Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Вьюгин, Эргодическая теорема для индивидуальной случайной последовательности, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1022>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 06:42:01

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В. В. Вьюгин

Пусть последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ является стационарной (в узком смысле), т.е. для любого $k \geq 1$ и измеримого B

$$P\{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in B\} = P\{(\xi_k, \xi_{k+1}, \dots) \in B\}.$$

Эргодическая теорема утверждает, что если $E|\xi_1| < \infty$, то предел

$$(1) \quad \lim_n \frac{\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{n}$$

существует почти всюду [4]. При этом классическая теория вероятностей не позволяет точно описать класс тех ω , для которых предел (1) существует. Положение усугубляется также тем, что эргодическая теорема, в определенном смысле, оказывается “неконструктивной”. Мы будем использовать понятие алгоритмически вычислимой функции [3]. Последовательность случайных величин $\eta_1, \eta_2, \dots$ сходится по вероятности к случайной величине η алгоритмически эффективно, если существует целочисленная алгоритмически вычислимая функция $m(\delta, \varepsilon)$ с рациональными аргументами такая, что для всех рациональных $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ будет выполняться $P\{|\eta_n - \eta| > \delta\} < \varepsilon$ для всех $n \geq m(\delta, \varepsilon)$.

В качестве вероятностного пространства будем рассматривать $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Здесь $\Omega = I^\infty$, где $I = \{0, 1, \dots, l\}$, $l \geq 1$, $\mathcal{F}$ – борелевское поле, порожденное шарами вида $\Gamma_x = \{\omega : \omega_1 = x_1, \dots, \omega_k = x_k\}$, где k – натуральное число, $x = x_1 \dots x_k$, $x_1 \in I, \dots, x_k \in I$, ω_k обозначает k -й член последовательности ω . Мера P называется *вычислимой*, если существует алгоритм, вычисляющий по x и рациональному $\varepsilon > 0$ рациональное приближение величины $P(\Gamma_x)$ с точностью до ε .

ТЕОРЕМА 1. *Существует вычислимая стационарная мера, для которой сходимость по вероятности $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega_k \rightarrow f(\omega)$ не является алгоритмически эффективной (здесь $f(\omega)$ – предельная функция, существующая по эргодической теореме).*

Поскольку сходимость почти всюду эквивалентна сходимости

$$P\left\{\omega : \sup_{m \geq n} \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \omega_k - f(\omega) \right| > \delta\right\} \rightarrow 0$$

для любого $\delta > 0$, сходимость почти всюду также не является алгоритмически эффективной.

Тем не менее, эргодическая теорема допускает алгоритмически удовлетворительную форму в рамках предложенного А. Н. Колмогоровым алгоритмического подхода к обоснованию теории вероятностей и теории информации [2]. Точное математическое понятие случайной последовательности позволяет формулировать законы теории вероятностей для индивидуальных последовательностей и находить новые “алгоритмические” формулировки и доказательства этих законов. Яркий пример такого рода – найденное Вовком [1] алгоритмическое доказательство закона повторного логарифма для случайных последовательностей.

Для определения случайной последовательности выделяется свойство “типичности”, которое утверждает, что случайная последовательность должна принадлежать любому “разумному” большинству, которое определяется алгоритмически [3]. Пусть P – некоторая вычислимая мера на Ω . Множество $M \subseteq \Omega$ имеет P -меру 0, если для любого рационального $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность шаров $\Gamma_{x(1)}, \dots, \Gamma_{x(n)}, \dots$, что для $U_\varepsilon = \bigcup \Gamma_{x(n)}$ будем иметь $M \subseteq U_\varepsilon$ и $P(U_\varepsilon) < \varepsilon$. P -нулевое множество M называется *эффективно нулевым*, если

существует алгоритм, который по произвольному рациональному $\varepsilon > 0$ перечисляет последовательность $x(1), \dots, x(n), \dots$, порождающую такое множество U_ε . Мартин-Лёф доказал, что для произвольной вычислимой меры P существует максимальное по включению эффективно P -нулевое множество – его дополнение называется *конструктивным носителем меры P* . Бесконечная последовательность называется *типической относительно меры P* (случайной в смысле Мартин-Лёфа), если она лежит в конструктивном носителе меры P [3].

Вопрос об истинности эргодической теоремы для типических последовательностей был поставлен в [5].

ТЕОРЕМА 2. *Для любой вычислимой стационарной меры P существует интегрируемая функция f такая, что $E(f) = \sum_{i=0}^l i P\{\omega : \omega_1 = i\}$ и*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega_k = f(\omega)$$

для любой типической относительно меры P последовательности ω , кроме этого, $f(T\omega) = f(\omega)$, где T – сдвиг (т.е. $(T\omega)_i = \omega_{i+1}$ для всех i). Если, к тому же, сдвиг T эргодичен, то $f(\omega) = E(f)$ (E – символ математического ожидания).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вовк В. Г. // Теория вероятн. и ее примен. 1987. Т. 32. №3. С. 456–468. [2] Колмогоров А. Н. // Проблемы передачи информации. 1969. Т. 5. №3. С. 3–7. [3] Колмогоров А. Н., Успенский В. А. // Теория вероятн. и ее примен. 1987. Т. 32. №3. С. 425–455. [4] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980. [5] Lambalgen M. Random sequences. Amsterdam: Academish Proefschri't, 1987.

Институт проблем
передачи информации РАН

Принято редколлегией
06.09.1996