| = \tau^{\aleph_0} = \tau = |S|$.

ЛЕММА 3.8. Пусть $\{B_j\}_{j \in J}$ — семейство шаров $B_j = B_{c_j}, |J| < |S| = \tau$. Тогда $U = \bigcup_{j \in J} B_j \neq l$ и для каждого $x \in l \setminus U$ найдется шар $B_c, x \in \text{ext } B_c, B_c \cap B_j = \emptyset \forall j \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $J' = \bigcup_{j \in J} S_{c_j}$, тогда

$$|J'| \leq \aleph_0 |J| = \max\{\aleph_0, |J|\} < \tau.$$

Поскольку $|S| = \tau$, найдется $s_0 \in S \setminus J', c_j(s_0) = 0 \forall j \in J'$. Значит, все c_j лежат в гиперплоскости $\{z \in l : z(s_0) = 0\}$ и ясно, что тогда $U \neq l$. Возьмем теперь $t \notin J' \cup S_x$ ($|J' \cup S_x| < |S|$). Тогда $c_j(t) = x(t) = 0 \forall j \in J$. Положим $c = x - \delta_t$. Ясно, что $x \in \text{ext } B_c$. Далее, $\forall j \in J, c_j c_i = \|c_j - x + \delta_t\| = c_j x + \|\delta_t\| > 2, B_c \cap B_j = \emptyset$ и лемма доказана.

¹¹Заметим, что Джонсон, вопреки своему заявлению, в действительности не доказал, что метрическая проекция на его множество непрерывна: его рассуждения на с. 299 [75] не выдерживают критики.

Чебышёвское множество строится с помощью трансфинитной индукции. Пусть ω_τ – наименьший из ординалов b таких, что $|\{a : a < b\}| = \tau$, $I = \{a : a < \omega_\tau\}$. Известно, что $\forall b \in I \ |\{a \in I : a < b\}| < \tau$, а $|I| = \tau$. Обозначим через ψ какое-нибудь взаимно однозначное отображение l на I .

Шаг 0 трансфинитной индукции. Положим $c_0 = 0$, $x_0 = \delta_1$.

Индуктивное предположение. Пусть $k \in I$, $k \neq 0$. Допустим, что для всех $i \in I$, $i < k$, мы уже построили x_i , c_i , $B_i = B_{c_i}$ такие, что $B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall i, j < k$ ($i \neq j$), $x_i \notin \bigcup_{j < i} B_j$, $x_i \in \text{ext } B_i$.

Шаг k трансфинитной индукции. Положим $D_k = \{i \in I : i < k\}$, $U_k = \bigcup_{j \in D_k} B_j$. Поскольку $|D_k| < \tau$, по лемме 3.8 $U_k \neq l$. Возьмем $x = \psi^{-1}(\min \psi(l \setminus U_k))$, тогда $x \in l \setminus U_k$ и по лемме 3.8 существует B_c , $x \in \text{ext } B_c$, $B_c \cap B_j = \emptyset \ \forall j \in D_k$. Тогда мы определим $x_k = x$, $c_k = c$, $B_k = B_c$. Индуктивный процесс продолжается, пока $k \in I$ (ввиду леммы 3.8). Обозначим $U = \bigcup_{k \in I} B_k$. Допустим, $z \in l \setminus U$. Тогда $\forall i \in I \ z \in l \setminus U_i$, $\psi(x_i) = \min \psi(l \setminus U_i) \leq \psi(z)$. Однако $x_i \neq x_j$, $\psi x_i \neq \psi x_j$ для $i \neq j$ ($x_j \in B_j \setminus B_i$ при $i < j$). Следовательно, $|\{\psi(x_i)\}_{i \in I}| = |I| = \tau$, хотя $|\{i \in I : i \leq \psi(z)\}| < \tau$. Это противоречие означает, что $U = l$.

Множество $C = \{c_i\}_{i \in I}$ – чебышёвское. Действительно, если $x \in l$, то существует $i \in I$ с $x \in B_i$, тогда c_i – единственная ближайшая точка в C для x , ибо $c_j x > 1 \geq c_i x$ при $i \neq j$.

§ 4. Обзор некоторых других результатов

Дадим краткий обзор известных нам работ, имеющих отношение к рассматриваемой тематике. С. В. Конягин посвятил свою кандидатскую диссертацию [84] и ряд работ [85]–[91] аппроксимативным свойствам произвольных множеств, следуя линии, намеченной С. Б. Стечкиным в [С] и решив ряд задач, предложенных в этой статье. И. Г. Царьков [129] решил поставленную Стечкиным задачу о характеристизации конечномерных пространств, в которых всякое *ограниченное* чебышёвское множество выпукло.¹² Оказалось, это такие пространства, что множество экстремальных точек сферы сопряженного пространства плотно в ней. См. также интересное обсуждение этого вопроса Брауном [41]. Царьков дал обобщение этих результатов на бесконечномерные пространства. Он показал также, что чебышёвские компакты в $L^1(\mu)$ являются выпуклыми тогда и только тогда, когда μ не имеет атомов.

