Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Ф. Воронов, Комплекс, порожденный вариационными производными.
Лагранжев формализм бесконечного порядка и обобщение формулы Стокса,
УМН, 1996, том 51, выпуск 6, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1024>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:02:58

**КОМПЛЕКС, ПОРОЖДЕННЫЙ ВАРИАЦИОННЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ. ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ БЕСКОНЕЧНОГО
ПОРЯДКА И ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ СТОКСА**

Ф. Ф. Воронов

1. Основная конструкция. Пусть $M^{n|m}$ — гладкое (супер)многообразие. Рассмотрим лагранжианы $r|s$ -мерных путей, т.е. отображений $\Gamma: I^{r|s} \rightarrow M^{n|m}$, где $I^{r|s} := I^r \times \mathbb{R}^{0|s}$, которые могут зависеть от производных произвольного порядка. Если лагранжиан зависит от производных порядка $\leq k$, то хорошо известно, что вариация действия, вообще говоря, содержит производные порядка $\leq 2k$, и $\delta S = \int_{I^{r|s}} Dt \, \delta x^A(t) \frac{\delta L}{\delta x^A}(x(t), \dot{x}(t), \dots)$, где

$$\frac{\delta L}{\delta x^A} := \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (-1)^{\tilde{A}(\tilde{F}_1 + \tilde{F}_l)} \frac{\partial^l}{\partial t^{F_1} \dots \partial t^{F_l}} \frac{\partial L}{\partial x_{F_1 \dots F_l}^A}.$$

(Отметим, что на лагранжианах произвольного порядка “полные производные” по временным переменным имеют смысл.) Для каждого лагранжиана L определим новый лагранжиан dL , задающий действие для путей на единицу большей размерности:

$$(1) \quad dL := \dot{x}_{r+1}^A \frac{\delta L}{\delta x^A}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Определение d не зависит от выбора координат. Операция d задает на пространстве всех лагранжианов структуру коцепного комплекса:*

$$(2) \quad \dots \longrightarrow \Phi^{r|s} \xrightarrow{d} \Phi^{r+1|s} \xrightarrow{d} \Phi^{r+2|s} \xrightarrow{d} \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Независимость d от системы координат следует из того, что вариационные производные преобразуются как компоненты ковектора. Рассмотрим квадрат d . Непосредственное вычисление $d\delta L$ в общем виде затруднительно, так как требует явного раскрытия полных производных в формуле (1). Для лагранжианов первого порядка формальное выражение для d^2 содержит 36 слагаемых, которые действительно взаимно сокращаются, но проверка этого факта (автор ее проделал) мало приятна. Введем “взвешенные” пути и рассмотрим функционалы вида $S[\Gamma, g] = \int_{I^{r|s}} Dt \, g(t) L(x(t), \dot{x}(t), \dots)$, где g — функция с компактным носителем в кубе $I^{r|s}$. Верна

$$\text{ЛЕММА. } \delta S = 0 \text{ для } \forall g \, \forall \delta x(t): \text{Supp } \delta x \cap \text{Supp } dg = \emptyset \iff \frac{\delta L}{\delta x^A}(x(t), \dot{x}(t), \dots) = 0.$$

Рассмотрим действие S^* , отвечающее лагранжиану dL . По определению вариационной производной

$$\frac{\partial x^A}{\partial t^{r+1}} \frac{\delta L}{\delta x^A}(x(t), \dots) = \frac{\partial}{\partial t^{r+1}}(L) + \text{производные по } t^F, \quad F \neq r+1.$$

Таким образом, множитель при $g^*(t^*)$ в интеграле есть “полная дивергенция”, и S^* переписывается в виде интеграла от $\pm(\partial g^*/\partial t^{F^*})h^{F^*}(t^*)$ (аналог интеграла по границе). Для любой вариации $\delta x^A(t^*)$, удовлетворяющей условию $\text{Supp } \delta x \cap \text{Supp } dg^* = \emptyset$, получим $\delta S^* = 0$, ибо носитель δh^{F^*} не больше носителя δx^A . Применяя лемму, получаем $\delta dL/\delta x^A = 0$ тождественно, и $d\delta L = 0$.

