Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Артамонов, Неприводимые модули над квантовыми полиномами, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1021>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:10:17

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

НЕПРИВОДИМЫЕ МОДУЛИ НАД КВАНТОВЫМИ ПОЛИНОМАМИ

В. А. АРТАМОНОВ

Пусть D — тело с автоморфизмами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, где $n \geq 2$. Предположим, что заданы элементы $q_{ij} \in D^*$, $i, j = 1, \dots, n$, причем

$$q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = Q_{ijr}Q_{jri}Q_{rij} = 1,$$

где $Q_{ijr} = q_{ij}\alpha_j(q_{ir})$. Рассмотрим ассоциативную алгебру A , порожденную элементами тела D , элементами $X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}$ и заданную определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} X_i X_i^{-1} &= X_i^{-1} X_i = 1, & i &= 1, \dots, n; \\ X_i z &= \alpha_i(z) X_i, & z &\in D, \quad i = 1, \dots, n; \\ X_i X_j &= q_{ij} X_j X_i, & i, j &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Пусть N — подгруппа в мультипликативной группе D^* тела D , порожденная коммутантом $[D^*, D^*]$ и всеми элементами вида $z^{-1}\alpha_i(z)$, $z \in D^*$, $i = 1, \dots, n$. Всюду в дальнейшем предполагается, что A является *общей алгеброй квантовых лорановских многочленов*, т.е. образы элементов q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, независимы в мультипликативной абелевой группе D^*/N . Пусть B — подалгебра в A , порожденная D и элементами $X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-1}^{\pm 1}$. Тогда $S = B \setminus 0$ удовлетворяет условию Оре в A . Обозначим через F тело частных B . В этом случае $S^{-1}A = F[X_n^{\pm 1}, \alpha_n]$ является алгеброй косых лорановских многочленов с автоморфизмом и кольцом главных левых (правых) главных идеалов. Кроме того, $A = B[X_n^{\pm 1}, \alpha_n]$.

Для любого кольца R через $\mathbb{P}(R)$ обозначается категория левых проективных конечно порожденных R -модулей.

Предположим, что M — конечно порожденный периодический A -модуль. Совершая элементарные преобразования переменных $X_1, \dots, X_n$ по теореме 5 из [1] можно всюду в дальнейшем считать, что $M \in \mathbb{P}(B)$.

ТЕОРЕМА 1. *Имеется естественный изоморфизм решетки A -подмодулей в M и решетки $S^{-1}A$ -подмодулей в $S^{-1}M = F \otimes_B M$. В частности, A -модуль M неприводим тогда и только тогда, когда $S^{-1}A$ -модуль $S^{-1}M$ неприводим.*

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00627) и программ INTAS (гранты № 93-2618, 93-0893).

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – левый идеал в B . Тогда на M существует структура A -модуля. Эта структура превращает M в неприводимый A -модуль.

ТЕОРЕМА 3. Для A -модуля M следующие условия эквивалентны: 1) M неприводим; 2) $M \simeq A/(A \cap S^{-1}Af)$, где $f \in S^{-1}A = F[X_n^{\pm 1}, \alpha_n]$ неприводим по X_n и $A \cap S^{-1}Af$ содержит элемент

$$g = \sum_{q \leq i \leq d} b_i X_n^i, \quad b_i \in B,$$

причем b_q, b_d являются одночленами от $X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-1}^{\pm 1}$.

ТЕОРЕМА 4. Элемент $f \in A = B[X_n^{\pm 1}, \alpha_n]$ неприводим по X_n тогда и только тогда, когда он неприводим в $S^{-1}A = F[X_n^{\pm 1}, \alpha_n]$. Кроме того, A/Af – неприводимый A -модуль.

Пусть C – подалгебра в A , порожденная $D, X_1, \dots, X_n$. Предположим, что C Морита-эквивалентно кольцу C' , порождаемому аналогичным образом $D', Y_1, \dots, Y_m$ в общей алгебре квантовых лорановских многочленов A' , определяемой набором $D', q'_{ij}, \alpha'_1, \dots, \alpha'_m, Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_m^{\pm 1}$.

ТЕОРЕМА 5. $C \simeq C'$. В частности, $D \simeq D'$, $n = m$. Если $P \in \mathbb{P}(C)$ и $\text{End } P \simeq C$, то P – свободный A -модуль ранга 1.

Отметим, что теорема 5 является аналогом соответствующих результатов, относящихся в алгебре Вейля A_1 [6]. Нетрудно видеть, что если R – область, Морита-эквивалентная A , то существует такой проективный левый идеал P в A , что $\text{End } P \simeq R$, и поэтому для всех $n \geq 2$ алгебры матриц $\text{Mat}(n, R)$ и $\text{Mat}(n, A)$ изоморфны. Обзор результатов в этом направлении изложен в [5].

В заключение приведем описание неприводимых C -модулей. Без ограничения общности можно считать, что неприводимый C -модуль точен и является конечно порожденным $(B \cap C)$ -модулем.

ТЕОРЕМА 6. При этих предположениях следующие условия эквивалентны: 1) M неприводим; 2) $M \simeq C/(C \cap S^{-1}Cf)$, где $f \in S^{-1}C = F[X_n, \alpha_n]$ неприводим по X_n и $C \cap S^{-1}Cf$ содержит элемент

$$h = 1 + X_1 \cdots X_n \sum_{0 \leq i \leq d} b_i X_n^i, \quad b_i \in C \cap B, \quad b_d \in D^*.$$

Ближние вопросы рассмотрены в [3], [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Артамонов В. А. // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 167–168. [2] Артамонов В. А. // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 497–503. [3] Бавула В. В. // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. С. 1628–1644. [4] Бавула В. В. // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 1. С. 75–97. [5] Mikhailev A. V. // Proc. Taiwan algebraic conference, 1993. Berlin: Walter de Gruyter, 1996. P. 5–78. [6] Stafford J. T. // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 299. № 2. P. 623–539.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
29.10.1996