Беренс [28], [29] указал на связь задачи о чебышёвских множествах и отображения Φ с теорией монотонных операторов. При этом он поставил вопрос, для любого ли проксимального множества M в гильбертовом пространстве $\Phi x = \overline{\text{co}} Px \ \forall x \in X$? (Кли [82] и Години [65] дали отрицательный ответ.)

Беренс и Вестфаль [31] заметили, что из максимальной монотонности P_M следует выпуклость M . Действительно, поскольку $Px = \Phi x \ \forall x \in X$, то ясно, что M – чебышёвское множество, а так как слабые пределы минимизирующих последовательностей принадлежат Φx , то M аппроксимативно компактно. Но выпуклость таких чебышёвских множеств была доказана Ефимовым и Стечкиным [ЕС4] еще в 1961 году!

¹² То, что эта задача отлична от проблемы характеристизации пространств с выпуклыми чебышёвскими множествами, отметили Ефимов и Стечкин [ЕС3]). Относительно последней см. работы Бердышева [В1], Брёндстеда [В71], [В72], Брауна [40].

С вопросом о структуре чебышёвских множеств традиционно связаны вопросы непрерывности метрической проекции и аппроксимативной компактности, которые в ряде работ перемещаются в область выпуклого и нелинейного анализа (Бердышев [26], [27], Ошман [116]).

О непрерывности метрической проекции на выпуклые множества см. [B42]–[B49], [B], [112], [114], [B43], [115], [116].

Маринов [104] показал, что если M – чебышёвское множество в $X \in (UR)$, то $P_M^\delta(x)$ в хаусдорфовой метрике непрерывно зависит от совокупности параметров x , M и δ . В другой статье [105] он дал обзор близких результатов.

Балаганский [20]–[25] исследовал вопросы слабой непрерывности метрической проекции (см. также цитируемые в его статьях работы других авторов). Он показал, что слабая непрерывность и секвенциальная слабая непрерывность существенно различаются. В гильбертовом пространстве или ℓ^p ($1 \leq p < \infty$) метрическая проекция на ограниченно компактное множество секвенциально слабо полунепрерывна сверху. В то же время на некоторый выпуклый компакт в ℓ^2 нет слабой непрерывности метрической проекции. В широком классе пространств, включая гильбертовы и ℓ^p , из секвенциально слабой полунепрерывности сверху на выпуклое слабо компактное множество M следует, что M – компакт [25].

Фелпс [120] и Балаганский [15] изучали вопрос о том, когда метрическая проекция на выпуклое множество слабо открыта.

О τ -аппроксимативной компактности писали Власов [139], [141], Андреев [5] и Дойч [50]. Власов ввел также понятия H -множества и Hw -множества, обобщающие, соответственно, аппроксимативно компактные и слабо аппроксимативно компактные множества. Дальнейшее развитие этой темы см. у Бердышева [27].

Назовем множество $M \subset X$ *множеством Асплунда* (ср. [7], [139]), если для любого проксиминального полупространства Π множество $M \cap \Pi$ проксиминально или пусто. Асплунд [7] показал, что в гильбертовом пространстве такое множество, если оно чебышёвское, выпукло. Власов [139] получил следующие результаты. Пусть $M \subset X$ – множество Асплунда, и для каждого $x \in X$ Px выпукло. Тогда M является Hw -множеством, а если дополнительно каждое Px слабо компактно, то M аппроксимативно слабо компактно. Пусть X – пространство Ефимова–Стечкина. Если $M \subset X$ – множество Асплунда, а каждое Px непусто и выпукло, то M аппроксимативно компактно; в гладком пространстве такое M выпукло. В равномерно гладком банаховом пространстве чебышёвское множество Асплунда выпукло.

Власов [140] охарактеризовал γ -солнца (=почти выпуклые множества) в терминах отделимости шаров при помощи *клиноидов*, представляющих собой обобщение понятия клина (конуса). Эти результаты аналогичны известным теоремам об отделимости строгих солнц (см. [B, теорема 3.1] и цитируемые там работы).