Когомологии комплекса (2) являются инвариантом гладкого многообразия M .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01440).

2. Обобщенная формула Стокса. Пусть дано семейство путей Γ_s (постоянное вне компакта). Рассмотрим его как путь Γ^* , на единицу большей размерности.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого лагранжиана*

$$(3) \quad S[\Gamma_1] - S[\Gamma_0] = \int_{\Gamma^*} dL.$$

Если лагранжиан таков, что действие не зависит от параметризации (с нужным ограничением на ориентацию, см. [1]), то можно интегрировать по сингулярным многообразиям с границей и справедлив полный аналог формулы Стокса. Мы видим, что она не является исключительной принадлежностью дифференциальных форм. Формула (3) объясняет тождество $d^2 = 0$ как проявление общего факта “граница границы равна нулю”.

3. Применение к теории форм на супермногообразии. Определение (1) впервые было дано автором в следующем контексте [2]: на супермногообразии (не являющемся чисто четным) было необходимо определить правильный аналог комплекса де Рама. В качестве форм было предложено рассматривать “ковариантные” лагранжианы первого порядка с дополнительным условием, обеспечивающим независимость вариации от ускорений (см. [1], [2]). В четном случае было показано, что воспроизводится теория Картана–де Рама. В общей ситуации теория нетривиальна. Указанное условие равносильно системе уравнений в частных производных [1, с. 58], нечетно-нечетная часть которых дает уравнения, известные при описании образа интегральных преобразований типа Радона [3], [4]. Введем фильтрацию лагранжианов по степени производных. Тогда наши уравнения получают “топологическую” интерпретацию как условие сохранения фильтрации под действием дифференциала d и очевидные высшие аналоги. Результаты настоящей заметки дают существенное упрощение доказательств [1]. Недавно построена “вторая половина” комплекса форм на супермногообразии на дуальном языке [5]. Можно надеяться, что сочетание методов [5] и настоящей работы приведет к новому продвижению.

4. Применение к обратной задаче вариационного исчисления. В соответствии с теоремой 1, чтобы проверить, что набор функций f_A является вариационными производными от лагранжиана $r|s$ -путей, необходимо составить $d(\dot{x}_{r+1}^A f_A)$ и проверить равенство нулю. (Заметим, что сечения расслоений также могут быть интерпретированы как “поверхности” или “пути”.) Обратная задача вариационного исчисления изучалась в [6], [7] и др. Было бы интересно сопоставить подход этих работ с комплексом (2).

В заключение можно заметить, что известные в теории гомологий конструкции дифференциалов сводятся к двум или трем основным классам (комбинаторный и дифференциалы типа Картана или Кошуля). “Вариационные” дифференциалы, изучаемые в [1], [2], [5] и настоящей работе, по-видимому, дают еще один, новый, класс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Voronov Th. Geometric integration theory on supermanifolds // Soviet Sci. Rev. Sect. C. Math. Phys. Rev. 1992. V. 9. [2] Воронов Ф. Ф., Зорич А. В. // Функциональный анализ и прилож. 1986. Т. 20. № 2. С. 58–59. [3] John F. // Duke Math. J. 1938. V. 4. P. 300–322. [4] Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. // Итоги науки и техники. Современ. пробл. матем. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1980. С. 53–226. [5] Voronov Th. dg-ga/9603009. Topics in Geometry and Mathematical Physics // AMS Translations / ed. S.P. Novikov, 1996. [6] Vinogradov A. M. // J. Math. Anal. Appl. 1984. V. 100. № 1. P. 1–129. [7] Tulcziew W. // Bull. Soc. Math. France. 1977. V. 105. P. 419–431.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: theodore@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
03.10.1996