Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Волков, Оптимальное инвестирование с учетом операционных издержек, пропорциональных капиталу портфеля, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 6, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1023>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:01:19

ОПТИМАЛЬНОЕ ИНВЕСТИРОВАНИЕ С УЧЕТОМ ОПЕРАЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК, ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ КАПИТАЛУ ПОРТФЕЛЯ

С. Н. Волков

Мы рассматриваем задачу построения оптимальной инвестиционной стратегии при наличии операционных издержек в следующей модели. Пусть финансовый рынок, состоит из банковского счета (облигации):

$$(1.1) \quad B_t = 1$$

и d рискованных активов (акций), описываемых следующими стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$(1.2) \quad dS_t^i = S_t^i \left(\mu^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dW_t^j \right).$$

Здесь $\vec{W} = (W^i)_{1 \leq i \leq d}$ — d -мерный винеровский процесс, $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ — матрица взаимных ковариаций компонент винеровского процесса.

С математической точки зрения *стратегия* инвестора на данном рынке определяется как предсказуемый процесс $\Pi = (\beta_t, \vec{\gamma}_t)_{t \geq 0}$, где γ_t^i (соответственно, β_t) есть количество i -го рискованного (соответственно, безрискового) актива в портфеле в момент времени t . Капитал стратегии в момент t равен

$$V_t = \beta_t + \langle \vec{\gamma}, \vec{S} \rangle_t$$

(здесь как обычно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть скалярное произведение).

Эквивалентным образом стратегию можно описывать заданием ее капитала V и вектором пропорций $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$, где

$$\alpha_i = \frac{\gamma^i S^i}{V}.$$

Мы предполагаем наличие на рынке операционных издержек, пропорциональных капиталу портфеля, т.е. за покупку или продажу акций взимается плата в размере ηV . В этом случае условие самофинансируемости принимает следующий вид:

$$dV_t = V_t [\langle \vec{\alpha}, \vec{\mu} \rangle dt + \langle \vec{\alpha}, \Sigma d\vec{W}_t \rangle - \eta dN_t],$$

где $(N_t)_{t \geq 0} = \sum_{s \leq t} I(|\Delta \vec{\gamma}_s| > 0)$ — считающий процесс “воздействий” инвестора.

В работе А. Мортон и С. Плиски [1] рассматривалась задача максимизации асимптотической ставки роста инвестиционного портфеля:

$$(1.3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[\ln(V_T/V_0)]}{T} \rightarrow \max \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_\infty(\eta) = \Phi_\infty(\eta, 0).$$

Было показано, что (1.3) сводится к решению задачи Стефана с подвижной границей и в случае $d = 1$ было дано явное решение.

В случае $d > 1$ К. Атkinson и П. Уилмотт [2] с помощью “метода возмущений” нашли решение задачи Стефана в первом приближении по η .

В настоящей работе рассматривается следующая задача максимизации средней доходности инвестиционного портфеля на *конечном временном интервале* $[0, T]$ в случае $\eta \approx 0$:

$$(1.4) \quad ER(\beta) = \frac{1}{\beta T} (E[V_T/V_0])^\beta - 1 \rightarrow \max \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_T(\eta, \beta), \quad \beta \in (-\infty, 1).$$

В пределе $\beta \rightarrow 0$ получаем аналог задачи (1.3) на конечном временном интервале.

Пусть $R^*(\beta) = R^*(\eta, \beta)$ есть максимальная средняя доходность самофинансируемых портфелей определенная в (1.4). Случай $\eta = 0$ отсутствия операционных издержек был изучен Р. Мертоном [3]. Его результат можно переформулировать с учетом введенных обозначений следующим образом:

$$R^*(0, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta T} \left(\exp \frac{\beta \langle \vec{\alpha}^*, \vec{\mu} \rangle}{2} - 1 \right), & \beta \in (-\infty, 1), \beta \neq 0, \\ \frac{\langle \vec{\alpha}^*, \vec{\mu} \rangle}{2T}, & \beta = 0, \end{cases}$$

где вектор

$$(1.5) \quad \vec{\alpha}^* = \vec{\alpha}^*(\beta, 0) = \frac{1}{1-\beta} (\Sigma \Sigma^T)^{-1} \vec{\mu}$$

определяет пропорцию рискованной части капитала в оптимальном инвестиционном портфеле (так называемая “точка Мертона”).

Введем следующие обозначения: E – единичная матрица, I – матрица размера $d \times d$, все элементы которой равны 1, $\text{Diag}(\vec{\alpha}^*)$ – диагональная матрица, элементы которой равны соответствующим элементам вектора $\vec{\alpha}^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) *Имеет место асимптотическое представление:*

$$R^*(\eta, \beta) = R^*(0, \beta) - \eta^{1/2} v^* (1 + R^*(0, \beta) \beta T) + o(\eta^{1/2}),$$

где

$$v^* = 2 \text{tr}(BM), \quad B = \langle \Sigma \text{Diag}(\vec{\alpha}^*)(E - I \text{Diag}(\vec{\alpha}^*)), \Sigma \text{Diag}(\vec{\alpha}^*)(E - I \text{Diag}(\vec{\alpha}^*)) \rangle$$

а матрица M является решением следующего уравнения

$$8MBM + 4 \text{tr}(BM)M = (1 - \beta) \Sigma^T \Sigma.$$

2) *Стратегия $\tilde{\Pi}$ у которой изменение структуры портфеля осуществляется только в те моменты времени, когда отклонение пропорции рискованной части капитала от вектора (1.5) $\Delta \vec{\alpha} = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}^*$ удовлетворяет соотношению*

$$\langle \Delta \vec{\alpha}, M \Delta \vec{\alpha} \rangle \geq \eta^{1/4},$$

причем в количестве необходимом для восстановления $\vec{\alpha}$ в точку $\vec{\alpha}^$, является асимптотически оптимальной:*

$$R^{\tilde{\Pi}}(\eta, \beta) = R^*(0, \beta) - \eta^{1/2} v^* (1 + R^*(0, \beta) \beta T) + o(\eta^{1/2})$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим что указанная оптимальная стратегия совпадает с асимптотически оптимальной стратегией Аткинсона-Уилмотта [2].

Основная идея в доказательстве предложения 1 состоит в использовании свойства автономности оптимизационной задачи, а также эргодической теоремы для управляемых случайных процессов, позволяющей перейти от задачи на конечном временном интервале к задаче на бесконечном временном интервале.

Автор выражает благодарность Д. О. Крамкову за полезные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Morton A. J., Pliska S. R. Optimal Portfolio Management with Fixed Transaction Costs // Math. Finance. 1995. V. 5. №4. P. 337–356. [2] Atkinson C., Wilmott P. Portfolio Management with Transaction Costs: An Asymptotic Analysis of the Morton and Pliska Model // Math. Finance. 1995. V. 5. №4. P. 357–367. [3] Merton R. C. Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty. The Continuous Time Case // The Review of Economics and Statistics. 1989. V. 51. №3. P. 247–257.