О солнцах можно посмотреть [1], [42], [59], [67], [111], в том числе о связности солнц [93]–[98], [113], [42], [43], [130], В. А. Косеев [97] дал пример несвязного солнца в банаховом пространстве. О связности множеств с непрерывной метрической проекцией см. [B140], [90], [130], о связности чебышёвских множеств [B], [84], [90], [130], о связности, “малости” и других свойствах множеств плохих точек см. [84], [14], [17], [134], [144], [145]–[147].

Из обширной литературы по селекциям метрических проекций упомянем лишь обзорные статьи: Дойч [52], [53], Браун [44], Ву Ли [102].

Об антипроксиминальных множествах: укажем только [18], [19] и цитируемые там работы.

Хуотари и Ли [71] показали, что если единичный шар в $\mathbb{R}^n$ представляет собой n -мерный куб, то всякое множество, которое остается чебышёвским при любом евклидовом повороте, выпукло. О задачах на плоскости см. Хетцельт [66] и цитируемые там работы. Мартыненко [106] применил стереографическую проекцию в доказательстве выпуклости чебышёвского компакта в гильбертовом пространстве; этот подход близок к методу инверсий (Фикен–Кли [B106], Асплунд [7], Балаганский [9]).

В последнее время на метрическую функцию (функцию расстояния) обратили внимание специалисты по выпуклому и негладкому анализу [47], [58], [68], [69], [126]. К сожалению, не все из них знают, что это понятие давно изучается в теории приближений, и повторяют уже известные результаты. Примером успешного применения выпуклого анализа является доказательство Конягиным его теоремы из §1 главы III. Некоторые свойства функции расстояния, обеспечивающие выпуклость множества, рассматривал Паркер [118].

Отметим некоторые работы обзорного характера по тематике статьи: [B], [135], [29], [30], [39], [32], [45], [51], [66], [69], [80], [98], [91], [105], [108], [109], [110], [115], [41], [125], [127], а также книги: Бресс [36], Дойч [55], Гайлз [64], Холмс [70], Ву Ли [102], Зингер [124], Тихомиров [128], Валентайн [B136].

Из последних работ отметим: Алимов [1]–[4], Карлов [76]–[79], Балаганский [17], Хуотари и Ши [72], Конягин [91].

Заключение

Трудно переоценить вклад Сергея Борисовича Стечкина в теорию приближений и, в частности, в ее общие, геометрические, вопросы. Его отличало умение ставить яркие по форме и трудные задачи. В этой статье рассмотрена одна из них (вернее, целый круг задач).

Выскажем некоторые соображения относительно путей, по которым может пойти доказательство (или опровержение) гипотезы о выпуклости чебышёвских множеств в гильбертовом пространстве. По-видимому, роль множества W “плохих” точек будет решающей. Возможно, на промежуточном этапе удастся доказать, что можно ограничиться случаем, когда W замкнуто и выпукло (тогда по следствию 3.4 оно и гладко). Правдоподобно, что W не может быть компактным. Далее, нужно будет изучить свойства функции $\rho_x: x \rightarrow xM$ ($x \in W$). Вероятно, она должна быть вогнутой и гладкой. Результатом такого исследования может стать обнаружение противоречия или построение контрпримера, если попробовать различные сочетания выпуклого замкнутого множества W с гладкой вогнутой функцией ρ_x и строить M примерно так, как в §2 главы III.

Заметим еще, что гипотетическое невыпуклое чебышёвское множество может быть сколь угодно близко к единичной сфере в метрике Хаусдорфа. Это вытекает из рассмотрений Асплунда [7] и Балаганского [9], так как если N – множество (тоже гипотетическое) со свойством, что для всякого $x \in X$ существует единственная наиболее удаленная от x точка в N (а такое множество, очевидно, можно заключить в произвольно малый шар с центром в 0), то чебышёвское множество $\{z \in X : \max_{y \in N} \|z - y\| = 1 + \alpha\}$, где α – чебышёвский радиус N , сколь угодно близко к сфере S .

Авторы выражают надежду, что проблема в недалеком будущем будет решена, и что настоящая статья поможет приблизить это событие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [ЕС] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Чебышёвские множества в банаховых пространствах // Рукопись 1958–1961 гг.
- [ЕС1] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Некоторые свойства чебышёвских множеств // ДАН СССР. 1958. Т. 118. №1. С. 17–19.
- [ЕС2] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Чебышёвские множества в банаховых пространствах // ДАН СССР. 1958. Т. 121. №4. С. 582–585.
- [ЕС3] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышёвские множества // ДАН СССР. 1959. Т. 127. №2. С. 254–257.
- [ЕС4] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Аппроксимативная компактность и чебышёвские множества // ДАН СССР. 1961. Т. 140. №3. С. 522–524.
- [С] Стечкин С. Б. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Rev. Math. Pur. Appl. 1963. V. 8. №1. Р. 5–18.
- [В] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. 1973. Т. 28. №6. С. 3–66.
- [БВ] Балаганский В. С., Власов Л. П. Аппроксимативно-геометрические свойства множеств в банаховых пространствах // Препринт. Свердловск: УрО АН СССР, 1990.
- [1] Alimov A. R. A number of connected components of sun's complement // East J. Approx. 1995. V. 1. №4. Р. 409–419.
- [2] Алимов А. Р. Дополнение к чебышёвским множествам // Междунар. конф. по теории прикл. функций, Калуга, 26–29 июня 1996 г. Тезисы докладов. Т. 1, 1996. С. 10–11.
- [3] Алимов А. Р. Чебышёвские множества в линейных пространствах с несимметричной сферой // Труды 7-й Саратов. зимней школы, 30.01–4.02, 1994. Часть 2. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1995. С. 91–93.
- [4] Alimov A. R. Chebyshev set's complement // East J. Approx. 1996. V. 2. №2. Р. 215–232.
- [5] Андреев В. И. О непрерывности метрической проекции и аппроксимативной компактности подпространств в $L_1(S, \Sigma, \mu)$ // Теория приближения функций (Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, июль 1975). М.: Наука, 1977. С. 13–20.
- [6] Андреев В. И. О существовании разрывных метрических проекций // Матем. заметки. 1974. Т. 16. №6. С. 857–864.
- [7] Asplund E. Chebyshev sets in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 144. Р. 235–240.
- [8] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
- [9] Балаганский В. С. Аппроксимативные свойства множеств в гильбертовом пространстве // Матем. заметки. 1982. Т. 31. №5. С. 785–800.
- [10] Балаганский В. С. Дифференцируемость по Фреше функции расстояния и структура множества // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №6. С. 725–734.
- [11] Балаганский В. С. Достаточные условия дифференцируемости метрической функции // Труды Ин-та математики и механики. Т. 1. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. С. 84–89.
- [12] Балаганский В. С. Слабая непрерывность метрической проекции // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Свердловск: Уральский гос. ун-т им. А.М.Горького, 1982.
- [13] Балаганский В. С. О чебышёвских множествах с выпуклым дополнением // Приближение функций полиномами и сплайнами. Свердловск, 1985. С. 54–57.
- [14] Балаганский В. С. О связи аппроксимативных и геометрических свойств множеств // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. (Сб. научн. тр. Ин-та мат. и мех. УНЦ АН СССР). Свердловск, 1987. С. 46–53.
- [15] Балаганский В. С. О слабой открытости метрической проекции // Матем. заметки. 1991. Т. 49. №3. С. 135–144.

- [16] Балаганский В. С. Об аппроксимативных свойствах множеств с выпуклым дополнением // Матем. заметки. 1995. Т. 57. №1. С. 20–29.
- [17] Balaganskii V. S. On the connectedness of the set of points of discontinuity of the metric projection // East J. Approx. (to appear).
- [18] Балаганский В. С. Антипроксиминальные множества в пространствах непрерывных функций // Матем. заметки. (в печати).
- [19] Balaganskii V. S. An antiproximal set in a strictly convex space with Frechet differentiable norm // East J. Approx. 1996. V. 2. №2. P. 169–176.
- [20] Балаганский В. С. О слабой непрерывности метрической проекции // Матем. заметки. 1977. Т. 22. №3. С. 345–356.
- [21] Балаганский В. С. Слабая непрерывность метрической проекции в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1978. Т. 24. №5. С. 649–660.
- [22] Балаганский В. С. Слабая непрерывность метрической проекции на конечномерные подпространства в $L_p(\mu)$ // Матем. заметки. 1980. Т. 28. №6. С. 821–832.
- [23] Балаганский В. С. Слабая непрерывность метрической проекции на ограниченные множества в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1982. Т. 32. №5. С. 627–637.
- [24] Балаганский В. С. Слабая непрерывность метрической проекции на слабо компактные множества // Труды Ин-та математики и механики. Т. 2. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. С. 42–56.
- [25] Балаганский В. С. Слабая непрерывность метрической проекции на подпространства // Труды Института математики и механики. Т. 3. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. С. 80–87.
- [26] Бердышев В. И. Устойчивость минимизации функционалов и равномерная непрерывность метрической проекции // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. Свердловск, 1987.
- [27] Бердышев В. И. Устойчивость задачи минимизации при возмущении множества допустимых элементов // Матем. сб. 1977. Т. 103 (145). №4 (8). С. 467–479.
- [28] Berens H. Über die beste Approximation in $\mathbb{R}^n$ (to appear).
- [29] Berens H. Best approximation in Hilbert space // Approximation Theory III / ed. E.W. Cheney. New York: Academic Press, 1980. P. 1–20.
- [30] Berens H. On suns and co-suns in finite dimensional vector spaces // Manuscript, 1988.
- [31] Berens H., Westphal U. Kodissipative metrische Projektionen in normierten linearen Räumen // Linear spaces and approximation / ed. P.L. Butzer and B.Sz. Nagy. ISNM. V. 40. Basel: Birkhäuser, 1978. P. 119–130.
- [32] Beretta L., Maxia A. Insiemi convessi e orbiformi // Roma Univ. Istituto Naz. Ser. 5. V. 1, 1940. P. 1–64.
- [33] Bishop E., Phelps R. R. The support functionals of a convex set // Proc. Symp. Pure Math. V. 7. Convexity: Providence, 1963. P. 27–35.
- [34] Borwein J. M., Fitzpatrick S. P., Giles J. R. The differentiability of real functions on normed linear space using generalized subgradients // Math. Anal. Appl. 1987. V. 128. №2. P. 512–534.
- [35] Bosznay A. P. A remark on a problem of Goebel // Annales Univ. Sci. Budapest. Sectio Math. 1985. V. 28. P. 143–145.
- [36] Braess D. Nonlinear Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [37] Brézis H. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert // North-Holland Math. Stud. 5. V. 5, 1973.
- [38] Brosowski B., Deutsch F., Lambert J., Morris P. D. Chebyshev sets which are not suns // Math. Ann. 1974. V. 212. №2. P. 89–101.
- [39] Brown A. L. Abstract Approximation Theory. Proceedings of the Seminar in Analysis // Institute of Mathematical Sciences, Madras, India. [Lecture note series], 1969–70. P. 118.
- [40] Brown A. L. Chebyshev sets and facial systems of convex sets in finite-dimensional spaces // Proc. London Math. Soc. 1980. V. 41. P. 297–339.

- [41] Brown A. L. Chebyshev sets and the shapes of convex bodies, *Methods of Functional Analysis in Approximation Theory* // Proc. Int. Conf. Indian Inst. Techn. Bombay. 16–20.12.1985. Basel: Birkhäuser, 1986. P. 97–121.
- [42] Brown A. L. Suns in normed linear spaces which are finite dimensional // *Math. Ann.* 1987. V. 279. P. 87–101.
- [43] Brown A. L. On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces // *Proc. Centre Math. Analysis. Austral. Nat. Univ.* 1988. V. 20. P. 1–15.
- [44] Brown A. L. A survey: continuous selections for metric projections // *Proc. 3d Intern. Colloq. Num. Anal. Plovdiv. Bulgaria.* 13–17.08.1994. Utrecht: VSP, 1995. P. 25–35.
- [45] Бураро Ю. Д., Залгаллер В. А. Достаточные признаки выпуклости // *Записки науч. семинаров ЛОМИ.* 1974. Т. 45. С. 3–52.
- [46] Calabi L., Hartnett W. E. A Motzkin-type theorem for closed nonconvex sets // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1968. V. 19. №6. P. 1495–1498.
- [47] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
- [48] Cudia D. F. Rotundity // *Proc. Sympos. Pure Math.* 1963. V. 7. P. 73–97.
- [49] Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М.: ИЛ, 1961.
- [50] Deutsch F. Existence of best approximations // *J. Approx. Theory.* 1980. V. 28. №2. P. 132–154.
- [51] Deutsch F. The convexity of Chebyshev sets in Hilbert space // *Topics in polynomials ... and ... applications* / ed. T. Rassias, H. Srivastava, A. Yanushkauskas. Singapore: World Sci. Publ., 1993. P. 143–150.
- [52] Deutsch F. A survey of metric selections // *Contemp. Math.* 1983. V. 18. P. 49–71.
- [53] Deutsch F. Selections for metric projections // *Approximation Theory, Spline functions and applications* / ed. S.P. Singh. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. P. 123–137.
- [54] Deutsch F., Kenderov P. Continuous selections and approximate selections for set-valued mappings and applications to metric projections // *SIAM J. Math. Anal.* 1983. V. 14. №1. P. 185–194.
- [55] Deutsch F. Best approximation in inner-product space (to appear).
- [56] Dolecki S., Greco G. H., Lechicki A. Compactoid and compact filters // *Pacific J. Math.* 1985. V. 117. №1. P. 69–98.
- [57] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1. М.: ИЛ, 1962.
- [58] Дудов С. И. Дифференцируемость по направлениям функции расстояния // *Матем. сб.* 1995. Т. 186. №3. С. 29–52.
- [59] Dunham C. B. Chebyshev sets in $C[0, 1]$ which are not suns // *Canad. Math. Bull.* (1). 1975. V. 18. №1. P. 35–37.
- [60] Экланд И., Тейам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
- [61] Fitzpatrick S. Metric projections and the differentiability of distance functions // *Bull. Austral. Math. Soc.* 1980. V. 22. №2. P. 291–312.
- [62] Fitzpatrick S. Differentiation of real-valued functions and continuity of metric projections // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1984. V. 91. №4. P. 544–548.
- [63] Franchetti C., Papini P. L. Approximation properties of sets with bounded complements // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A.* 1981. V. 89. №1–2. P. 75–86.
- [64] Giles J. R. Convex analysis with application in differentiation of convex functions // *Research Notes in Math.* V. 58. London: Pitman, 1982.
- [65] Godini G. On a problem of H. Berens // *Math. Ann.* 1983. V. 263. P. 279–281.
- [66] Hetzelt L. Über die beste Coapproximation im $\mathbb{R}^n$ // *Dissertation. Univ. Erlangen-Nürnberg*, 1981.
- [67] Hetzelt L. On suns and cosuns in finite dimensional normed real vector spaces // *Acta Math. Hungar.* 1985. V. 45. №1–2. P. 53–68.
- [68] Hiriart-Urruty J-B. New concepts in nondifferentiable programming // *Bull. Soc. Math. France.* 1979. V. 60. P. 57–85.
- [69] Hiriart-Urruty J-B. Ensembles de Tchebychev vs ensembles convexes: l'état de la situation vu via l'Analyse Convexe Non Lisse // *Preprint*, 1995.

- [70] Holmes R. B. On the continuity of the best approximation operators // Ann. Math. Stud. 1972. №69. P. 137–157.
- [71] Huotari R., Li W. Continuities of metric projection and geometric consequences // Preprint, 1995.
- [72] Huotari R., Shi J. Support cones and convexity of sets in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
- [73] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [74] Jiang M. On Johnson's example of a nonconvex Chebyshev set // J. Approx. Theory. 1993. V. 74. №2. P. 152–158.
- [75] Johnson G. G. A nonconvex set which has the unique nearest point property // J. Approx. Theory. 1987. V. 51. №4. P. 289–332.
- [76] Karlov M. I. Nontrivial Chebyshev sets on compact connected manifolds // East J. Approx. 1995. V. 1. №4. P. 527–542.
- [77] Карлов М. И. Аппроксимативные свойства кривых в гильбертовом пространстве // Труды 7-й Саратов. зимней школы. 30.01 – 4.02.1994. Часть 3. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1995. С. 13–16.
- [78] Карлов М. И. Аппроксимативное свойство компактных C^2 -многообразий в гильбертовом пространстве // Междунар. конф. по теории приближения функций. Калуга. 26–29 июня 1996 г. Тезисы докладов. Т. 1, 1996. С. 112–113.
- [79] Karlov M. I. Approximative properties of compact C^2 -manifolds in Hilbert spaces // East J. Approx. 1996. V. 2. №2. P. 197–203.
- [80] Kelly B. F. The convexity of Chebyshev sets in finite dimensional normed linear spaces // Masters paper. Pennsylvania St. Univ, 1978.
- [81] Kenderov P. S. A note on multivalued monotone mappings // C. R. Acad. Bulgare Sci. 1975. V. 28. P. 583–584.
- [82] Klee V. Dispersed Chebyshev sets and coverings by balls // Math. Ann. 1981. V. 257. №2. P. 251–260.
- [83] Klee V. Do infinite-dimensional Banach spaces admit nice tiling? // Stud. Sci. Math. Hungar. 1986. V. 21. №3–4. P. 415–427.
- [84] Конягин С. В. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1982.
- [85] Конягин С. В. Аппроксимативные свойства произвольных множеств в банаховых пространствах // ДАН СССР. 1978. Т. 239. №2. С. 261–264.
- [86] Конягин С. В. Об аппроксимативных свойствах замкнутых множеств в банаховых пространствах и характеристизации сильно выпуклых пространств // ДАН СССР. 1980. Т. 251. №2. С. 276–280.
- [87] Конягин С. В. О множестве точек разрыва метрической проекции на чебышёвские множества в гильбертовом пространстве // Тезисы докладов Междунар. конф. по теории приближения функций (Калуга. 26–29 июня 1996 г.). Т. 1. С. 120–121.
- [88] Конягин С. В. О множествах точек непустоты и непрерывности метрической проекции // Матем. заметки. 1983. Т. 33. №5. С. 641–655.
- [89] Конягин С. В. О множествах существования элементов наилучшего приближения // Труды 2-й Саратов. зимней школы. 24.01–05.02. 1984 г. Часть 2. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. С. 136–139.
- [90] Конягин С. В. Связность множеств в задачах наилучшего приближения // ДАН СССР. 1981. Т. 261. №1. С. 20–23.
- [91] Конягин С. В. Об аппроксимативных свойствах произвольных замкнутых множеств в банаховых пространствах // Фундаментальная и прикладная математика (в печати).
- [92] Конягин С. В., Царьков И. Г. Пространства Ефимова–Стечкина // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1986. №5. С. 20–27.
- [93] Кошечев В. А. Связность и некоторые аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Матем. заметки. 1975. Т. 17. №2. С. 193–204.

- [94] Кошечев В. А. Связность и солнечные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 2. С. 267–278.
- [95] Кошечев В. А. Связность и “солнечные” свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Теория приближения функций (Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, июль 1975). М.: Наука, 1977. С. 248–250.
- [96] Кошечев В. А. Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Свердловск: Уральский гос. ун-т им. А. М. Горького, 1977.
- [97] Кошечев В. А. Пример несвязного солнца в банаховом пространстве // Матем. заметки. 1979. Т. 26. № 1. С. 89–92.
- [98] Koshcheev V. A. On the structure of suns in Banach spaces // Approximation and Function Spaces (Proc. Int. Conf. Gdansk, 1979): North Holland, 1981. P. 371–376.
- [99] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
- [100] Куратовский К. Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969.
- [101] Lau K.-S. Almost Chebyshev subsets in reflexive Banach spaces // Indiana Univ. Math. J. 1978. V. 27. № 5. P. 791–795.
- [102] Li W. Continuous selections for metric projections and interpolating subspaces // Approximation and Optimization / ed. B. Brosowski, F. Deutsch, J. Guddat. V. 1. Frankfurt: Peter Lang, 1991. P. 1–108.
- [103] Mann H. Untersuchungen über Wabenzellen bei allgemeiner Minkowskischer Metrik // Monatsh. Math. Phys. 1937. V. 42. P. 74–83.
- [104] Маринов А. В. Непрерывность и связность метрической δ -проекции // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах (Сб. науч. тр. Ин-та мат. и мех. УНЦ АН СССР). Свердловск, 1987. С. 82–95.
- [105] Маринов А. В. Оценки устойчивости метрической ε -проекции через модуль выпуклости пространства // Труды Ин-та математики и механики. Т. 2. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. С. 85–109.
- [106] Мартыненко Г. В. О структуре чебышёвских компактов в гильбертовом пространстве // Деп. 08.09.86. № 6534-В. Тюмень: Тюмен. ун-т, 1986.
- [107] Namioka I., Phelps R. R. Banach spaces which are Asplund spaces // Duke Math. J. 1975. V. 42. № 4. P. 735–750.
- [108] Narang T. D. A study of farthest points // Nieuw Arch. Wiskunde (3). 1977. V. 25. P. 54–79.
- [109] Narang T. D. Convexity of Chebyshev sets // Nieuw Arch. Wiskunde (3). 1977. V. 25. P. 377–402.
- [110] Narang T. D. Uniquely remotal sets are singletons // Nieuw Arch. Wiskunde (4). 1991. V. 1. P. 1–12.
- [111] Невесенко Н. В. Строгие солнца и полунепрерывность снизу метрической проекции в линейных нормированных пространствах // Матем. заметки. 1978. Т. 23. № 4. С. 563–572.
- [112] Невесенко Н. В. ρ -непрерывность метрической проекции на выпуклые замкнутые множества // Матем. заметки. 1978. Т. 23. № 6. С. 845–854.
- [113] Невесенко Н. В. Метрическая проекция и связность множеств в линейных нормированных пространствах // Изв. вузов. Математика. 1979. № 1 (200). С. 51–53.
- [114] Невесенко Н. В., Ошман Е. В. Метрическая проекция на выпуклые замкнутые множества // Матем. заметки. 1982. Т. 31. № 1. С. 117–126.
- [115] Ошман Е. В. О непрерывности метрической проекции // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 2. С. 200–211.
- [116] Ошман Е. В. О непрерывности отображений, связанных с минимизацией выпуклых функций // Исследования по топологии и теории операторов (Сб. науч. тр.). Свердловск: Уральский гос. ун-т им. А. М. Горького, 1990. С. 103–108.
- [117] Panda B. B., Kapoor O. P. Approximative compactness and continuity of metric projections // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. V. 11. № 1. P. 47–55.

- [118] Parker M. J. Convex sets and subharmonicity of the distance function // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103. №2. P. 503–506.
- [119] Phelps R. R. Support cones and their generalizations // Proc. Sympos. Pure Math. 1963. V. 7. P. 393–401.
- [120] Phelps R. R. Openness of metric projection in certain Banach spaces // J. Approx. Theory. 1984. V. 42. №1. P. 70–79.
- [121] Redheffer R., Walter W. A differential inequality for the distance function in normed linear spaces // Math. Ann. 1974. V. 211. №4. P. 299–314.
- [122] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [123] Semadeni Z. Banach spaces of continuous functions. V. 1. Warszawa: Polish Sci. Publ., 1971.
- [124] Singer I. Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces // Grundlehren math. Wiss. V. 171. Berlin: Springer-Verlag, 1970.
- [125] Singer I. The theory of best approximation and functional analysis // CBMS 13. Philadelphia: SIAM, 1974.
- [126] Соловьев В. Н. Двойственные экстремальные задачи и их применения к задачам минимаксного оценивания: // Дис. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МАИ, 1996.
- [127] Sullivan F. Ordering and completeness of metric spaces // Nieuw Arch. Wiskunde. (3). 1981. V. 29. №2. P. 178–193.
- [128] Tikhomirov V. Convex Analysis. Analysis II // Encyclopedia Math. Sci. / ed. R.V. Gamkrelidze: Springer-Verlag, 1990.
- [129] Царьков И. Г. Ограниченные чебышёвские множества в конечномерных банаховых пространствах // Матем. заметки. 1984. Т. 36. №1. С. 73–87.
- [130] Царьков И. Г. О связности некоторых классов множеств в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1986. Т. 40. №2. С. 174–196.
- [131] Царьков И. Г. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М., 1986.
- [132] Царьков И. Г. Локальная “однородность” множеств единственности // Матем. заметки. 1989. Т. 45. №5. С. 121–123.
- [133] Царьков И. Г. Непрерывность метрической проекции, структурные и аппроксимативные свойства множеств // Матем. заметки. 1990. Т. 47. №2. С. 137–148.
- [134] Veselý L. A connectedness property of maximal monotone operators and its application to approximation theory // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 115. №3. P. 663–667.
- [135] Власов Л. П. Чебышёвское множество // Матем. Энциклопедия. Т. 5. М.: Сов. Энциклопедия, 1985.
- [136] Власов Л. П. Чебышёвские множества и их обобщения // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Свердловск: Уральский гос. ун-т им. А.М. Горького, 1967.
- [137] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1970. Т. 7. №5. С. 593–604.
- [138] Власов Л. П. Несколько теорем о чебышёвских множествах // Матем. заметки. 1972. Т. 11. №2. С. 135–144.
- [139] Власов Л. П. Понятие аппроксимативной компактности и его варианты // Матем. заметки. 1974. Т. 16. №2. С. 337–348.
- [140] Власов Л. П. О почти выпуклых множествах // Матем. заметки. 1975. Т. 18. №3. С. 343–356.
- [141] Власов Л. П. Свойства обобщенных элементов наилучшего приближения // Матем. заметки. 1978. Т. 24. №4. С. 513–522.
- [142] Власов Л. П. О непрерывности метрической проекции // Матем. заметки. 1981. Т. 30. №6. С. 813–818.
- [143] Власов Л. П. Непрерывность метрической проекции на выпуклые множества // Матем. заметки. 1992. Т. 52. №46. С. 3–9.
- [144] Westphal U., Frerking J. On a property of metric projections onto closed subsets of Hilbert spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 105. №3. P. 644–651.

- [145] Zajíček L. On the points of multivaluedness of metric projections in separable Banach spaces // Comment. Math. Univ. Carolin. 1978. V. 19. №3. P. 513–523.
- [146] Zajíček L. On differentiation of metric projections in finite dimensional Banach spaces // Czech. Math. J. 1983. V. 33 (108). №3. P. 325–336.
- [147] Zajíček L. Differentiability of the distance function and points of multi-valuedness of the metric projection in Banach space // Czech. Math. J. 1983. V. 33 (108). №???. P. 292–308.
- [148] Zhivkov N. V. Metric projections and antiprojections in strictly convex normed spaces // C. R. Acad. Bulgare Sci. 1978. V. 31. №4. P. 369–372.

Институт математики и механики УрО РАН

Поступила в редакцию
12.09.1996